

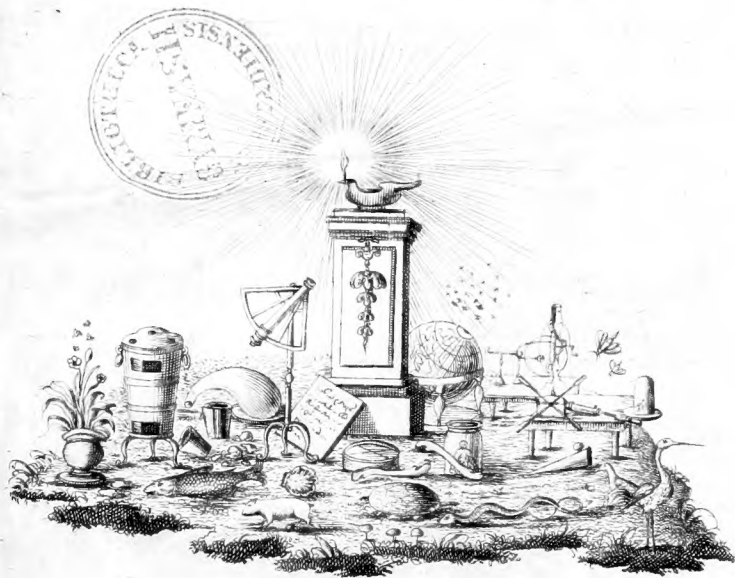
FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVII.

PARS PRIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXVIII

ACTA

ACADEMIAE SCIENTIARUM

IMPERIALIS

PETROPOLITANA

1891 April 16

PRO VERO MUNIFICENTIA

LIBRIS P. R. I. O. R.

PETROPOLITANA
ACADEMIA SCIENTIARUM
IMPERIALIS

CATHARINAE III.

AVGVSTISSIMAE AC POTENTISSIMAE

OMNIVM RVSSIARVM IMPERATRICI

ET AVTOCRATORI

MAGNAE PIAE FELICI

PATRIAE MATRI INDVLGENTISSIMAE

LEGISLATRICI SAPIENTISSIMAE

LITTERARVM ATQVE ARTIVM

PATRONAE MVNIFICENTISSIMAE

PRINCIPI OPTIMAE

PRIMVM HVNC ACTORVM SVORVM TOMVM

DEVOTISSIME DEDICAT

ACADEMIA IMPERIALIS SCIENTIARVM

PETROPOLITANA

DIRECTORE

SERGIO DE DOMASCHNEV.

GAFFNEY

ADMINISTRATIVE AND TECHNICAL

DEPARTMENT OF AGRICULTURE

WASHINGTON, D. C.

1915

OFFICE OF THE DIRECTOR

WASHINGTON, D. C.

1915

1915

1915

1915

1915

1915

AVERTISSEMENT.

Les Actes de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, dont le public reçoit aujourd'hui le premier volume, ne sont proprement qu'une continuation des ses Mémoires qu'elle avoit publiés jusqu'ici sous le titre de Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae.

Depuis sa fondation, c'est à dire depuis l'année 1726, jusqu'à son renouvellement en 1747, l'Académie en publia quatorze Tomes. Elle en recommença ensuite une nouvelle collection, à laquelle elle donna le titre de Novi Commentarii : & depuis 1747, jusqu'à la célébration de son premier Jubilé demi-séculaire en 1776, il en parut encore vingt Tomes, desquels le XIV^{me} pour 1769 est divisé en deux volumes.

Comme l'Académie voyoit ces commentaires augmenter en nombre & en volume, & que leur ac-

quisition devenoit par là de plus en plus onéreuse, elle résolut de changer encore le titre avec l'année 1777, pour que cette nouvelle suite de ses collections formât en quelque manière un ouvrage séparé, & qu'on pût l'acquies sans être obligé de se charger des commentaires précédens. Elle jugea à propos en même temps de porter des changemens considérables dans la grosseur & la forme même des volumes, pour en diminuer le prix & en favoriser la séparation, & les rendre ensuite intéressans à un plus grand nombre de personnes.

En conséquence de cette résolution, il paroîtra de ces Actes de l'Académie Impériale des Sciences deux volumes par an, dont chacun n'excèdera pas 400 pages. L'année sera de cette manière partagée en deux Sémestres, qui contiendront les mémoires présentés & lus par Mrs. les Académiciens pendant ce même intervalle de six mois. Ces mémoires seront écrits aussi bien en françois qu'en latin, selon que les Auteurs les jugeront plus ou moins appropriés aux personnes
qui

qui n'entendent pas la langue savante. Enfin on fera précéder chaque volume d'une partie historique, qui sera écrite en langue françoise; cette langue étant aujourd'hui la plus généralement connue.

Dans cette partie historique on rendra un compte exact de ce qui s'est passé de plus remarquable à l'Académie pendant le cours du semestre, auquel le volume se rapportera; on y exposera tous les changemens & les faits intéressans, les Assemblées publiques & solennelles, avec les discours qui y auront été prononcés, les questions proposées, & la distribution des prix, les machines, inventions & ouvrages présentés à l'Académie, & enfin les précis des mémoires qui pourront intéresser le public ou lui être de quelque utilité.

Au reste pour réparer la lacune d'une année qu'il y aura de cette façon entre le dernier tome des nouveaux Commentaires qui est pour 1775 & ce premier volume des Actes, qui ne commencent qu'a-

❁ VI. ❁

vec l'année 1777 , l'Académie se propose de publier des Tables des matieres contenues dans ses Commentaires tant anciens que nouveaux & de donner son histoire depuis sa fondation jusqu'à la célébration de son premier Jubilé demi-séculaire inclusivement ; ce qui tiendra lieu du volume qui manque pour l'année 1776.

TABLE.



T A B L E.

HISTOIRE DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES

MDCCCLXXVII. Janvier — Juin
avec quatre planches de figures.

ASSEMBLEES solennelles: - - -	Page 3.
DISCOURS prononcé par Mr. de Domaschnef -	12.
OBSERVATIONS sur la formation des montagnes, par Mr. Pallas: - - -	21.

MECHANIQUE

Description du Modele d'un Moulin à scier - -	65.
Echelle à feu d'une nouvelle construction: - -	67.

PHYSIQUE EXPERIMENTALE

Electrophore perpétuel - - -	70.
Réflexions de Mr. L. Euler sur quelques nouvelles expériences optiques communiquées à l'Aca- démie par Mr. Wilson: - - -	71.
Expérience sur le phosphore sulphureo-calcaire de Mr. Canton par Mr. Krafft: - -	77.

HISTOIRE NATURELLE

Description d'un Huis monstrueux. - -	80.
Description d'une tête de Rhinoceros à deux cornes	81.
Sur les Champignons, leur production & leur usage	83.
D'une nouvelle espece de Ledum particuliere à l'A- merique septentrionale: - - -	85.
Des Mulets dans le Regne végétal - -	86.
D'une Masse de fer natif trouvée en Sibérie -	87.
Sur l'Alcali minéral natif qu'on trouve en Sibérie	88.

METE-

ME'TE'OROLOGIE	-	-	-	Pag. 90.
Comparaison des cinq derniers hyvers. Années				
1772 — 1777	-	-	-	93.
OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS				
présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier semestre de l'année				
1777	-	-	-	96.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVII. Pars prior
cum tabulis XIII. aeri incis.

MATHEMATICA

DAN. BERNOULLI	<i>Diudicatio maxime probabilis plurium obseruationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda</i>	-	Pag. 3.
LEONH. EVLER	<i>Obseruationes in praecedentem Dissertationem</i>	-	24.
LE MARQUIS DE CONDORCET	<i>Sur quelques séries infinies dont la somme peut être exprimée par des fonctions analytiques d'une forme particuliere</i>	-	34.
LEONH. EVLER	<i>De formulis exponentialibus replicatis</i>	-	38.
—	<i>De methodis quae adhiberi possunt, ad integrandas aequationes differentiales lineares, quas differentialia plurium variabilium ingrediuntur</i>	-	61.
NICOLAI FVSS	<i>Meditationes circa resolutionem fractionis $x^m : (x-a)(x-b)(x-d)$ etc. in fractiones simplices, ubi simul Demonstratio insignis Theorematis arithmetici occurrit</i>	-	91.

PHYSICO-

PHYSICO - MATHEMATICA

- LEONH. EVLER *De repraesentatione superficiei
sphaericae super plano* - - - - - Pag. 107.
- *De proiectione geographica superficiei sphae-
ricae* - - - - - 133.
- *De proiectione geographica Delisiana in map-
pa generali imperii russici usitata* - - - - - 143.
- W. L. KRAFFT *Tentamen Theoriae Electrophori* 154.
- LEONH. EVLER *Vera Theoria refractionis & di-
spersionis radiorum rationibus et experimen-
tis confirmata* - - - - - 174.
- *De figura quam ventus fluido stagnanti indu-
cere valet* - - - - - 190.

PHYSICA

- I. G. GEORGI *De natro ruthenico observationes* 197.
- P. I. BERGIVS *Ledum buxifolium, noua ex Ame-
rica septentrionali allata plantae species* - - - - - 213.
- I. T. KOELREVTER *Digitales hybridae* - - - - - 215.
- C. F. WOLFF *De orificio venae coronariae magnae* 234.
- I. LEPECHIN *Phocarum species descriptae* - - - - - 257.

ASTRONOMICA

- LEONH. EVLER *Considerationes super problemate
astronomico in Tomo Commentariorum vete-
rerum IV^{to}. pertractato* - - - - - 269.
- Ex tribus eiusdem stellae fixae obseruatis altitudinibus, vna cum
temporis intervallis inter obseruationes elapsis tam eleua-
tionem poli eius loci, vbi obseruationes sunt factae, quam
declinationem ipsius stellae, seu eius distantiam a polo de-
finire.
- *De figura apparente annuli Saturni pro eius
loco quocunque respectu terrae* - - - - - 276.
- *De apparitione et disparitione annuli Saturni* 288.
-):():(
- A. L.

- A. I. LEXELL** *Solutio problematis astronomici, de inueniendo loco heliocentrico cometæ ex dato loco eius geocentrico, s; pro cognitis habeantur locus nodi et inclinatio orbitæ, in qua cometa mouetur* - - - - - Pag. 317.
- *Tentamen astronomicum de temporibus periodicis cometarum et speciatim de tempore revolutionis cometæ, A. 1770 obseruati* - - - 332.
- L. A. EVLER** *Epitome obseruationum meteorologicarum Petropoli Anno 1776 secundum calendarium correctum institutarum* - - - 370.

M O N I T V M.

Circa dissertationem Ill. Euleri, de tabula numerorum primorum ad Millionem vsque et ultra continuanda, quæ extat in Tomo Commentariorum XIX. præcedentis collectionis, notandum est, numerum 1000009, in tabula annexa numerorum primorum millione maiorum occurrentem, non esse primum, sed diuifore gaudere 293, quippe qui diuifor, Schemati præmissò pro valore $q = 33333$ sub residuo 19 loco signi Primorum p inferendus, tum temporis pro vnica hac areola fuerat prætermiffus, vti deinceps, facta reuifione calculorum pro construenda hac tabula institutorum, compertum est; qua de re huiusmodi disquisitionum Curiosos hoc loco certiores facere haud abs re fore duximus.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

Histoire de 1777. P. I.

a

RECEIVED

NOV

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

1961

10 10 10 7



HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

M D C C L X X V I I.

Janvier — Juin.

ASSEMBLÉES SOLEMNELLES.



Nous avons à rendre compte de deux événemens également intéressans & glorieux pour notre Académie : l'aggrégation de STANISLAS AUGUSTE & la visite de GUSTAVE III. deux Monarques qui indépendamment du Diademe dont Leurs têtes sont ornées occupent des places non moins brillantes parmi les génies de notre Siecle.

Ce fut le Mardi , 6 de Juin , dans une Assemblée extraordinaire de tous les Académiciens & Adjoints, tenue à onze heures avant midi & présidée par Mr. de *Domaschnef*, Gentil - Homme de la Chambre de *l'Imperatrice*,

que celui-ci communiqua la lettre par laquelle Sa Majesté le Roy de Pologne a bien voulu permettre que l'Académie Le comptât au nombre de ses Associés honoraires. Le Secrétaire de Conférences en fit la lecture, & M. le Directeur aussi bien que tous ceux qui étoient assemblés, après l'avoir écoutée avec une attention des plus respectueuses, se leverent & se félicitèrent réciproquement de cette Association distinguée & glorieuse. La lettre du Monarque est conçue en ces termes.

Monfieur de Domaschnef,

Une Académie fondée par PIERRE le Grand, & protégée par CATHERINE II. d'une manière qui augmente si efficacement la masse des connoissances utiles, & par conséquent le bonheur du Genre humain honore ceux qu'elle associe, autant qu'elle intéresse l'univers à ses succès. J'accepte avec reconnoissance l'invitation que vous Me faites, Monfieur, de devenir membre de la Société, à laquelle Vous présidez si dignement; & Je reçois comme un présent très agréable les médailles, destinées à célébrer le premier Jubilé d'une Académie, dont les travaux pendant les cinquante premières années de son existence sont consignés dans ses mémoires à la juste reconnoissance de la postérité. Je regarde les relations comme toutes établies entre Nous, puisqu'elles sont fondées sur l'estime que vous m'avez inspirée, & qui me porte à vous assurer tout particulièrement que Je suis,

Monfieur de Domaschnef,

Varsovie
ce 21. Avril 1777.

Votre très affectionné
Stanislas Auguste, Roi.

Tout ce que l'Europe fait des vertus & des qualités éminentes de cet auguste Académicien, auxquelles les sciences

sciences ont tant de part , peut donner une idée de l'émotion que cette lecture produisit sur l'assemblée. On n'ignore pas que le devoir de régner a besoin de délassemens , même de consolations : on fait que ce sont les sciences qui ont cette douce tâche auprès de ce Monarque, qui ayant fait sentir à ses Etats les avantages de l'ordre & de l'union , leur donne une consistance permanente par les lumieres , qui émanent de son génie & se répandent sur toutes les classes des Citoyens. (*) Ce n'est que le défaut de cette union qui a donné lieu aux troubles qui ont tant agité ce Royaume. Transportés en idée le génie de STANISLAS à quelques Siecles en arriere et l'Histoire de la Pologne auroit été , ce qu'elle va devenir : une Leçon aux Etats.

Cette Séance fût terminée par la lecture d'un écrit dans lequel M. le Prof. Krafft rend compte à l'Académie d'une espece de lessive qui en pénétrant les bois & les autres matieres combustibles , leur fait perdre la qualité de s'enflammer & de communiquer le feu aux corps qui leur sont proches.

La seconde Assemblée solennelle fut tenue dans un jour de Séance ordinaire le Vendredi 23. Juin avant midi. Elle fut honorée de la présence de S. M. le Roi de Suede, (sous le nom du Comte de Gothland). La Société se trouvoit ce jour-là assemblée en plein ; outre les membres ordinaires , tous les honoraires s'y étoient rendus , ainsi que les Ministres étrangers , les Seigneurs de la Suite

a 3

de

(*) *Etablissement de la Commission pour l'éducation nationale.* L'Europe est instruite du zele , de la solidité & de la sagesse des moyens dont cette illustre Compagnie s'est servie pour faire participer tous les Polonois à cet insigne bienfait de leur Roi.

de Monsieur le Comte , les Principaux de la Cour , & les autres amateurs des Sciences.

L'Illustre Etranger fut reçu au bas de l'escalier par Monsieur de *Domaschnef* , Directeur Président, accompagné des deux Secrétaires. La compagnie resta dans la Salle d'assemblée ; & ce fut pour accorder la modestie du Prince avec les hommages que lui doivent les Sciences à tant de titres , que Monsieur le Directeur , qui avoit déjà eu l'honneur de lui être présenté , alla au devant de lui comme par empressement pour quelqu'un qu'il connoissoit personnellement.

L'Auguste Etranger ne voulut point accepter la place d'honneur qui lui fut offerte , il s'empara d'une des chaises qui avoient été placées pour les Etrangers. Dès que Monsieur le Directeur & la compagnie eurent pris place , Monsieur de *Domaschnef* ouvrit la Séance à l'ordinaire , en requérant le Secrétaire de faire la lecture du Journal de la dernière Séance. Cette lecture fut suivie d'une autre faite par Monsieur Pallas, sur la structure des montagnes , & les changemens arrivés au Globe relativement à la Russie. Ensuite Monsieur de *Domaschnef* en fit une, dans laquelle, en justifiant le titre de Philosophique donné à ce Siècle , il insinua tout ce que les sciences & les talens doivent à l'illustre protecteur des lettres, que l'Académie avoit l'honneur de recevoir (*). Enfin le Conseiller d'état actuel Mr. de Stélin, membre ordinaire de l'Académie , communiqua & lut une lettre du Pere Cibot, Missionnaire à Pé-king, & l'un des associés de l'Académie

(*) Ces deux Discours avoient d'abord été imprimés séparément : mais comme de telles pieces detachées sont sujettes à s'égarer facilement , on a jugé à propos de les réunir encore au présent recit.

démie Impériale des Sciences. Cette lettre datée du 13. Septembre 1775, a pour objet une espèce de Champignons, qui jusqu'ici n'a pas encore été connue des Physiciens naturalistes.

Ce savant Missionnaire qui travaille avec tant de succès à la propagation des lumières de la foi & de celles de la raison, avoit joint à sa lettre un mémoire sur la culture de ces champignons; mais Monsieur le Directeur jugea à propos d'en remettre la lecture à la séance prochaine (*). Celle ci fut terminée par la demande que fit Monsieur le Directeur, si quelqu'un avoit encore quelque proposition à faire? Après un moment de silence toute la compagnie s'étant levée, Monsieur de *Domschnef* s'approcha de Sa Majesté & eut l'honneur de lui présenter tous les Académiciens honoraires & ordinaires, en commençant par ceux qui en même tems sont de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm. Après quoi il conduisit le Monarque au Cabinet d'Histoire naturelle & de curiosités.

Dans le Péristyle & en montant l'escalier, Monsieur le Comte de Gothland vit les bustes des Illustres Suédois, tels que Linnaeus, Wallerius, & de la célèbre Christine, ainsi que de Descartes à qui GUSTAVE III. a érigé un monument, qu'on y voyoit aussi représenté, tel qu'il est placé dans l'Eglise de St. Oloff avec ses inscriptions.

Ce Prince agréa les différens porte-feuilles (tous aux armes de Gothland) contenant des plans, des dessins, des estampes &c. que Monsieur le Directeur lui présenta dans
les

(*) L'Extrait de ce Mémoire se trouve ci-après à l'Article *Histoire naturelle*.

les diverses chambres du Cabinet qu'il parcourut, & qui étoient relatives aux objets qui y sont contenus.

Dans le cabinet des Médailles il vit le recueil le plus complet de médailles Suédoises, & de monnoies courantes au coin de GUSTAVE III. Il accepta ici la grande médaille de l'Académie, & son jetton en or. Toute sa Suite en reçut de pareilles en argent. On présenta aussi au Prince un gros morceau de 4 livres de fer natif (*), dans une boîte de vermeil, ornée des armes de Gothland, artistement ciselées, & entourées de guirlandes en or de différentes couleurs.

S. M. après avoir vu les Instrumens de Physique expérimentale, examina les diverses curiosités, & raretés Chinoises, & Mongales, & comme elles parurent L'intéresser, Monsieur de *Domaschnef* saisit cette occasion, pour lui offrir une Collection des Dessins de toutes ces pieces, enluminés au naturel.

Après avoir examiné le Cabinet, Monsieur le Comte de Gothland passa à la Bibliothèque. Le Manuscript original de l'Instruction pour le Code, composé & écrit par CATHERINE II. (dépot qui assure à notre Bibliothèque la supériorité sur toutes les autres,) arrêta longtems le Voyageur, qui se mit à le lire avec le plus grand intérêt. Monsieur de *Domaschnef* voyant que ce feroit aux dépens de tout ce qui restoit encore à voir, ne put Lui donner autrement le change, qu'en Lui présentant l'Image de la chose qui absorboit son attention. Ce qu'il fit en offrant à l'Emule de l'Auteur de cet immortel ouvrage, un exemplaire de la grande Edition de ce livre faite dans les quatre langues les plus connues, la Russe, la Latine, la Francoise, & l'Allemande, ce qu'il accepta avec la plus grande sensibilité.

En

(*) Voyez ci-dessous à l'Article *Histoire naturelle*.

En sortant de la Bibliothèque, Monsieur le Comte de Gothland examina avec beaucoup d'attention l'image de PIERRE I. de grandeur naturelle, poussé en cire, dont le moule avoit été pris sur le Monarque même. Il se fit expliquer dans le même appartement un tableau allégorique qui se trouve placé vis - à - vis de cette image si chère à la nation (*).

De là il se rendit à l'Observatoire, & il se donna même la peine de monter à la plate - forme par un escalier tournant des plus incommodes, où il ne fut suivi que par Monsieur de Domaschnef & par un des ses Chambellans. En-

(*) L'idée de cette représentation qu'on nomme le *Vœu universel*, ou le supplément à l'histoire de *Pierre le Grand*, a été fournie à Monsieur de Domaschnef par le cri général de tous les curieux qui venoient contempler l'image du Fondateur de St. Pétersbourg, ou plutôt de toute la Russie; tous s'écrioient: Ah! s'il voyoit ce qu'on a fait après lui, ce qu'on a bâti sur les fondemens qu'il a mis! En conséquence de cette réflexion le tableau représente *Pierre le Grand* en Apothéose, à qui le Temps, tenant d'une main son sablier, sur lequel on voit le nombre *L* fait appercevoir, que dans ce période Sa Statue Equestre sera élevée sur un rocher, qu'on aura su rendre mobile & transporter à une distance de vingt Verstes de son lieu natal: On y voit de plus un temple magnifique de marbre de Russie, dédié au Saint du jour où *Pierre le Grand* naquit, & le Dome de l'Hôtel de l'Amirauté chargé de pavillons Turcs, au dessus desquels domine le pavillon triomphant de la Russie. Le Port dressé sur la Néva qui mène à la Forteresse, est couvert d'une procession militaire qui marchant en triomphe, porte les trophées pris sur les Ennemis, pour les poser dans l'Eglise de St. Pierre où reposent les cendres de ce Héros. Allusion au jour, où CATHERINE II., assistant au Te-Deum, qui fut chanté dans cette Cathédrale à l'occasion des victoires remportées par Sa flotte, prit des mains de l'Amiral les Trophées nouvellement apportés, & alla les déposer au pied de la Tombe du Créateur de la marine Russe.

De l'autre main le Temps fait remarquer le mé-lailion de CATHERINE II. que la Rénommée porte au temple de l'Immortalité. Le Manche de sa trompette est garni d'un drapeau, qui en se déroulant laisse appercevoir les augmentations de l'Empire de Russie, particulièrement les nouvelles acquisitions sur la Mer noire.

Ensuite Monsieur le Comte de Gothland souhaita de voir le fameux globe de Gottorp, qui se trouve sous une tour batié exprès ; & à peine eut-il demandé si on pouvoit en voir l'intérieur, qu'une partie de ce globe s'enfonça, & présenta dans son sein un berceau formé autour de l'axe du monde : ce berceau ombrageoit une table de douze couverts, offrant à l'Hôte auguste tout ce que la terre produit de plus exquis dans les Climats les plus heureux. L'art supplée pour cet effet au Soleil, & si celui-ci ne produit pas tout seul des peches & des ananas, il ne les éclaire pas moins sur leurs tiges, que la chaleur entretenue & ménagée oblige de croître & de fructifier. Le Monarque du Nord ne les dédaigna pas. Ce Prince, Sa suite, quelques Seigneurs de la cour, & Monsieur le Directeur entrèrent donc dans le sein du Globe. Les armes de Gothland y paroissoient par tout entrelacées de fleurs ; Monsieur le Comte s'y arrêta une demi-heure ; en sortant il témoigna à Monsieur de Domaschnef son contentement dans les termes le plus flatteurs, & comme il se trouvoit pour ainsi dire dans les Domaines de la Géographie, celui-ci saisit cette occasion pour lui présenter la nouvelle grande Carte de la Russie dressée à l'Académie avec un recueil de Cartes spéciales formant un Atlas de cet Empire.

En passant de là dans les Imprimeries de l'Académie, Monsieur le Comte ramassa une feuille qui sembla tomber par hazard de la presse : c'étoit son portrait avec des vers au bas : Il eut encore la curiosité de regarder ce qu'on imprimoit dans différentes langues & il ne vit partout que des choses qui se rapportoient à son Auguste présence. La Poésie ou plutôt le sentiment empruntoit tous les idiomes pour célébrer cet hôte illustre. Tout ce que l'imprimerie possédoit en gravures, la collection des anciens Czars, les vues de St. Pétersbourg, celles des environs &c., fut ici présenté à

l'Illustre Etranger, qui en l'acceptant parut très sensible à toutes ces attentions. Il ne cessoit de le témoigner à Monsieur le Directeur dans les termes les plus affectueux; & comme ne voulant pas se séparer de lui, il lui proposa de venir dîner avec Lui, honneur que Monsieur de Domaschnef ne put accepter, ayant déjà prié chez lui pour la même raison plusieurs Cavaliers de la Suite du Roi, & tous les Académiciens. Ce que le Prince ayant appris, insista lui même pour qu'il restât avec sa compagnie. Ce fut à cette occasion que l'Illustre voyageur fit entrevoir à Monsieur le Directeur l'espérance d'augmenter un jour le nombre des associés couronnés de cette Académie, & ce fut avec cette idée flatteuse que celle-ci prit congé de lui à deux heures & demie après midi. L'Académie resta ainsi toute pénétrée de l'indulgence avec laquelle ce Protecteur éclairé des Sciences a bien voulu agréer tout ce que son zèle a pu imaginer pour Lui témoigner sa plus vive sensibilité de l'honneur qu'elle en a reçu.



DISCOURS

prononcé par Mr. de *Domaschnef* le 23 Juin 1777, dans l'Assemblée de l'Académie Impériale des Sciences que Monsieur le Comte de Gothland honora de Sa présence.

Dévoués à entretenir le feu sacré de la vérité pour l'appliquer à la recherche des Secrets de la nature, à la propagation des lumières, & à l'anéantissement des préjugés qui brillent quelques fois d'une lueur sacrilège ; rien ne sauroit nous encourager & nous évertuer d'avantage dans la poursuite de notre épineuse carrière, que de voir y participer des hommes distingués encore plus par leurs fonctions, que par leurs titres ; de nous apercevoir, que le Gout de connoissances, la passion de l'instruction prédomine en Eux sur toutes les autres, au point qu'en se dérobant à l'éclat, qui les environne, ils franchissent tout pour étudier le vrai, pour imiter l'utile. Quelle satisfaction, Quelle gloire pour nous ! de les voir entrer dans nos vues avec toute l'ardeur de l'héroïsme (la vérité en a un à elle) les pousser au-delà des bornes, que la méditation recueillie & tranquille n'oseroit quelquefois soupçonner, & réagir enfin sur nous mêmes avec toute l'énergie du Génie. Aussi nous faisons nous une fête toutes les fois que nous avons l'honneur & la satisfaction de recevoir des Voyageurs observateurs, qui constatent si évidemment le titre glorieux de *Philosophique* dont se pare l'époque où nous vivons.

La voix du sentiment a donné ce Surnom éclatant à notre Siècle. Seroit-ce à cause que le nom de Philo-
titre

sophe y est devenu si commun ? mais la prétention à ce titre si rarement confirmé par la vraie Philosophie a été de tout tems & de tous les lieux, où l'on avoit une idée d'un savoir quelconque ; pourquoi ne seroit - ce que ce période du tems qui soit décoré d'une Distinction si belle & si respectable ? C'est que l'esprit philosophique y est devenu celui du jour, & constitue le principe sacré des loix & des mœurs. C'est lui encore, qui faisant influencer l'humanité dans la Justice & les Sentimens dans les usages, devient la base des deux plus grands objets de la Société, *la législation & la morale*, c'est ce qui le caractérise d'une manière si frappante, & lui donne la prééminence décidée sur ceux qui l'avoient précédé, dans lesquels l'esprit non pas de raisonnement, mais d'étiquette semble avoir été la plus recherchée des connoissances humaines.

On diroit qu'on se plaisoit alors à creuser des abîmes pour marquer les différentes classes entre les hommes ; on oublioit que l'objet de la Société est leur réunion & sa perfection la plus grande liaison de ses membres. Ce n'est que dans ce Siecle - ci, que l'amour des hommes & l'estime publique sont devenus le but & la récompense des personnes de tous les rangs. C'est le flambeau de la Philosophie, qui nous a éclairé sur nos vrais intérêts, & ce sont les Sciences qui purifierent & étendirent jusqu'à nos jouissances. En étudiant l'essence & les modifications de notre ame, elles ont influé sur la manière de voir & de sentir ; car tandis que le vulgaire est ébloui & étourdi par les masses qu'il se représente brutes & informes, l'homme éclairé éprouve une immensité de sensations dans l'analyse des plus petites parcelles de notre Globe ; le Génie jouit de l'alternative de suivre le mouvement des mondes dans l'immensité de l'Espace & celui de la sève dans une plante qui rampe sous ses pieds.

Si l'on reproche au luxe qui est aussi une suite des progrès des connoissances humaines, d'avoir augmenté les infirmités de notre corps; de combien de contagions la Philosophie n'a-t-elle pas garanti nos ames? elle rendit nos sens plus fins, nos sentimens plus délicats, nos idées plus claires, en un mot, notre existence plus sentie; elle releva toutes nos facultés & les dirigeant à leur véritable but, les fit concourir à l'agrandissement de la masse du bonheur tant général qu'individuel. L'imagination même, cette mere de l'espérance qui crée l'avenir, reproduit le passé, embellit le présent, doit uniquement à la Philosophie la découverte de cette mine de couleurs vives & variées, dont elle pare tout ce qu'elle touche. C'est elle aussi, qui lui a appris le Secret de rapprocher les beautés éparées de la nature, & de rendre palpable aux yeux ce qui n'étoit concevable qu'à l'esprit. Quel contraste avec les Spectres hideux du fanatisme, qu'elle enfançoit dans les Siècles d'ignorance qui fit à l'Espèce humaine des plaies dont elle saigne encore.

Aussi les Souverains, grands hommes, se sont-ils empressés à élever des temples à la Philosophie. Ce sont ces Sanctuaires (*), où le Génie interroge l'oracle de la nature, c'est ce culte établi à la vérité par les Monarques Philosophes, qui porteront cette empreinte indélébile & sacrée dans leurs loix & dans nos actions; c'est cet heureux besoin de communication entre les esprits, qui est devenu le lien le plus chéri des hommes, & qui a si efficacement consolidé & raffermi les couches de la pyramide sociale; c'est dans ce Siècle qu'un jeune Roi voisin en écrivant à une des plus savantes & des plus illustres Acadé-

(*) Les Académies.

démies s'exprime ainsi: „ *Le plus sûr moyen de rendre les hommes meilleurs*, dit-il, *est de les éclairer, & ainsi le premier devoir des Princes est d'honorer les lettres & ceux qui les cultivent* (*).

C'est en faveur de pareils principes devenus ceux du Gouvernement, que les Sciences ont étendu leur empire si loin & sont devenues le point de réunion de toutes les races de l'espèce humaine; sublimes dans leurs objets, elles se mettent au-dessus de toutes ces entraves subalternes, qui les séparent, & font une seule famille de tous les êtres raisonnables. Si anciennement les Monarques appelloient les Philosophes auprès d'eux; dans le Siècle philosophique on a vu les Rois, venir se mêler parmi ces derniers. C'est ainsi que notre immortel Fondateur alla au foyer des Sciences faire éclore à leur feu éternel & sacré ces germes de tous les talens, que la nature avoit déposés au fond de son ame; c'est ainsi que depuis peu un Philosophe couronné, qui a donné la leçon & l'exemple dans l'Art de la victoire (**), nous honora de son association; c'est de même qu'un autre Roi citoyen, dont les grandes & douces vertus ont été les voies au Trône, se lia à nous (***) ; c'est par l'effet de cette même élévation philosophique que l'Europe admira de nos jours un jeune Prince, dont le berceau a été sur la première marche du Trône & qui né pour porter & affermir la couronne & l'état, se glorifia d'exercer un office dans l'Académie

(*) Lettre du Prince Royal de Suède (le Roi d'aujourd'hui) à l'Académie des Sciences de Paris, du 26. Juillet 1768:

(**) L'Art de la guerre, poème par la Philosophie de Sans-Souci.

(***) Stanislas Auguste, Roi de Pologne.

démie de son Roïaume. Quel sublime noviciat pour la Roïauté! (*)

Et cela doit-il nous étonner de la part du Prince, qui encore à l'aurore de son âge, élève un Monument au Restaurateur de la Philosophie (**)? Il prouve par là à l'univers enchanté de ce spectacle, que le Génie est vraiment immortel, que la nuit du tems n'altère point son éclat, que les Idées d'un grand homme sont un leg à tous ceux qui savent se l'approprier; & cet Auguste Successeur vient de démontrer combien il est capable de faire valoir son héritage.

Le Mausolée de Descartes est certainement le plus beau triomphe de la Philosophie, du siècle, du Pais & du Prince qui l'élève: sa vue enflammera tant d'esprits, qui resteroient peut-être dans une inertie perpétuelle, soutiendra tant d'autres dans cette carrière, où il n'y a que le simulacre de la gloire, qui peut faire supporter toutes les peines, dont elle est parsemée. Oui, les honneurs rendus aux sciences sont tous au profit de la vérité. Il n'y a point de bienfaits, dont l'influence soit plus généralement utile que ceux qu'on leur rend; toute l'humanité y participe. Car l'intérêt de la vérité seule, est dans l'union des hommes, tandisque presque tous les autres tendent à les isoler. C'est donc par ces asiles consacrés à l'étude des rapports de l'homme avec la nature; c'est par les dépôts des idées des Philosophes (***) que leurs fondateurs s'im-

(*) Gustave III. Roi de Suède a été élu Chancelier de l'Université d'Upsal, étant Prince Roïal.

(**) Toute l'Europe & sur-tout la France & la Suede savent, que le Prince Roïal de Suède Gustave Adolphe (le Roi d'aujourd'hui) a élevé un Mausolée au grand Descartes.

(***) Les Bibliothèques.

s'immortalisent plus que par tous les Trophées. C'est ainsi que le nom de l'Académie a survecu à celui du Capitole.

Maîtres des Nations ! répandez les lumières, c'est dans leur seul Commerce que tous gagnent ; celui qui reçoit & celui qui donne. La perte n'est que pour le fanatisme & l'erreur. Sciences, bienfaitrices généreuses de l'humanité ! votre clarté est comme celle de cet Astre, qui ne la concentre pas sur un seul pays, mais embrase de ses rayons toute la surface du Globe. C'est ainsi que le célèbre & infatigable Linné (*) donne à l'univers entier le spectacle de la chaîne des Êtres, qu'il a su apercevoir & distinguer ; il caractérise tous les chaînons qui la composent, assigne à chacun d'eux sa place, remplit les intermédiaires entre l'Hyppopotame & les Molecules organiques, entre le Platane & la Mouffe. C'est par son secret que nous voyons sous un seul point de vue les nuances des espèces que l'Esprit le plus pénétrant & la mémoire la plus heureuse auroient été embarrassés à rapprocher.

Nous nous applaudissons de compter parmi nos Collegues présens, un de vos compatriotes, illustres Hôtes ! qui d'un oeil exercé à lire dans les cieux vient de surprendre dans l'immensité de l'espace le cours d'une Comète, qui a su se dérober jusqu'à présent à tous les observateurs, quoique favorisés d'un ciel plus serein & d'in-

stru-

(*) Célèbre naturaliste de Suede ou plutôt de l'univers, qui a donné le Systeme complet des trois Regnes de la Nature généralement adopté. Il est membre de l'Académie de St. Pétersbourg.

instrumens également rapprochans. Et si le vigilant (*) Lexel n'a été desorienté ni par la grandeur, ni par la distance du Globe radieux dont il avoit saisi les loix, le célèbre Wallérius (**) n'a pas été non plus éconduit par l'extreme ténuité des élémens dont la combinaison fait une si prodigieuse variété des corps, de leurs formes & de leurs effets. Il est donné à cette nation de nous étonner par les découvertes dans les Sciences & de nous charmer par les Chef-d'oeuvres dans les Arts; de reproduire des Plines & des Apelles. Nous voyons même dans notre Cité l'émule de ce dernier décoré des marques du génie. Le tems qui ne fait que monter & descendre est fixé par Roslin : il semble qu'il ait arraché une plume de ses ailes pour faire son pinceau dont il forme les traits de l'image adorable de notre Grande Protectrice. Tous ont accouru dans son atelier pour y voir les traits d'un autre Souverain (***) & c'est pour soulager notre imagination embrasée par la renommée que le jeune Héros occupoit tant, & qui a ouvert pour nos voisins une carrière de bonheur, qui doit être d'autant plus infailible qu'il semble avoir adopté les principes qui nous rendent si heureux nous mêmes. J'ai contemplé cette image, j'en ai été frappé & j'en ai rapporté une impression vive & profonde, qui s'est gravée ineffaçablement dans mon esprit, comme

(*) Astronome de notre Académie. Il vient de déterminer par le calcul, le temps de la révolution d'une des plus proches Comètes de la terre parmi celles qui ont été connues.

(**) Fameux Chimiste de Suede, Membre de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, depuis le jour de la célébration de son Jubilé

(***) Portrait de Gustave III. Roi de Suede, peint par le Chevalier Roslin. Il y a long-tems que le public a prononcé sur le chef-d'oeuvre de la peinture dans ce tableau, mais ce n'est que depuis peu de jours qu'il admire la ressemblance.

comme tout ce qu'il fait se grave dans le coeur. Les sociétés savantes sur-tout, Lui doivent des hommages solennels pour l'élevation, à la quelle il les a portées. O jour mémorable dans les fastes de la Philosophie ! Quel nom donneroit-elle au Roi , qui prend les marques distinctives du Génie pour les supports de sa Couronne ! (*) Quelle époque pour la Création de cet ordre illustre ! Sous quels auspices il s'établit ! L'auguste & immortel Nom de Vasa devient un nom de famille pour le Génie.

Cette illustre race , dont l'héroïsme dans tous les Genres a été l'appanage, offre le plus grand triomphe aux lettres dans la passion qu'avoit pour elles l'Auguste & célèbre Christine , pour qui le devoir de régner devint une distraction trop importune ; mais en réfléchissant sur le sacrifice étonnant , que cette Reine avoit fait à son gout pour les Sciences ; on doit convenir , que la Philosophie de son siècle n'a pas été portée à ce sublime , dont nous la voyons briller dans ce siècle philosophique. Elle se contentoit alors d'éclairer les hommes ; mais celle du notre , excitée & soutenue par l'amour de l'humanité ; plus vigoureuse & plus persuasive , en éclairant aux hommes les voies du bonheur , se fait un devoir de les y conduire.

C'est le tableau ravissant de ses opérations mis dans tout son jour dans la carrière immense du Gouvernement, qui a dû Vous frapper chez nous , Voyageurs observateurs ! C'est cette étendue du Génie , qui embrasse tout ;

c 2

cette

(*) L'Ordre de Vasa fut institué en Suède par Gustave III. le jour de son Couronnement le 29 Mai 1772 pour la Distinction & la Recompeuse des talens ; par un des Statuts de cet ordre le Roi ne peut être couronné sans le recevoir préalablement le jour qu'il est couronné.

c'est cette activité, cette fécondité, qui supplée à tout, cette persévérance de la raison, qui examine, qui approfondit tout, qui ne néglige, ne dédaigne rien, sur-tout c'est cet assujettissement si rare, & si difficile pour le Génie, aux travaux de détail, & qui ne peut s'expliquer que par le dévouement du patriotisme & par l'amour de l'humanité le plus exaltée. Enfin c'est ce spectacle sublime qui démontre que le bonheur n'est jamais plus efficace ni plus universel que lorsqu'il émane du Trône, & que c'est dans ce cas qu'il s'empare de l'ame toute entière. Ce dépôt immortel de la morale des Nations (*) en est une preuve parlante. C'est Vous, illustres Voïageurs ! qui par Vos dignités & encore plus par Vos talens influéz sur le sort des hommes, l'impression que Vous emporterez de chez nous ne pourroit qu'augmenter la satisfaction que Vous aviez du tant de fois éprouver en répondant la félicité sur ceux qui dépendent de vous. Ce sont des principes semblables à ceux qui sont contenus dans ce Code (†) & tels qu'on les voit chez le peuple voisin, qui des actes du Gouvernement, font des leçons du bonheur & de leur exécution la pratique des Vertus.

(*) (†) L'Académie qui a le bonheur de posséder le manuscrit de l'Instruction pour le Code de CATHERINE II. écrit de sa propre main, l'a toujours sur la table dans ses séances solennelles. Il est déposé dans un monument de bronze doré avec des figures & inscriptions analogues au sujet.



OBSERVATIONS

sur la formation des montagnes & les changemens arrivés au Globe, particulièrement à l'égard de l'Empire de Russie; par Mr. *P. S. Pallas* lues le 23. Juin 1777 à l'Assemblée de l'Académie Impériale des Sciences, que Monsieur le Comte de Gothland daigna illustrer de Sa présence.

Depuis le renouvellement des sciences on n'a cessé de former des hypothèses sur la structure apparente de notre Planete, sur l'origine de ses montagnes, sur les couches remplies de productions marines, & sur les autres traces de ces grandes catastrophes du globe, dont l'histoire la plus ancienne de la plupart des peuples asiatiques nous a conservé quelque connoissance & dont on s'est efforcé de trouver ou de supposer les causes naturelles. La plupart de ces hypothèses depuis celle de la chute des anciens continents, jusqu'aux plus modernes, telles que celle de Monsieur le Comte de Buffon & d'autres Auteurs célèbres de notre siècle, ne manquent pas d'observations justes & de conséquences bien-appliquées; mais elles pechent toutes en ce que les auteurs, s'attachant à une seule ou plusieurs observations & causes particulières, en ont voulu déduire toutes les opérations de la Nature si féconde en ressources, & se sont égarés en explications & en oppositions à perte de vue. C'est pour ainsi dire avec des préjugés nationaux, ou avec les idées puisées dans la sphere particulière des connoissances de chacun de ces auteurs, qu'ils ont jugé de la structure du globe

entier d'après les montagnes de leurs patries; & comme plusieurs de ces créateurs en hypothèses n'ont pas même connu par leurs propres yeux la nature des grandes chaînes de montagnes, ou tout au plus n'ont été au fait que de celles, qui traversent l'Europe, leurs théories ont été adaptées à la structure particulière de celles là & bien souvent d'une petite partie des mêmes, qui étoit le plus à leur portée, (tout comme les anciens & quelques ultramontains modernes ont jugé du flux & du reflux de l'Océan, pas les petits mouvemens de la Méditerranée, qu'ils étoient à portée de connoître:) — *Woodward* par exemple sans s'inquiéter de ces chaînes de vieille roche, étoit son système sur la formation des couches & des montagnes pendant le déluge, sur la persuasion où il étoit, que toutes les montagnes de l'Univers fussent composées de couches à peu près horizontales. Mr. le Comte de *Buffon* de même ne semble avoir jugé des montagnes en général, que par celles de la France, qui pour la plupart sont composées de couches à peu près horizontales ou simplement dérangées par l'effet de quelques Volcans. Il n'auroit pas sans cela déduit la formation des cailloux & de l'ancienne roche même (*a*) de matières charriées & déposées par les courants de mer; ni avancé que les traces de la mer se voient jusqu'aux sommets des plus hautes montagnes (*b*), que ces montagnes sont toutes composées de couches horizontales, ainsi que les plaines (*c*), & que les Volcans ne se trouvent que dans les hautes Alpes (*d*); toutes assertions totalement ou en partie contraires

(*a*) Histoire naturelle Ed. 12°. Vol. 1. p. 128.

(*b*) Ibid. p. III.

(*c*) Ibid. p. 116.

(*d*) Ibid. p. 164.

traires à l'ordre général de la Nature. Beaucoup de Naturalistes Italiens, ayant sous leurs yeux les effets immenses des Volcans encore allumés chez eux, ou les traces fréquentes de ceux qui se sont éteints, ont aimé à tout déduire de ces feux souterrains. Un savant Minéralogiste Autrichien (Mr. *Délius*) d'après les monts Crapacs, dont les plus hautes cimes, qu'il a vues, consistent en roche calcaire (véritable ou qui lui ressemble à la vue) juge, que toutes les hautes montagnes du globe, ainsi que sa base ou le noyau même de notre Planete, doivent être de cette roche. Je pourrois alléguer une infinité d'autres exemples de cette nature ; mais je ne me suis point proposé dans ce discours, de discuter toutes les hypothèses anciennes & modernes sur l'état présent de notre globe, qui ne sont pas en petit nombre, mais qui se réduisent presque toutes ou à supposer la ruine d'une première coque unie & solide de l'ancien globe ; la submersion de continens par le dérangement des mers, différemment imaginé ; une dissolution subite de la surface du globe dans le tems du deluge ; l'influence & même le choc de quelque Comete ; une diminution lente & générale des eaux de la mer ; ou enfin à faire jouer les Volcans, que l'on a été jusqu'à attribuer au feu central gratuitement supposé, & que d'autres Physiciens ont employé pour rendre raison de la formation des métaux par sublimation, de l'origine des fontaines par distillation, en faisant de notre planete tantôt un laboratoire chymique, tantôt une machine hydraulique, suppositions plus adaptées aux idées méthodiques d'esprits raisonnateurs, qui s'amusent de telles hypothèses, que ne le sont les grandes opérations variées de la Nature, qui souvent, à l'observation, détruit les plus beaux systemes de cabinet & même quelquefois les démonstrations mathématiques.

Ce n'est que de nos jours , qu'on a commencé à généraliser quelques connoissances sur la constitution de la surface de notre globe & des grandes chaines de montagnes primitives. C'est aux savans Minérographes Suedois & Allemands , que l'on doit les premieres idées nettes & précises sur l'ordre que la Nature a suivi en formant ces élévations du globe & dans l'arrangement des couches qui composent les collines & les plaines de nos continens. J'ai parcouru , sous les auspices de notre GRANDE & AUGUSTE SOUVERAINE , presque toute la longueur de l'Asie & une bonne partie de deux des plus grandes chaines de montagnes , que soutienne la terre habitable , & je trouve avec une surprise bien agréable , que tous les résultats de mes observations , faites sans une connoissance de ces dernieres découvertes & par conséquent sans aucune prévention pour le systeme qu'elles étaient , répondent exactement aux apperçus de ces Naturalistes & servent également à confirmer les idées judicieuses & vraies , qu'ils ont commencé à nous donner sur la structure intérieure du globe.

C'est donc autant pour étendre ces idées au vaste terrain de l'Empire Russe , que pour détailler quelques pensées , fondées sur mes propres observations , touchant l'ancien état de notre globe , & les catastrophes qui lui sont arrivées , que je vais présenter un exposé suivi de ce qui se trouve épars sur cette matière dans les Journaux de mes voïages.

D'après ce que nous favons sur les Alpes Suedoises, Suisses , & Tyroloises , sur l'Appennin , sur les montagnes qui environnent la Bohême , sur le Caucase , sur les montagnes de la Sibérie , sur les Andes même , l'on peut admettre en axiome que les plus hautes montagnes du globe ,

be, qui forment les chaines continues, sont faites de cette roche qu'on nomme Granite, dont la base est toujours un Quarz, plus ou moins mêlé de Feldspath, de Mica & de petites Basaltes éparées sans aucun ordre & par fragmens irréguliers, en différentes portions. Autant que des observations faites à la surface & les fouilles des mines & des puits, quoique bien peu profondes en comparaison de la masse de notre planète, peuvent instruire, cette vieille roche & le sable produit par sa décomposition forment la base de tous les continens. C'est le granite qu'on rencontre au dessous des plus profondes couches des montagnes & souvent dans les terres basses où ces couches sont enlevées par la violence des inondations; c'est lui qui forme les grandes bosses ou plateaux, & pour ainsi dire le cœur des plus grandes alpes de l'univers connu; de façon que rien n'est plus vraisemblable que de prendre cette roche pour le principal ingrédient de l'intérieur de notre globe. J'avoue qu'une telle constitution ne sauroit favoriser la doctrine du feu central; bien au contraire les Physiciens qui placent au noëau de la Terre une masse énorme d'aimant, doivent mieux se trouver de cette assertion, puisque l'aimant, toujours micacé & très-souvent mêlé de quarz, montre plus d'affinité à la roche granitique qu'aux minéraux phlogistiques, ou à la roche calcaire & au sable pur, que d'autres ont prétendu occuper tout l'intérieur du globe. Au reste la matière du granite ne peut avoir été le produit d'un feu de fusion, qui en altère plutôt les principes. Mr. de Buffon & d'autres en supposant que la matière des planètes ait été détachée de la masse du Soleil par le choc d'une comète, ou que des comètes embrasées & fondues par le feu du Soleil soient venues former ces corps de notre système, se virent obligés d'adopter cette production de la roche primitive, tan-

dis qu'il n'est pas encore bien prouvé, que le soleil brule d'un feu assés violent, pour que sa masse soit dans un état de fusion. Il n'appartient peut-être point aux hommes d'approfondir la véritable cause qui a jetté cette masse énorme de matiere vitrifiable dans l'orbite où nous circurons, & l'ingénieux Auteur des *Recherches sur les Americains* semble avoir raison de dire : „ Qu'il vaut autant „ écrire un traité sur la formation des étoiles , que sur „ celle des rochers, qui ont été élevés par les mains puissantes de la Nature créatrice, à laquelle nous devons la „ petite planète sur laquelle les Philosophes raisonnent. “

Toujours il est prouvé par une observation générale & constante, que cette ancienne roche, que nous appelons granite & qui ne se trouve jamais en couches, mais en blocs & rochers, ou du moins en masses entassées les unes sur les autres, ne contient jamais la moindre trace de pétrifications ou d'empreinte organique, de façon qu'elle semble avoir été antérieure à toute la Nature organisée, ou du moins (si l'on admet les âges & les périodes du monde des Indiens & des Egyptiens) réduite dans l'état où nous la voyons par une refonte totale, qui a détruit jusqu'aux moindres traces de tout corps organique, qui pourrait avoir existé avant une telle catastrophe. Nous voyons aussi, que les plus hautes éminences qu'elle forme, soit en plateaux, soit en croupes de montagnes ou pics escarpés, ne sont jamais recouvertes de couches argilleuses ou calcaires, originaires de la mer, mais semblent avoir été de tout temps, ou depuis leur formation élevées & à sec au-dessus du niveau des mers (e). Observation qui réfut-

(e) Mr. le C. de Buffon convient lui-même (vol. II. p. 35.) que les sommets des plus hautes alpes qu'il ait vus, souvent à deux ou 300 toises

réfute l'hypothèse de ceux qui croient que toutes ces élévations montagneuses du globe sont l'effet du feu central & de ses explosions dans les premiers âges de la terre, lorsque la croute, qui environnait ce brasier merveilleux, n'avait encore pas assez de solidité pour résister également à un tel agent intérieur: ce qui n'aurait pu se faire, sans élever en même tems différentes couches étrangères, qui dussent se trouver perchées sur les grandes hauteurs escarpées des montagnes granitiques. Un seul exemple de cette nature prouveroit, qu'il peut y avoir des feux souterrains ou des foyers de Volcans plus bas que le granite, ou dans l'intérieur de cette roche; mais jusqu'ici on l'a cherché en vain, quoique les foyers de plusieurs Volcans éteints, qu'on a examinés de nos jours, semblent avoir été placés immédiatement sur la vieille roche.

Je tracerai ici les principales élévations de cette ancienne roche dans l'Empire russe & toute l'Asie boréale,

d 2

au-

toises en descendant, sont ordinairement composés de rochers de différentes espèces de granite, qu'il avoue dans un autre endroit ne jamais contenir de coquilles, & par là il contredit ce que nous avons cité de lui plus haut. Il n'est pas plus exact, en mettant le granite au nombre des matières arrangées par couches (vol. II. p. 27.). J'avoue que certains granites semblent entassés par couches de plusieurs pieds d'épaisseur. Mais les fêlures qui ont divisé cette roche en grandes masses parallélépipèdes, ne démontrent pas plus sa formation par le dépôt des eaux, que les articulations du basalte, ou les fentes d'une argille durcie au feu. Nous voyons une preuve illustre contre l'opinion qui met le granite au nombre des pierres en couches formées par le dépôt des eaux, dans cette roche énorme que l'AUGUSTE EMULE de PIERRE le GRAND a choisie pour soutenir le Monument de son digne prédécesseur, roche dont les dimensions primitives de 27 pieds de haut, sur 44 de long & 22 de large, ne se prêtent point à ces idées, & dont la masse solide de 5000,000 de livres ne pourra jamais être déterrée dans aucune couche de dépôt du globe.

autant que j'ai pu en acquérir de connoissances certaines par mes propres yeux , ou par des relations dignes de confiance. — Les observations des derniers voyageurs ont constaté que le Caucase , qui occupe l'espace entre la mer Caspienne & le Pont - Euxin , est une des plus hautes élévations de granite, qui existent sur notre globe, très - régulièrement accompagnée de ces bandes schisteuses qui recouvrent toujours les côtés des grandes chaines, ainsi que de montagnes secondaires & tertiaires qui les accompagnent , ainsi qu'il sera exposé dans la suite , à l'occasion des montagnes de la Sibérie. L'on a moins de connoissances précises sur les montagnes qui forment l'enceinte méridionale de la mer Caspienne. Mais à en juger par le peu que j'en ai pu apprendre , ce sont plutôt des montagnes schisteuses & calcaires , soulevées à des hauteurs considérables par l'effet des feux souterrains , qui semblent aussi avoir formé l'Ararat (peut - être continu à cette chaîne) , & qui ne sont pas encore entièrement éteints dans les montagnes de la Perse. Ce n'est qu'en passant que je parle de ces premières chaines asiatiques, pour ne point anticiper sur les détails , que nous devons en attendre de la savante plume de Mr. le Professeur *Güldenstaedt* mon Confrere. Il me sera permis d'être plus ample au sujet de celles que je connois par moi-même.

Une chaîne célèbre depuis longtems , mieux reconnue de nos jours par les fréquens établissemens métalliques qu'on y a formés & par les voyages physiques qui l'ont traversée en tout sens, c'est celle des *montagnes d'Oural* , que le respect des peuples qui l'avoisinent leur a fait appeller la Ceinture de la terre & que *Strahlenberg* donna avec raison pour limite naturelle entre l'Europe &

& l'Asie. Le granite & le quartz ne forment ici qu'une bande étroite qui va en serpentant du midi au nord. Sa plus grande largeur se trouve sur les sources du Iaik & du Bielaïa, où elle est renforcée de quelques hautes montagnes détachées de la chaîne, par lesquelles la roche granitique s'élève au milieu de la bande schisteuse, surtout du côté du couchant. Elle continue de là faiblement & en diminuant surtout de hauteur, jusqu'aux sources du Toura, souvent presque interrompue, affaïssée & recouverte par les couches schisteuses qui l'accompagnent; puis s'élargissant de nouveau, elle remplit par de très hautes montagnes l'espace entre les sources du Kama & Petchora d'un côté, & les eaux qui coulent à l'orient pour se réunir dans le Tawda (f). Enfin elle finit en décroissant,

d 3

mais

(f) L'abbé Chappe d'Auteroche a eu raison de contredire *Tsbrand Ides & Lange* par rapport à la hauteur excessive que ces voyageurs avaient attribuée à cette partie des monts Ourals, qui passe entre Solykamisk & Verkhotourie. Il est aussi excusable d'avoir supposé la Sibérie ou les plaines au-delà de ces montagnes moins élevées au-dessus de celles d'Europe, que *Strahlenberg* l'assure. Les parties boréales, par où son voyage a conduit l'Observateur françois, sont effectivement des plaines basses, couvertes de forêts & très souvent marécageuses. Mais il convient lui-même que le plan de la Sibérie s'élève vers le midi, c'est-à-dire vers les Alpes qui forment sa frontière, & puisque cette chaîne s'élargit & s'élève de plus en plus vers l'orient, l'élévation des plaines de la Sibérie y devient de même plus considérable & leur pente plus rapide; ce qui justifie l'assertion de *Strahlenberg*. Cette situation de la Sibérie en plan incliné vers la mer glaciale, son exposition aux vents de nord & de nord-est, pendant que ceux du midi sont interceptés par la grande chaîne, couverte pour la plupart de neiges continuelles, & ceux de l'ouest par la chaîne ouralique, devient une cause plus puissante pour rendre le climat de ce pays si rude, que ne le seroit l'élévation seule, ou la salinité des terres à laquelle notre Abbé voudroit entièrement attribuer la rigueur des froids qui y regnent. Je citerai, en preuve de cette assertion, les environs de la fonderie de Barnaoul sur l'Ob, ga-

mais toujours hérissée de rochers , vers les bords de la mer glaciale, où elle forme le grand Cap qui est à l'ouest du golfe de la rivière Ob , puis tourne au nord - est , le long des côtes arctiques , où par une branche marine, elle forme la Nova Semlja , & répond enfin par des côtes escarpées à la grande chaîne boréale d'Europe , laquelle ayant parcouru toute la Scandinavie en forme de fer à cheval , vient remplir de rochers granitiques & d'autres montagnes les basses terres de la Finlande , & semble d'une autre part continuer du Cap - Nord de la Norvege, par

rantis des vents du nord par une trainée de montagnes & de forêts , qui s'avancent entre le Tom & l'Ob , où toute sorte de jardinage , même les melons & les citrouilles viennent parfaitement bien en pleine terre , tandis qu'à deux degrés plus au Sud la pente des montagnes Altaïques , exposée au nord , ne produit rien ; je citerai les vallées de Sélinginsk & les environs de la rivière Abakân , fleuries au mois d'Avril au pied des montagnes , sur le nord desquelles regnent les frimats & les neiges jusqu'au mois de Juin. Une partie de notre Europe doit peut-être la douceur de son climat aux alpes de la Scandinavie & de l'Ecosse , qui détournent les vents du nord , & à ce que les glaces du nord ont un débouché libre entre l'Europe & l'Amérique , pour être entraînées par les courants vers les tropiques , de sorte que les vents du nord y sont moins refroidis & moins soutenus en été. Ce sont au contraire ces glaces renfermées par le Cap Nord & le Spitsberg , qui influent déjà sur le climat de la Russie boréale. Les déserts d'Astrakan semblent par opposition devoir l'intensité de leur été , qui y favorise jusqu'aux plantes propres à la Perse & à la Syrie , à son exposition aux vents de sud & de sud - Est & aux terres élevées qui les couvrent au nord. Ce n'est aussi précisément que les vents de nord - est & de sud - ouest réfléchis par les montagnes d'Oural & le Caucase , qui y font régner les plus fortes gelées en hiver & qui amènent la fraîcheur en été. — Je ne vois rien en tout cela qui dût nous faire recourir au feu central , si peu énergique d'ailleurs , que le profond de la mer n'en a pu être réchauffé au degré que l'est sa surface , comme les observations thermométriques , faites à différentes profondeurs , en font foi.

par la chaîne marine du Spitsberg , en remplissant peut-être d'îles & de brisants l'Océan arctique, pour se réunir par le pôle aux pointes boréales & orientales de l'Asie & de l'Amérique septentrionale : continuation qui devient probable par sa conformité aux loix que la Nature semble observer dans la continuité des chaînes montagneuses du globe , & qui rendroit très-chimériques toutes les tentatives des peuples commerçants de l'Europe, pour pénétrer par le pôle à la Chine & au Japon.

Vers le midi la chaîne Ouralique va de l'endroit où j'ai placé sa principale force , en diminuant jusqu'au delà du Jaik , pour se distribuer en petites trainées de montagnes schisteuses & de collines de l'ordre secondaire, qui se répandent entre l'est & l'ouest vers la Russie méridionale , les environs du lac Aral & les branches occidentales de la grande chaîne *Altaïque*.

Je passe à l'idée générale de cette dernière chaîne , laquelle fait partie d'un des plus puissants systèmes de montagnes qui aient été reconnus sur notre planète. La grande chaîne qui borde au midi toute la Sibérie, depuis l'Arctique jusqu'à l'Océan oriental ou la partie boréale de la grande mer , n'est qu'une des branches de ce grand système dont je donnerai l'esquisse , d'après les connoissances que j'ai pu m'en procurer , bien différente de ce qu'on en a déduit jusqu'ici. Je commencerai par remarquer que les montagnes de notre globe ne sont pas toutes distribuées par chaînes tournées en différentes directions & (selon *Bourguet*) ordinairement dans le sens de la méridienne ou de l'équateur, croisées ou cohérentes en forme de croix , de réseau , ou de côtes réunies à une épine commune. Toutes ces idées, dont la dernière est la plus familière aux Minéralogistes Suédois, sont encore calquées
sur

sur la constitution des païs où elles ont pris naissance, sans être adaptées au plan général de la Nature. Il y a des systemes de montagnes dont les branches ou chaines vont se réunir à un ou plusieurs centres rassemblés ou quelque plateau commun, qui maitrise toutes ces chaines en hauteur effective. Tel semble être ce grand assemblage de montagnes dont les raïons parcourent tout l'intérieur du continet de l'Asie en différents sens & qui en ont été le premier terrain habitable. La forme du continent de l'Afrique semble indiquer un arrangement différent de montagnes, mais l'intérieur de cette partie du monde est trop peu connu, pour pouvoir en juger avec certitude.

Pour trouver la plus grande élévation effective de l'Asie, le moïen le plus sûr & le plus ordinairement employé est de remonter le cours des grandes rivières qui se jettent dans les mers opposées & de rechercher leurs premières sources. L'Inde & le Gange, qui vont mêler leurs eaux à l'Océan Indien, & le Ghôango, qui traversant la Chine se jette dans l'Océan oriental, prennent leurs principales sources dans les effroyables groupes de montagnes au nord des Indes, dont le Tybet & le roïaume de Cachemire sont hérissés, & qui ont été célébrés par tous les voyageurs. C'est donc là le terrain le plus élevé à l'égard de toute l'Asie méridionale: c'est de là que tous ces heureux climats panchent vers le tropique & reçoivent l'influence de la zone torride par les vents du midi. C'est de là que partent les chaines de montagnes qui parcourent la Perse vers l'occident, les deux Presqu'iles de l'Inde au sud & la Chine vers l'orient. C'est dans les vallées du midi de cet ancien païs, qu'on doit chercher la première patrie de notre espece, surtout de la race des
hom-

hommes blancs (g), qui ont été de là peupler en foule
les

(g) Quoiqu'en dise Mr. de Pauw, la race des Negres n'est pas un produit si facile du climat, que lui & d'autres se l'imaginent. Les Portugais noircis en Afrique de l'Abbé Demaret ne sont pas encore clairement prouvés & pourroient bien devoir leur origine à l'incontinence physique de ces colons, & leur mélange avec les Negres du pais. Le sperme noir des derniers n'est pas mieux constaté & l'éthiops animal, dont cet auteur parle tant, n'est qu'une qualité occulte & pas une explication: aussi devroit-il être depuis long-tems détruit dans les Negres des Isles australes & de la nouvelle Guinée, qui acquierent souvent une laine roussâtre sans changer de couleur quant à la peau. Les Maures qui habitent depuis tant de siècles un climat plus ardent que mainte peuplade de Negres, conservent toujours les caracteres d'une autre race d'hommes. Comme l'Afrique n'est jointe à l'Asie par aucune chaîne de montagnes bien élevées & tout-à-fait continues, ces continents devoient, lors de la plus grande élévation des mers dans les premiers âges du monde, former deux Isles tout à fait séparées, dont la race noire peuploit l'une, transformée sous la zone torride par des influences qui agissent depuis une très haute antiquité. Il n'est point nécessaire de recourir ici à une mésalliance de l'espece humaine, comme il semble qu'il en est arrivé une pour produire les montagnards longimanes ou Quimos du Madagascar, si toutefois il en existe. On pourroit avancer que la race des hommes noirs forme la tige primitive de l'espece & que la blanche n'est qu'une dégénération; puisque les animaux & oiseaux noirs changent souvent au blanc, & presque jamais les blancs au noir; mais la production des Negres blancs, tandis qu'il ne naît point de noirs, mais bien une espece d'Albinos, & quelques sujets tachetés de parents blancs ou balancés, prouveroient contre cette opinion. D'ailleurs les oiseaux de couleurs claires, mais bigarées, varient de même au noir, & il naît de véritables Negres parmi les lièvres du nord & les Ilatis, dont la robe incline d'ailleurs au blanc tellement, que la plupart de ces animaux blanchissent en hiver. Je ne puis m'empêcher de faire remarquer ici, que tous les animaux, qui sont devenus domestiques dans le nord aussi bien que dans le midi, se trouvent originairement sauvages dans le milieu tempéré de l'Asie, à l'exception du Dromadaire, dont les deux races ne viennent bien qu'en Afrique, & se familiarisent difficilement avec le climat d'Asie. La patrie primitive du Taureau sauvage, du

les heureuses contrées de la Chine, de la Perse & sur-tout de l'Inde, ou de l'aveu de tout le monde habitent les

Bulle, du Mouflon qui a produit nos Brebis, de la Chevre à bézoard & du Bouc-étain qui se sont mêlés pour produire la race métive de nos Chèvres domestiques, est dans les chaines montagneuses, qui occupent le milieu de l'Asie & une partie de l'Europe. Le Renne abonde & sert de bétail dans les hautes montagnes qui bordent la Sibérie, & qui remplissent son extrémité orientale; il se trouve aussi dans la chaîne ouralique jusqu'au 56e. degré, d'où il a été peupler les terres arctiques. Le Chameau à deux bosses subsiste sauvage dans les grands déserts entre le Tybet & la Chine. Le Sanglier occupe les forêts & les marais de toute l'Asie tempérée. L'on connaît assez le Chat sauvage, duquel la race domestique est issue. Enfin la tige principale du Chien domestique dérive très-certainement du Chakal, naturellement peu craintif de l'homme, susceptible d'attachement & même (selon *Chardin*) d'instruction, & sympathisant avec le Chien berger, ainsi que nous l'avons vu dans celui qui nous fut amené de Perse il y a deux ans. Je ne crois pourtant point, que la race de nos chiens soit pure, mais je la suppose croisée, de tems immémorial, avec le Loup ordinaire, le Renard & peut-être l'Hyène même, d'où nous est venu cette immense variété dans les formes & la grandeur des Chiens: la plus grande variété, venue de l'Inde du tems d'Alexandre, étant probablement le produit de l'Hyène. Le Chakal qui est d'une taille moyenne entre ces especes voisines, devint, dans l'état domestique, d'autant plus propre à s'accoupler & à produire avec des individus apprivoisés des autres especes. — Il n'est pas douteux qu'une telle production ne puisse avoir lieu, puisque sous des circonstances favorables le chien, tel qu'il est aujourd'hui, a produit avec le Loup en Angleterre (voy. *Pennant synops.* p. 144 *) & avec le Renard en Meklenbourg (voy. *Zimmermann specim. Zoologiae geographicae* p. 471.): pour ne rien dire des Chiens-loups de anciens, &c. Tous ces animaux assujettis à l'homme, étant originaires de l'Asie tempérée, semblent prouver que le plateau de ce continent était aussi la première patrie du dernier. Le hasard peut avoir transféré notre race en Afrique, dans un âge, où les plateaux de ce continent étaient encore séparés de l'Asie par de grands intervalles de mer: & ce nouveau séjour étant tout entier dans la Zone torride, l'influence d'un climat aussi brûlant pendant une suite de

les nations les plus anciennement cultivées de l'univers, & où peut-être l'on doit chercher les racines des langues primitives de l'Asie & de l'Europe. Le Tybet même, la plus haute contrée de l'Asie, dont les habitants se disent issus d'une race de Singes aborigènes, auxquels d'ailleurs ils portent quelque ressemblance, n'a été (selon leurs traditions) policé que par des instructeurs venus de l'Inde & n'en étoit peut-être qu'une colonie échappée dans les premiers âges de la vie sauvage, ainsi que la plupart des peuples de l'Asie, les colonies de l'Europe & les habitants de tant d'Isles au midi de l'Asie.

De l'autre côté en recherchant l'origine des grands fleuves, qui traversent la Sibérie pour mêler leurs eaux à la mer arctique, des rivières qui se réunissent à l'Amour pour se rendre à la partie boréale de la grande mer & des eaux qui découlent à l'occident vers les grands bassins du desert de la Tatarie, dont le lac Aral est le plus considérable, on rencontre au dessus des sources de ces fleuves la suite des *montagnes Altaïques*. Tous les Asiatiques Nomades conviennent, que la partie la plus élevée des alpes de l'Asie septentrionale est à la montagne appelée *Bogdo* (Souveraine), qui faisoit la séparation naturelle entre les Hordes ennemies des Calmoucs & des Mongols. De cette montagne, dont les pics s'élèvent

e 2

fort

siècles, dut bien faire changer de complexion à ces hommes transplantés. Tandis qu'en Amérique, où d'ailleurs l'espèce humaine semble moins anciennement établie, des situations tout aussi ardentes n'ont pu produire autant d'effet, par la raison peut-être que les hommes y trouvant une chaîne étendue du midi au Nord, pouvaient successivement changer de climats ou mêler leurs races nées en différentes latitudes, & par-là tempérer l'effet de la Zone torride.

fort au - dessus des neiges & de toutes les autres montagnes de l'Asie boréale, partent deux grandes & deux moyennes chaines, comme d'un centre commun. Celle qui va au Sud, sous le nom de *Moussart*, se réunit aux montagnes du Tybet; une moindre chaîne, qui porte le nom d'*Alak* (*h*), va à l'occident se distribuer entre le désert des Tartares independans & la Boukharie, communique par des chaines secondaires avec les extrémités des monts Ourals & la grande montagne (*Ouloû - taoû*) qui occupe le milieu de la Tatarie déserte & se perd enfin vers les montagnes de la Perse. Une troisieme chaîne, sous le nom de *Khanghai*, va droit à l'orient entre le pays d'Ortoûs ou de Barkôl & la Mongalie, remplit celle-ci de rochers & de hautes montagnes, separe sous le nom changé de *Kinghan* les eaux de l'Amur d'avec celles du Ghôango ou fleuve jaune, & finit enfin par la chaîne détournée, qui forme la Corée & par les brisants & les Isles situées vers le Japon.

La quatrieme chaîne enfin, & la continuation principale, est celle qu'on connoit proprement sous le nom d'*Altai* & qui forme la frontiere de la Sibérie depuis l'Irtiche jusqu'au fleuve Amûr. Sa plus grande élévation est située hors de la domination Russe. Elle va d'abord, depuis la haute montagne de Boghdo, passer au - dessus des sources de l'Irtiche & s'avance, par une branche toute remplie de montagnes de neige extrêmement rapides & rompues, entre l'Irtiche & l'Ob, où les montagnes schisteuses du second ordre, qui l'entourent & qui y sont en quel-

(*h*) Alac - oula selon les Calmoucs, Ala - taoû d'après les Tatares, signifie montagne ou chaîne bigarrée, nom qui est dû à l'apparence qu'elle présente par ses montagnes entrecoupées de vallées profondes & nombreuses. Les mots de *Khanghai* & de *Kinghan* signifient : chaîne de montagne par excellence.

quelques endroits percées par des élévations du granite, forment le département des mines le plus important de l'Empire Russe, qui fournit aujourd'hui des richesses immenses en argent aurifère, qui en promet de plus grandes pour l'avenir, & qui fera inépuisable pour les mines de cuivre, quand on voudra les exploiter. D'ici la grande chaîne va toucher au lac Téletzkoi, ou Altân-koul, d'où le fleuve Ob prend sa source par le confluent de plusieurs rivières & torrens. Elle semble ensuite s'éloigner pour embrasser & réunir les grandes rivières qui composent le Jéniseï, toutes enclavées dans ces hautes montagnes, lesquelles y prennent le nom de Saïanes & continuent sans la moindre interruption vers le lac Baïkal. Quoique ce premier rang de montagnes granitiques, dont je viens de rapporter la suite & qui forment les limites naturelles de la domination Russe, soit extrêmement élevé, même au point, que la cime & la croupe de quelques unes donne dans la région des neiges; l'on voit cependant par le cours des rivières qui composent le Jéniseï & le Sélinga, que le plan général du terrain va en haussant au-delà de cette chaîne, & il se trouve effectivement au-dessus des sources de ces rivières, outre l'élévation générale du terrain, une chaîne plus haute, parallèle à la première, qui provient de la réunion d'une branche principale du *Khanghais*, & va en partie se jeter entre les sources du Tchikôi & des fleuves qui forment le système de l'Amur, d'où elle produit, en s'unissant à l'épanchement de la première branche, qui environne tout le système du lac Baïkal, la dernière continuation de cette puissante chaîne, qui parcourt l'extrémité orientale de l'Asie, & dont nous dirons un mot, après avoir considéré l'espace, qui se trouve entre les grandes chaînes que nous venons d'exposer & les hautes alpes du Tybet.

Par les rapports de voyageurs, surtout de ceux qui ont souvent accompagné les caravanes Russes destinées pour Pékin, il est hors de doute, que cet immense désert, qui s'étend de Nertchinsk sous le nom de *Gobée* ou de *Cha-mo* n'est véritablement qu'un plateau des plus élevés, auquel nous ne connoissons que la seule plaine de Quito de comparable (i). Une grande partie des plaines de la Mongolie entre la chaîne Altaïque, & celle que j'ai nommé Khanghaï, de même que les petites plaines ou vallées qui se trouvent au milieu de ces chaînes en différents endroits, sont à peu près à la même élévation au-dessus du niveau de la mer & des plaines. Ceux qui font le voyage de Peking, voyent sensiblement le pays s'élever depuis la frontière de Selenginsk, dont le territoire est déjà fort haut, jusqu'à la montagne Khàn-oula; on trouve alors les pentes fort roides de cette montagne à surmonter, & l'on entre enfin, presque sans descendre, dans la vaste plaine de la Gobée, où l'on ne trouve plus qu'un sol uni sans arbres, avec des collines peu sensibles, quelques lacs sales, & très-peu de sources, qui se perdent dans le gravier, jusqu'à ce qu'on descende par des gorges de montagnes, & des pentes fort rapides vers la grande muraille, d'où tout le pays s'incline encore sensiblement jusqu'aux plaines de Peking. C'est aussi sur de semblables plans élevés, couverts de gravier & de cailloux, parmi lesquels il se trouve de belles pierres colorées, — sur de telles plaines, qui vraisemblablement sont

nées

(i) L'Afrique doit avoir à son centre des contrées tout aussi élevées, entourées & croisées de montagnes, qui ont dû servir, comme ces plateaux de l'Asie & de l'Amérique, de pépinière à la création organique. Aussi trouve-t-on une infinité d'espèces d'animaux toutes particulières à l'Afrique, & qui ne sont encore point répandues en Asie par les mêmes climats, & *vice versa*.

nées par la dégradation & l'affaîssement de la vieille roche, que sont situés les grands lacs Balkhache, Lop, & le Koko-nour, ainsi qu'une infinité de réservoirs plus petits, qui concentrent quelques ruisseaux des montagnes qui les environnent & empêchent la décharge de leurs eaux.

L'étonnante élévation de tous ces déserts n'est pas seulement prouvée par la gradation des chaines de montagnes qui entourent tout le milieu de l'Asie d'où découlent les grands fleuves distribués par ce continent, bien - au dessous desdites plaines, quoiqu'assés au-dessus du niveau des mers, pour déterminer leur long cours par la pente des continents; elle l'est encore par les observations barométriques des Missionnaires Jésuites & d'autres Voyageurs, qui s'y sont trouvés, ainsi que par le froid qui y regne, même en été, sous une situation si heureuse. D'ailleurs toutes les plus basses vallées de montagnes qui forment pour ainsi dire les bords & les gradins de cette immense hauteur, démontrent l'élévation de leur position, par des arbrisseaux rabougris & rampants, & par leurs autres productions végétales. Il n'est que trop connu, pour que j'aie besoin de le répéter, que les plantes alpines d'Europe croissent en Sibérie dans les plaines & les vallées, surtout où l'on approche de la grande chaine. Une circonstance plus remarquable encore est, que ce n'est qu'aux environs de la chaine altaïque, que commencent les belles plantes & les beaux arbrustes particuliers à la Sibérie & tant recherchés des connoisseurs étrangers. Plusieurs animaux, ennemis des plaines & par conséquent moins enclins à se répandre, comme le Busle à queue de cheval, le Tygre, la Zibeline, le Putois roux, le Portemusc, le Lapreau de roche &c. sont restés dans ce centre montagneux de l'Asie. — Ce n'est point dans ces pais élevés qu'il faut chercher des preuves de l'affertion

tion

tion du Philosophe *Bourguet*, renouvelée par Mr. le Comte de *Buffon*, sur les angles correspondans des montagnes ; qui d'ailleurs souffre bien des exceptions dans les chaines granitiques, & même souvent dans les montagnes des ordres secondaires.

Voilà donc une grande étendue de país croisés & heriffés de montagnes, qui se trouve infiniment au - dessus des plaines du continent, située sous des paralleles assés variées pour que les productions du nord & du midi y aient pu trouver, dans les premiers âges du monde, les sites propres pour leur végétation ou pour leur vie. Si l'on suppose (comme il n'y pas lieu d'en douter raisonnablement) que le niveau des mers étoit anciennement assés élevé, pour couvrir les couches horizontales des continents, que nous trouvons aujourd'hui remplies de productions marines : le centre de l'Asie aura donc formé une grande Isle entourée de montagnes & formant autant de grands Caps & de chaines marines, qu'il part de branches montagneuses de son centre. En supposant de plus, qu'au commencement ce plateau n'eut été que de granite tout nud : la décomposition, que cette roche éprouve journellement par les influences météoriques, devoit bientôt produire des amas de gravier (*k*), de roche pourrie & de limon qu'on

(*k*) Il est difficile à croire, qu'aucun sable ait jamais été produit par une précipitation des eaux de la mer, ainsi que quelques modernes, & surtout Mr. le Chevalier de *Linné* l'ont soutenu. Je suis entièrement du sentiment des anciens, que tout sable doit son origine à la décomposition des pierres, mais surtout du granite. L'énorme quantité de cette matiere sur notre globe, répond assés à l'universalité probable du granite dans son intérieur ; & certainement les couches de sables & de grais profondes & très-anciennes, ne peuvent être dérivées, que de la décomposition du granite dans les premiers âges. Le granite formant une

qu'on voit dans les alpes être extrêmement fertiles pour la production de toutes sortes de végétaux.

La

grande partie du fond de la mer , doit continuellement y subir une décomposition , d'autant plus facile à la faveur des sels qu'elle tient en dissolution , ce qui approfondit naturellement les bassins de l'Océan , en le rendant la source la plus féconde des sables , que les flots amènent vers les côtes , & que les vents distribuent dans les terres. Le P. *Frifi* , qui prend les cailloux roulés , le gravier & le sable pour des ingrédients primordiaux de notre sphere , parceque le froissement de différentes pierres , dans ses expériences , ne lui a jamais donné de produits qui leur ressemblent , n'a pas pensé à cette décomposition naturelle de la plupart des granites. Chaque ravin ou lit de rivière semé de cailloux roulés devoit pourtant le convaincre de l'action des eaux sur les pierres détachées. Les grands sables méditerranées de la Numidie & de la Tartarie , qu'il allègue en preuves contre l'origine marine du sable , ont jadis été en partie couverts par la mer , ainsi que je l'ai prouvé dans le II^{me} volume de mes Voyages à l'égard de la bande sablonneuse qui occupe le milieu du désert entre le Volga & le Jaïk. La décomposition des montagnes granitiques & spathenses de Selenginsk , dont dérivent les sables des environs du Selenga , sont une preuve de la naissance de cette matiere dans les lieux méditerranées , que j'ai exposé dans le même Volume. La chaîne granitique de la Sibérie semble même , à cause de la facilité de sa roche à se détruire , avoir beaucoup perdu de sa hauteur , vis-à-vis du Caucase & des alpes d'Europe. Presque toutes les montagnes granitiques de la Sibérie semblent composées de masses pour ainsi dire entassées , arrondies par la défaillance , & qui présenteroient aux peintres & aux poètes les plus belles scènes des travaux des géants de l'antiquité , entassant des montagnes pour donner assaut aux cieux ; & c'est des masses granitiques ainsi détachées qui ont paru merveilleuses à *Bourguet* (p. 245). Mr. le Comte de *Buffon* (hist. nat. II. p. 31) donne l'explication de l'origine de ces masses de roche vive ou de granite , qu'on voit éparfes sur les plus hautes montagnes , en les faisant naître dans les lits de sable , que les eaux ont par la suite entraîné , sans entamer la partie métamorphosée en roc. Comment ce grand Naturaliste , s'il a fait cette observation par lui-même , n'aperçut-il pas , que ces noyaux de roche , qui forment le sommet & les pointes saillantes

La chaîne, que nous avons dit s'insinuer entre les origines des fleuves Onon & Ingoda & celles du Tchikoi & qui est accompagnée de fort hautes montagnes, continue sans interruption au nord-est, & séparant les eaux de l'Amur, d'avec celles du Lena & du Lac Baïkal; elle jette une branche de montagnes la plupart schisteuses le long du fleuve Olecma, qui traverse le Léna au dessus de la ville de Jakoutsk & continue entre les deux Toun-gouska jusqu'au delà du Jéniseï, où elle se perd dans les plaines marécageuses & couvertes de forêts qui occupent tout l'espace entre ce fleuve & la chaîne Ouralique. Plus loin la chaîne principale, très herissée de rochers, s'approche des côtes de la mer d'Okhozk, qu'elle cotoie de fort près, en passant sur les sources des rivières Oûth, Aldan & Maïa & finit en se distribuant par branches, qui se rangent entre les fleuves les plus orientaux de la mer glaciale, outre deux branches principales, dont l'une tourne au Sud, parcourt tout le Kamtchatka, en s'unissant à la grande chaîne

des montagnes, sont eux-mêmes la source du sable, qu'ils produisent de leurs surfaces, en se météorisant? Il observe lui-même, que dans le granite & le grais il ne se trouve point de coquilles, quoiqu'il y en ait dans les sables, dont il croit que ces roches tirent leur origine (vol. I, p. 406). Au lieu de reconnoître en cela une preuve, que ce n'est pas le granite, qui naît du sable, mais que celui-ci est une décomposition postérieure au premier, il suppose, que le sable ne sauroit se pétrifier, qu'autant qu'il est pur. Le célèbre *Wallerius* (mineral. vol. I, p. 426.) convient que le sable contient tous les élémens du granite, le Quarz, le Feldspat, le mica: il observe très judicieusement, que les immenses masses de granite ne sauraient devoir leur origine au sable. La décomposition du granite est sûrement avancée par quelque principe salin, surtout dans celui de Finlande & de Sibérie. La salure des eaux & du sol dans tous les plateaux de l'Asie ne peut être attribuée qu'à ce principe du granite, qui peut aussi avoir contribué à la première salure de mers.

chaîne marine des Isles Kouriles vers le Japon , & donne à cette presqu'isle des côtes escarpées à l'est , qui correspondent à une autre chaîne marine , formée par les Isles nouvellement découvertes , laquelle se signale , ainsi que la première & le Kamtchatka même , par des Volcans très puissants & de fréquents vestiges du feu souterrain , dont on ne voit presque plus de traces dans les montagnes méditerranées de la Sibérie (1). L'autre branche principale fournit le grand Cap des Tchoukches avec ses promontoires & côtes brisées , qui correspondent par les Isles dites de St. Andrien , à une chaîne qui se termine à la

f 2

pointe

(1) Je parle de ces traces évidentes de Volcans , où l'on distingue les cratères , les laves , les pierres poncees , &c. telles qu'on en découvre en différentes parties de l'Europe. Cela ne m'empêche point de croire que toute la bande schisteuse & métallique de la Sibérie ait senti les effets de Volcans , dont le tems peut avoir détruit les traces évidentes. Les hautes montagnes de *Pouldingues* ou *Brèches* , qui composent une grande partie de la côte septentrionale de ce goufre , que forme aujourd'hui le lac Baykal , — peut-être aussi le terrain des mines d'or aux environs de Cathérinenbourg , indiquent de semblables efforts de la nature , & présentent en même tems le caractère de la plus haute antiquité. Peut-être parviendra-t-on à découvrir en d'autres endroits de la Sibérie quelques vestiges plus récents & plus reconnoissables d'anciens Volcans. *Strahlenberg* a parlé de pierres poncees , qui devaient se trouver aux environs du Jéniseï ; mais les scories des travaux des anciens mineurs lui en ont imposé. J'ai cherché en vain les traces de Volcans le long de cette rivière ; surtout aux environs de la montagne , où j'ai découvert cette masse de fer naturellement malléable , intimement mêlé & comme patri d'une matière vitreuse , jaune & transparente , laquelle est déposée dans le Cabinet de l'Académie , & dont la production devient problématique 1°. par sa grandeur , qui étoit de plus de 1600 livres ; 2°. par la pureté & la ductilité du fer qu'elle contient , son alliage intime avec la matière vitreuse ; & 3°. une écorce , qui est de la nature des mines de fer , & qui semble avoir revêtu toute la masse.

pointe opposée de l'Amérique, & dont la direction, parallèle (autant qu'on en est instruit) au gissement de la côte de ce continent, c'est à dire tirant du nord-ouest au sud-est, détruit jusqu'à la vraisemblance des découvertes paradoxes connues sous les noms de *de Fouca* & *de Fonte* (m). Il est pourtant certain que malgré cette correspondance des pointes septentrionales, la distance entre les deux continents est un peu plus considérable qu'on ne l'avoit supposée, quoique bien moins de ce que désireroient les partisans de la navigation au nord-est.

J'ai déjà dit, que *la bande de montagnes primitives schisteuses* hétérogenes, qui par toute la terre accompagne les chaînes granitiques, & comprend les roches quarzeuses & talqueuses mixtes, trapézoïdes, serpentines, le schiste corné, les roches spathiques & cornées, les grais purs, le porphyre & le Jaspe, tous rocs fêlés en couches ou presque perpendiculaires ou du moins très rapidement inclinés (les plus favorables à la filtration des sources) semble aussi bien que le granite, antérieure à la création organisée. Une raison très forte pour appuyer cette supposition, c'est que la plupart de ces roches, quoique lamelleuses en façon d'ardoise, n'ont jamais produit aux curieux la moindre trace de pétrifications ou empreintes de corps organisés. S'il s'en est trouvé, c'est apparemment dans des fentes de ces roches, où ces corps ont été apportés par un déluge & encastrées après dans une matière infiltrée; de même qu'on a trouvé des restes d'Éléphants dans le filon de la mine d'argent du Schlangenberg. Les caractères

(m). Pour faire place à ces prétendues découvertes, Mr. Binckley fait tourner les chaînes de montagnes de l'Amérique d'une manière contraire à la vraisemblance & dont il y a très peu d'exemples sur toute la surface du globe.

caractères , par lesquels plusieurs de ces roches semblent avoir souffert des effets d'un feu très violent, les puissantes veines & amas des minéraux les plus riches, qui se trouvent principalement dans la bande qui en est composée , leur position immédiate sur le granite & même le passage, par lequel on voit souvent en grand changer le granite en une des autres espèces ; tout cela indique une origine bien plus ancienne & des causes bien différentes de celles, qui ont produit les montagnes secondaires.

On entrevoit de certaines loix , à l'égard de l'arrangement respectif de cet ordre secondaire d'anciennes roches , par tout les systèmes de montagnes qui appartiennent à l'Empire Russe. La chaîne Ouralique, par exemple , a du côté de l'orient sur toute sa longueur une très grande abondance de schistes cornés, serpentins & talqueux, riches en filons de cuivre , qui forment le principal accompagnement du granite ; & en Jaspes de diverses couleurs , plus extérieurs & souvent comme entrelacés avec les premiers , mais formant des suites de montagnes entières & occupant de très grands espaces. De ce même côté il y paroît beaucoup de quartz en grandes roches toutes pures , tant dans la principale chaîne , que dans le noëau des montagnes de Jaspe & jusques dans la plaine. Les marbres spateux & veinés percent en beaucoup d'endroits. La plupart de ces espèces ne paroissent point du tout à la lisière occidentale de la chaîne , qui n'est presque que de roche mélangée , de grais solide , de schistes argilleux , alumineux , phlogistiques &c. Les filons des mines d'or mêlées , les riches mines de cuivre en veines & chambrées , les mines de fer & d'aimant par amas & montagnes entières , sont l'appanage de la bande schisteuse orientale ; tandis que l'occidentale n'a pour elle que des

mines de fer de dépôts & se montre généralement très pauvre en métaux. Le granite de la chaîne qui borde la Sibérie est recouvert, du côté que nous connoissons, de roches cornées de la nature des pierres à fusil, quelque fois tendant à la nature d'un grais fin, & de schistes très métallifères de différente composition. Le Jaspe n'y est qu'en filons, ou plans obliques isolés, ce qui est très rare pour la chaîne Ouralique, & s'observe dans la plus grande partie de la Sibérie, à l'exception de cette partie de sa chaîne, qui passe près de la mer d'Okhotsk, où le Jaspe forme derechef des suites de montagnes, ainsi que nous venons de le dire des monts Ourals; mais comme cette roche tient ici le côté méridional de la chaîne Sibérienne & que nous ne lui connoissons point ce côté sur le reste de sa longueur, il se pourroit, que le Jaspe y fut tout aussi abondant. Il faudroit au reste bien plus de fouilles & d'observations pour établir quelque chose de certain sur l'ordre respectif qu'observent ces roches.

Nous pourrions parler plus décisivement sur les *montagnes secondaires & tertiaires* de l'Empire, & c'est de celles-là, de la nature, de l'arrangement & du contenu de leurs couches, des grandes inégalités & de la forme du continent d'Europe & d'Asie, que l'on peut tirer avec plus de confiance quelques lumières sur les changemens arrivés aux terres habitables. Ces deux ordres de montagnes présentent la chronique de notre globe la plus ancienne, la moins sujette aux falsifications & en même tems plus lisible que le caractère des chaînes primitives; ce sont les archives de la Nature, antérieures aux lettres & aux traditions les plus reculées, qu'il étoit réservé à notre siècle observateur de fouiller, de commenter & de mettre au jour, mais que plusieurs siècles après le notre n'épuisèrent pas.

Dans

Dans toute l'étendue des vastes dominations Russes, aussi bien que dans l'Europe entière, les observateurs attentifs ont remarqué, que généralement la bande schisteuse des grandes chaînes se trouve immédiatement recouverte ou cottée par la *bande calcaire*. Celle-ci forme deux ordres de montagnes, très différentes par la hauteur, la situation de leurs couches & la composition de la pierre calcaire qui les compose, différence, qui est très évidente dans cette bande calcaire qui forme la lisière occidentale de toute la chaîne Ouralique & dont le plan s'étend par tout le plat pays de la Russie. L'on observeroit la même chose à l'orient de la chaîne & dans toute l'étendue de la Sibérie, si les couches calcaires horizontales n'y étoient recouvertes par les dépôts postérieurs, de façon qu'il ne paroît à la surface que les parties les plus saillantes de la bande (n) & si ce pays n'étoit trop nouvellement cultivé &

-
- (n) Ceci donne en même tems l'explication, pourquoi les pétrifications marines sont si rares par toutes les plaines de la Sibérie & ne se trouvent abondamment, que vers les côtes de la Mer glaciale, où les couches horizontales, calcaires & glaiseuses, sont à découvert? — pourquoi l'on ne trouve point de craie en Sibérie, & par quelle raison les pierres à fusil, si communes en Russie & en Europe, y sont d'une rareté extrême? Bien des observations m'ont convaincu, que ces derniers sont un produit de l'argille, qui se trouve prise dans les lits calcaires ou ferrugineux. J'ai entr'autres trouvé des masses de pierre à fusil toutes criblées de canaux, qu'on ne sauroit méconnoître pour être faits par les larves de la Mouche-éphémère. J'ai vu en quelques endroits toutes les gradations d'argille noire durcie jusqu'à la nature de pierre à fusil. J'ai des masses de ces pétrifications, appelées Fongites, très communes chez nous dans les champs semés de ces cailloux & qui sont une espèce de Millepore sphérique, dont l'extérieur se trouve parfaitement agassé, tandis que tout l'intérieur est friable & calcaire. Ces Fongites agassés peuvent se tailler en plaques à points transparents ou même criblées de petits pores. Quelques pierres à fusil d'Europe, qui se détreussent à l'eau & acquièrent un enduit

& trop peu exploité par des fouilles & autres opérations, que des hommes industrieux ont pratiquées dans les pays anciennement habités. Ce que je vais exposer sur les deux ordres de montagnes calcaires se rapportera donc principalement à celles qui sont à l'occident de la chaîne ouralique.

Ce côté de la dite chaîne consiste sur cinquante à cent Verstes de largeur, de roche calcaire solide, d'un grain uni, qui tantôt ne contient aucune trace de productions marines, tantôt n'en conserve que des empreintes aussi légères qu'éparses. Cette roche s'élève en montagnes d'une hauteur très considérable, irrégulières, rapides & coupées de vallons escarpés. Ces couches, généralement épaisses, ne sont point de niveau, mais très inclinées à l'horizon, parallèles pour la plupart à la direction de la chaîne, qui est aussi ordinairement celle de la bande schisteuse; — au lieu que du côté de l'orient les couches calcaires sont très souvent au sens de la chaîne en direction plus ou moins approchante de l'angle droit. L'on trouve dans ces hautes montagnes calcaires de fréquentes grottes & cavernes très remarquables, tant par leur grandeur, que par les belles congélations & cristallisations stalactiques dont elles s'ornent. Quelques unes de ces grottes ne peuvent être attribuées qu'à quelque bouleversement des couches; d'autres semblent devoir leur origine à l'écoulement de sources souterraines qui ont amolli, rongé & charrié une partie des couches qui en étoit susceptible.

En

crétacé, dérivent probablement d'une argille calcaire. On n'en trouve en Russie de semblables, que dans les montagnes crétacées de la Russie méridionale.

En s'éloignant de la chaîne, on voit les couches calcaires s'aplanir affés rapidement, prendre une position horizontale & devenir abondantes en toutes sortes de coquillages, de madrépores & d'autres dépouilles marines. Telles on les voit partout dans les vallées les plus basses qui se trouvent aux piéds des montagnes (comme aux environs de la rivière Oufa); comme telles occupent-elles aussi toute l'étendue de la grande Russie, tant en collines, qu'en plat-pais: solides tantôt & seulement semées de productions marines, tantôt toutes composées de coquilles & madrépores brisées, & de ce gravier calcaire, qui se trouve toujours sur les parages où la mer abonde en pareilles productions; tantôt enfin dissoutes en craie & en marnes & souvent entremêlées de couches de gravier & de cailloux roulés.

Aussitôt que des marais de l'Ingrie, qui forme vers la Baltique une espece de golfe en basses terres, l'on commence à monter vers le terrain élevé de la Russie, dont la pente fait ce qu'on appelle communement montagnes de Valdaï, l'on ne cesse de rencontrer à chaque pas les anciennes traces de la mer; d'abord dans un terrain coupé de ravines, qui a visiblement souffert d'une inondation de la plus grande violence ou plutôt par l'écoulement d'une énorme masse d'eau; puis dans les couches calcaires entières, qui ne peuvent être dues qu'au dépôt d'une mer tranquille, & que les traces des rivières ont mis à découvert. Ce sont en premier lieu des couches de terres de dépôts, semées de blocs de granite détachés de leur roche originaire; ce sont des bancs immenses de cailloux roulés & de gravier, mêlés de fragmens de pierre calcaire, de pétrifications brisées ou changées en pierres à fusil, d'ossements même. Un semblable bouleversement

des couches originaires , & surtout des bancs calcaires , a été observé jusqu'aux environs du lac Onega où commencent à s'élever les montagnes continuées aux Alpes Laponnes & Suédoises. On l'observe dans toutes les terres voisines du golfe de Finlande , où pour la plupart les couches moins solides sont emportées de dessus la vieille roche , trop solide elle-même pour être entamée ; il suffit de jeter un coup d'oeil entendu sur la Carte , pour voir dans ce nombre de grands lacs entre ce golfe & la mer blanche , dans les isles , les écueils & les côtes brisées de ces parages , l'effet d'un deluge qui s'est écoulé par là. La conclusion de ce mémoire fera entrevoir , que la Baltique & la Mer blanche , ces grandes brèches du continent , pourroient elles-mêmes être regardées comme excavées par cette même violence.

Plus avant dans les terres , où les couches calcaires n'ont point été dérangées , l'observateur trouve partout la conviction la plus complète que ces couches , tantôt peu profondes , tantôt accumulées en bancs qui forment des collines isolées ou cohérentes par petites chaînes , aussi bien que la *couche glaiseuse* , qui se trouve généralement au dessous du plan calcaire & tout aussi abondante en productions marines , ont formé l'une & l'autre dans les premiers âges du globe le fond d'une mer profonde , qui ne sauroit avoir produit ces dépôts , originairement marins & sans aucun mélange de restes d'animaux terrestres , que pendant une longue suite de siècles. C'est surtout la couche *glaiseuse* , dont la profondeur chés nous n'est pas explorée & qui me semble continuée à une partie de la bande schisteuse des hautes chaînes , qui doit avoir coûté bien des siècles à la nature & qui prouve par ses pétrifications que la mer doit l'avoir couvert à une très grande

grande profondeur (o). Ce même lit glaiseux est le dépôt le plus général & le plus riche des pyrites, qui doivent par la décomposition putréfactive d'une immense quantité d'animaux marins, de poissons, de zoophytes & de varecs, qui en contiennent les principes, s'engendrer dans tous les gouffres de l'Océan, puisqu'on en trouve des coquilles incrustées & cimentées, & des masses, dont la configuration ne peut être attribuée qu'au mouvement des ondes. L'abondance de ces Pyrites dans certaines glaises noires & ardoisées est si prodigieuse, qu'on les voit par fois surpasser en masse la glaise qui les contient. Mais cette abondance d'un minéral inflammable par l'humidité, jointe aux puissantes couches de schistes bitumineux & charbonneux qui se trouvent ordinairement stratifiés dans le même lit d'argille, ne laisse aucun doute sur la déri-

g 2

vation

-
- (o) Il est très-probable que les Ammonites & les Bélemnites, dont nous ne connoissons pas encore les originaux, ne nous sont restés inconnus qu'à cause qu'elles ne sauroient vivre qu'à de grandes profondeurs. Leur abondance dans les lits de glaise, inférieurs aux couches calcaires, en font une preuve indirecte. On a souvent agité la question, pourquoi les pétrifications qu'on trouve dans les montagnes calcaires de l'Europe sont pour la plupart originaires des mers des Indes? Cette supposition elle-même paroît fautive. Les productions que l'on croit particulières aux mers éloignées sont pour la plupart les mêmes dans les mers du Nord, mais n'y viennent partout que dans les abîmes, parceque leur existence semble demander la pression d'une grande masse d'eau. Telles sont entr'autres les Anomies (dites aussi Poules & Becs de perroquets,) les Palmiers de mer ou Encrines. La Méditerranée d'ailleurs produit dans ses abîmes la plupart des productions entassées dans nos couches calcaires. La raison, pourquoi la Mer du nord nous en fournit si peu, pourroit être son atterrissement par le déluge dont nous parlerons après & dont le peu de profondeur de ces mers à de grandes distances de terre est la suite, qui les rend en même tems si peu fertiles en coraux, lesquels demandent un fond de roche à des profondeurs considérables, & par cette raison ne manquent pas à la mer de Norvege.

vation des incendies volcaniques , surtout celles qui arrivent dans le bassin des mers , de ce même lit : théorie trop bien appuyée par les meilleures observations de différens pays , pour la mettre au rang des hypothèses.

De la considération de ces couches , calcaire & argilleuse , il suit , que toutes les terres qui devoient être un jour la patrie d'une puissante nation , la pépinière de héros , le dernier asile des sciences & des arts , le champ pour opérer des prodiges au génie vaste & créateur de PIERRE LE GRAND & à L'AUGUSTE CATHERINE SECONDE pour devenir son illustre émule en rendant heureux des millions de sujets & en se faisant admirer des peuples de la terre , — que toutes ces plaines de la grande Russie étoient jadis — fond de l'Océan. — J'ai de plus avancé , à l'égard des chaînes granitiques & des plateaux formés par la vieille roche , que la mer , dont on n'y voit aucune trace , ne peut jamais les avoir surmontés , comme Mr. le Comte de Buffon le pense. Mais ces plateaux & ces hautes chaînes ont toujours été isles & continens , bien moins étendus que ceux d'aujourd'hui , mais habitables aux animaux & végétaux terrestres. Reste à trouver les causes qui ont fait baisser le niveau des mers au point de découvrir cette grande étendue de terre , qui forme aujourd'hui les plaines des continens ; qui ont mis à sec ces bancs énormes de coquilles marines , & qui en ont pu élever une partie en hautes montagnes , dont l'élevation est trop prodigieuse , pour admettre qu'elles aient été formées telles sous les ondes d'une mer primitive. Je crois qu'il faut combiner les effets successifs de volcans & d'autres forces souterraines , avec ceux d'un déluge , ou de plusieurs de ces débordemens de l'Océan , pour donner des raisons probables des changemens arrivés indubitable-

tablement sur notre terre. Il faut réunir plusieurs hypothèses modernes, mais non pas s'attacher à une seule cause, comme ont fait presque tous les auteurs des différentes théories du globe.

Mais avant de donner l'idée d'une telle hypothèse composée, qui semble conduire à l'explication de tout ce qu'on observe de plus étonnant dans l'état actuel de la terre, je dois parler d'un ordre de montagnes très certainement postérieur aux couches marines, puisque celles-ci généralement lui servent de base. On n'a point jusqu'ici observé une suite de ces *montagnes tertiaires*, effet des catastrophes les plus modernes de notre globe, si marquée & puissante, que celle qui accompagne la chaîne Ouralique au côté occidental sur toute sa longueur. Cette suite de montagnes, pour la plupart composées de grais & de marnes rougeâtres, entremêlées de couches diversément mixtes, forme une chaîne par tout séparée, par une vallée plus ou moins large, de la bande de roche calcaire dont nous avons parlé. Sillonée & entrecoupée de fréquents vallons, elle s'élève souvent à plus de cent toises perpendiculaires, se répand vers les plaines de la Russie en traînées de collines, qui séparent les rivières, en accompagnant généralement la rive boréale ou occidentale & dégénère enfin en déserts sableux, qui occupent de grands espaces & s'étendent surtout par longues bandes parallèles aux principales traces que suivent les cours des rivières. La principale force de ces montagnes tertiaires est plus près de la chaîne primitive par tout le gouvernement d'Orenbourg & la Permie, où elle consiste principalement en grais & contient un fond inépuisable de mines de cuivre sableuses, marneuses & d'autres qui se voient ordinairement dans des couches horizontales. Plus

loin vers la plaine sont des suites de collines toutes marneuses , qui abondent autant en pierres gypseuses, que les autres en minerais cuivreux. Je n'entre pas dans le détail de celles ci, qui indiquent surtout les sources salines: mais je dois dire des premières , qui abondent le plus & dont les plus hautes élévations des plaines , même celle de Moscou , sont formées , qu'elles contiennent très peu de traces de productions marines & jamais des amas entiers de ces corps , tels qu'une mer reposée pendant des siècles de suite a pu les accumuler dans les bancs calcaires. Rien au contraire de plus abondant dans ces montagnes de grès stratifié sur l'ancien plan calcaire, que des troncs d'arbres entiers & des fragmens de bois pétrifié , souvent mineralisé par le cuivre ou le fer ; des impressions de troncs de palmiers , de tiges de plantes , de roseaux & de quelques fruits étrangers; enfin des ossemens d'animaux terrestres , si rares dans les couches calcaires. Les bois pétrifiés se trouvent jusques dans les collines de sable de la plaine ; l'on en tire entr'autres des hauteurs sablonneuses aux environs de Sysran sur le Volga , changés en queux très fin , qui a conservé jusqu'à la texture organique du bois , & remarquables surtout par les traces très évidentes de ces vers rongeurs , qui attaquent les pilotis & autres bois plongés dans la mer & qui sont proprement originaires de la mer des Indes.

Dans ces mêmes dépôts sableux & souvent limoneux, gissent les restes des grands animaux de l'Inde : ces ossemens d'Eléphants, de Rhinoceros, de Busles monstrueux, dont on déterre tous les jours un si grand nombre & qui font l'admiration des curieux. En Sibérie où l'on a découvert le long de presque toutes les rivières ces restes d'animaux étrangers & l'ivoire même bien conservé en si
grande

grande abondance , qu'il forme un article de commerce , en Sibérie , dis-je , c'est aussi la couche la plus moderne de limon sablonneux qui leur sert de sépulture ; & nulle part ces monumens étrangers ne sont si fréquens qu'aux endroits où la grande chaîne , qui domine sur toute la frontière méridionale de la Sibérie , offre quelque dépression , quelque ouverture considérable.

Ces grands ossemens , tantôt épars , tantôt entassés par squelettes & même par hécatombes , considérés dans leurs sites naturels , m'ont surtout convaincu de la réalité d'un deluge arrivé sur notre terre , d'une catastrophe , dont j'avoue n'avoir pu concevoir la vraisemblance avant d'avoir parcouru ces places & vu par moi-même tout ce qui peut y servir de preuve à cet événement mémorable (p). Une infinité de ces ossemens couchés dans de lits mêlés de petites Tellines calcinées , d'os de poissons , de glossopetres , de bois chargés d'ocre , &c. prouve déjà , qu'ils ont été transportés par des inondations. Mais la carcasse d'un Rhinoceros , trouvé avec sa peau entière , des restes de tendons , de ligamens & de cartilages dans les terres glacées des bords du Vilouï , dont j'ai déposé les parties les mieux conservées au Cabinet de l'Académie , forme encore une preuve convainquante , que ce devait être un mouvement d'inondation des plus violens & des plus rapides , qui entraîna jadis ces cadavres vers nos climats glacés , avant que la corruption eût le tems d'en détruire les parties molles. Il seroit à souhaiter qu'un observateur parvint aux montagnes , qui occupent l'espace entre les fleuves Indighirka & Kovyma où , selon le rapport des chasseurs ,

(p) Voyez le Mémoire imprimé dans le XVIII. Volume des Nouveaux Commentaires de l'Académie Impériale de Pétersbourg.

chasseurs , de semblables carcasses d'Eléphants & d'autres animaux gigantesques , encore revêtues de leurs peaux , ont été remarquées à plusieurs reprises,



Après cet apperçu des remarques faites en Russie , qui paroissent les plus importantes pour avancer l'histoire naturelle de notre globe , qu'il me soit permis d'ajouter une esquisse fugitive d'hypothese telle , que j'imagine pouvoir servir à expliquer l'état présent de la surface des terres.

En supposant donc , que les hautes chaines granitiques formassent de tout tems des Isles à la surface des eaux , & que la décomposition du granite produisit les premiers amas de sable quarzeux & spathique & de limon micacé , dont les grais & les schistes des anciennes chaines sont formés ; la mer alors devoit amener les matieres légères phlogistiques & ferrugineuses , produites de la dissolution de tant d'animaux & de végétaux dont elle est peuplée , & les restes de ces corps mêmes vers les côtes des terres , y former , en infiltrant ces principes dans les couches qui se formoient sur le granite , des amas de pyrites , foyers des premieres Volcans , qu'on vit enfin éclater successivement en différentes parties du globe. Ces anciens Volcans , dont des siècles peut-être sans nombre ont détruit jusqu'aux traces , bouleverserent les couches déjà solidées par le tems , sous lesquelles se firent leurs explosions , changerent différemment en fusant ou calcinant , par la violence active des feux , les matieres de ces couches , & produisirent les premieres montagnes de la bande schisteuse qui répond en partie aux lits d'argille & de sable des plaines : ainsi que ces montagnes calcaires ,
dont

dont la roche est solide & pour la plûpart sans traces de pétrifications. C'est en partie dès lors que ces cavernes, ces fentes, ces felures en différentes directions, furent produites dans les couches, remplies dans les âges consécutifs par l'infiltration de quartz, de spaths, de minerais, de matieres phlogistiques &c. que nous exploitons aujourd'hui sous les noms d'amas & de filons ou veines. Ces opérations des volcans ont continué en differens endroits, sur-tout dans le voisinage & au fond des mers, jusqu'à nos jours. C'est par elles qu'on a vu de nouvelles Isles naitre du profond de l'océan; c'est elles qui probablement souleverent toutes ces énormes alpes calcaires de l'Europe, jadis roches de coraux & bancs de coquilles, comme il s'en trouve encore de nos jours dans les mers qui favorisent ces productions, & où le fond de vase argilleux doit toujours abonder en pyrites. Par ces amas calcaires & le précipité argilleux, qui mécaniquement se filtra plus bas, le fond de la mer augmentoit toujours; les couches calcaires s'amonceloient à différentes hauteurs, différens pour les especes qui devoient les composer, selon les lieux plus favorables à la production de l'une ou l'autre especes de ces êtres vivans, ou selon la direction des courans, qui entraînaient & transportaient certaines especes vers de certains parages, ainsi que nous l'observons sur toutes les côtes. Les flots ramenoient toujours les matieres légères & menuës vers les terres. D'un autre côté les terres produites sur les montagnes, tant de la décomposition du granite & d'autres pierres, que par la destruction des animaux & des plantes, avec les débris des roches entraînés par les torrens, augmentoient les côtes & reculoient par petits degrés les bornes de la mer, que souvent quelque volcan forçoit encore à se retirer en soulevant les bas-fonds des côtes. Mais cette

Histoire de 1777. P. I. h. dimi-

diminution des mers , jointe à la consommation probable des eaux, n'auroit pu suffire pendant des millions d'années, pour mettre à sec toutes les couches marines horizontales, que nous admirons dans nos collines remplies de pétrifications bien loin des mers , & pour donner toute cette étendue à nos continens. Il dut arriver , après qu'une bonne étendue de païs, au pied des anciennes chaines, fut déjà bien peuplée d'animaux , bien couverte de forets , des convulsions du globe qui purent , par des éruptions gigantesques au plus profond des mers , soulever & chasser les flots jusqu'à inonder violemment une grande partie des terres déjà habitées , des montagnes même assés élevées , & augmenter les continens par le dépôt de matieres qui se trouvoient mêlées à ces flots bouillonnans ; en ouvrant peut-être en même tems dans l'intérieur du globe des cavernes immenses , qui purent engloutir une partie de l'Océan (g) & en abaisser le niveau au point, à peu près, où il s'est trouvé depuis les siècles de l'histoire des hommes.

Cette idée, qui n'est point nouvelle, a paru à quelques auteurs choquer la vraisemblance , par aucune autre raison que parce qu'on la joignoit à la fausse supposition, que la mer dut au commencement couvrir jusqu'aux plus hautes montagnes , ce que j'ai prouvé être incompatible avec l'état actuel des élévations primitives. Une masse d'eau requise pour égaler ou surpasser ces hauteurs sur toute la surface du globe , ne trouveroit sans doute assés d'espace dans l'intérieur de cette sphere , même en la supposant toute creusée de cavernes. Selon moi la mer ne dut jamais couvrir que les collines calcaires des plaines ,
dont

(g) Voy. *l'Hist. de l'Acad. de Paris* , 1716. p. 14. suiv. *Buffon hist. nat.* I. Vol. p. 365. suiv.

dont la plus haute ne sauroit être évaluée beaucoup au delà de 200 toises perpendiculaires au dessus du niveau actuel des mers. Toutes les alpes calcaires, qui excèdent cette hauteur, sont certainement élevées par l'action d'éruptions souterraines.

De plus la mer étant encore si haute sur notre planète, il ne sera pas plus contre la vraisemblance de la supposer alors grossie par d'énormes éruptions sousmarines & par d'autres causes naturelles peut-être, qui pouvoient accompagner ces éruptions (comme des ouragans p. ex. & l'effet combiné des marées) grossie, dis-je, au point de rouler ses flots par dessus les hautes terres alors habitées, qui par leur opposition pouvoient encore augmenter la violence d'une mer close entr'eux & la puissance qui la soulevoit. Ne voit-on pas la marée, dont la hauteur moyenne ne surpasse pas les quinze pieds, par le rétrécissement des détroits, l'opposition des continens & d'autres causes s'élever avec violence jusqu'à cinquante, cent & même deux cent pieds? — Ou, pour conclure du petit au grand, n'a-t-on pas vu à différentes reprises les eaux de notre Néva, par des vents d'une certaine direction, grossies en peu d'heures de plus de deux & trois aunes, inonder la ville de Pétersbourg & produire des dégats très-grands, pour une cause si chétive en comparaison de la violence des flots de la mer? N'a-t-on pas aussi les exemples récents de terribles inondations de la mer, causées par les tremblemens de terre au Pérou & à nos parages du Kamtchatka?

Mr. de Jussieu a judicieusement conclu, sur les fougères & les autres plantes indiennes, qui se trouvent empreintes dans les ardoises d'Europe, que l'inondation, qui

les coucha dans ces lits , devoit venir du Sud ou de l'Océan des Indes. La même direction est prouvée par les restes d'animaux terrestres, qui ne vivent qu'entre les tropiques, entassés jusques dans nos terres arctiques. S'il existe donc dans l'Océan indien des indices de brasiers souterrains, de causes assez puissantes pour produire une telle catastrophe ; si les traces du déluge effectué par ces causes s'accordent avec la direction centrifuge des mers chassées de ce foyer , alors ce point de notre hypothèse en acquerra une nouvelle force. Mais quoi de plus connu que les volcans dont tous les archipels de l'Inde , depuis l'Afrique jusqu'au Japon & aux terres australes , sont remplis ou conservent les vestiges ? Ceux , qui subsistent encore dans ces parages, sont même les plus puissans & les plus furieux de l'Univers. La plupart des Physiciens , qui ont traité de la Géographie physique de la terre , s'accordent à considérer toutes ces isles , comme élevées sur les vou-tes immenses d'une fournaise commune. La première éruption de ces feux , qui y souleverent le fond d'une mer très - profonde & qui peut - être d'un seul éclat , ou par des secousses qui se succéderent de près , fit naître les Isles de la Sonde , les Molucques & une partie des Philippines & des terres australes , devoit chasser de toutes parts une masse d'eaux qui surpasse l'imagination ; laquelle heurtant contre la barrière que les chaînes continues de l'Asie & de l'Europe lui opposoient au Nord , & poussée par les nouvelles ondées qui succédoient , dut causer des bouleversemens & des breches énormes dans les terres basses de ces continens , entraîner les bancs formés au devant d'eux & les couches supérieures des premières terres , & en surmontant les parties moins élevées de la chaîne , qui forme le milieu du continent , charrier & déposer sur les pentes opposées ces dépouilles mêlées aux
matieres

matieres dont l'éruption avoit déjà chargé les eaux de la mer, y ensevelir sans ordre les debris d'arbres & de grands animaux, qui furent enveloppés dans la ruine, & former par ces dépôts successifs les montagnes tertiaires, dont nous avons parlé & les atterrissemens de la Sibérie; former enfin, en s'écoulant du côté du pôle, avec toute la masse des eaux qui couvroient encore les plaines & que la diminution du niveau général, par les gouffres alors ouverts, devoit entraîner, les inégalités, les vallées, les traces des fleuves, les lacs & les grands golfes de la mer septentrionale, dérangeant chemin-faisant les couches plus anciennes, & entraînant encore assés de matieres hétérogènes, pour combler une partie des profondeurs de la mer du nord & causer les bas-fonds de ses côtes.

En considérant les grands golfes de la mer, qui baigne l'Asie au midi, comme les traces faites en abordant, par les flots de l'Océan, l'on en rendra une raison bien plus plausible, que si l'on vouloit avec Mr. le Comte de Buffon (T. II. p. 114. suiv.) attribuer quelques unes de ces breches aux effets imperceptibles d'un mouvement constant des mers de l'orient en occident. L'on aura en même tems l'explication des autres irrutions de la mer, qui tracent la direction de notre déluge, partant de ce foyer commun, que nous venons de placer dans les mers de l'Inde, — telles que la mer d'Okhotsk & de Pengina, le golfe de Perse, la Mer rouge, la Méditerranée avec l'Adriatique & la Mer noire, la Mer caspienne, la Baltique, avec le golfe de Bóthnie, & la Mer blanche, qui sont des plus considérables de l'univers, & ne sauroient être attribuées à ce seul mouvement de l'Océan, qui n'a pu agir en tant de sens & en sens contraires. L'on voit aussi une raison probable des grands promontoires méridionaux

dionaux des continens, & pourquoi le terrain de la pente de l'Asie au midi de sa plus grande élévation & celui de l'Amérique à l'orient des Andes, est infiniment moindre, que des côtés opposés; les flots du déluge aiant rongé ces continens à leur abord & transporté les terres, pour en augmenter les plaines au delà des monts. Et par quel miracle l'Afrique, qui n'a aucun golfe à sa côte orientale, feroit-elle sans cela restée exempte de cet effet destructeur de l'Océan, si par son mouvement presque insensible il put l'être autant que Mr. le Comte de *Buffon* se l'imagine? comment l'Afrique n'en souffroit-elle pas? exposée, comme elle l'est, toute entière dans la Zone torride où la force du courant universel est la plus grande. Les parages, qui semblent à cet Auteur célèbre des débris de continens envahis par la mer, (même en Amérique) pourront être à plus forte raison appelés des terres naissantes par le feu qui brûle au fond de ces mers, & qui peut-être communique par toutes les chaines marines de la grande Mer des Indes.

Ce feroit donc là ce *Déluge*, dont presque tous les anciens peuples de l'Asie, les Caldéens, les Perses, les Indiens, les Tybétains & les Chinois, ont conservé la mémoire & fixent (quoiqu'avec des différences assez considérables) l'époque environ au tems du déluge mosaïque. L'Europe & les basses terres de l'Asie ont depuis souffert de considérables changemens par d'autres inondations, tantôt dus à de semblables éruptions sous-marines, tantôt à l'effusion soudaine de grandes mers méditerranées, comme peut-être de celle, qui conserve aujourd'hui ce nom, & du Pont-Euxin (r), qui laissoient

(r) L'idée de l'infatigable *Tournefort* & de Mr. le Comte de *Buffon* sur l'ancien état de la Mer noire & sa communication avec la mer Caspienne, se trouve de plus en plus confirmée par les ob-

laissent en même tems de grandes plaines limoneuses à sec; tantôt enfin à des irrutions de la mer & à la submersion des basses terres qui en étoient séparées par des digues naturelles. Pour ne rien dire des petits volcans partiels & peu profonds, des effets produits par les torrens & les tremblemens de terre, l'aterrissement causé par les vents, les eaux, & la végétation &c. qui me conduiroient trop loin & me feroient abuser de la patience de cette Illustre Assemblée, d'autant plus, qu'on en trouve des détails suffisans dans plusieurs ouvrages connus.

Je

servations des voyageurs. Les phoques, quelques poissons & coquilles marines, que la mer Caspienne a de commun avec la mer noire, rendent cette communication ancienne presque indubitable & ces mêmes circonstances prouvent aussi que le lac Aral devoit jadis être joint à la mer Caspienne. J'ai tracé (dans le *troisième volume* de mes *Voies*) l'ancienne étendue de cette mer sur tout le désert d'Astrakhan & au delà du Jaïk, par cette apparence de côtes dont les hautes plaines de la Russie bordent ce désert, par l'état & les productions fossiles de cette ancienne côte, & le limon salé, mêlé de coquilles marines calcinées, qui couvre toute la surface du désert même. L'on trouve dans la *Description de l'Ukraine* de Guillaume le Vasseur Sr. de Beauplan (à Rouen 1660. 4.) p. 9. un passage qui donne les mêmes apparences aux plaines du Borysthene. Un Voyageur moderne (*Rich. Chandler travels in Asia minor*) pense que la mer s'étendoit autrefois jusqu'aux sources du Méandre & formoit un golfe entre les montagnes de Messoghis & de Taurus. D'autres ont trouvé les traces récentes de la Mer dans les plaines de l'Asie mineure & de la Perse, & sur le Danube bien loin des bornes actuelles des Mers noire & caspienne. Les anciennes traditions sur l'effusion soudaine de la Mer noire par la Propontide, que *Tournfort* a soutenu par ses observations, semblent à tous égards plus plausibles, que l'opinion qui suppose que l'ancien détroit entre la Mer noire ait été desséché par l'accumulation du limon des fleuves.

Je ne prétends point après tout donner mes idées qui ne sont qu'un composé de ce que plusieurs grands hommes ont opiné sur cette matière , pour exemptes de toute difficulté. Mais j'ose avancer , que la variété des moyens, employés par la Nature en formant & dérangeant les montagnes & changeant la surface des terres, est trop évidente pour pouvoir en rendre raison par aucune hypothèse qui s'attache à un seul ou un petit nombre de ces moyens. En admettant au contraire tous ceux , dont nous voyons sur notre globe les traces indubitables , les catastrophes dont l'histoire des hommes & le grand code de la Nature nous a conservé des monumens , on doit s'approcher le plus de la probabilité : le seul point de perfection à désirer en fait d'hypothèses , qui ne peuvent jamais être mises en démonstration. Il me semble sur-tout qu'aucune cause plus naturelle, que celle que je viens d'admettre, ne pourroit être imaginée pour rendre raison du déluge universel , & de plusieurs inondations moins générales , constatées par les traditions des peuples. Mais cette supposition peut ne point flatter la tranquillité luxurieuse des nations qui habitent les plaines fertiles , puisque les petits effets de volcans sous marins dans certains parages, dont les siècles de l'histoire conservent tant d'exemples, & dont le nôtre a vu les tristes suites, ne sauroient que faire craindre quelque jour des catastrophes plus terribles & fatales à des hémisphères entiers. Heureux alors ces montagnards que le sort semble avoir maltraité en les plaçant entre les rochers des Alpes. Ils seront la nouvelle pépinière du genre humain & conquérans sans carnage , les plaines balayées par les flots deviendront leur domaine.

M É C H A N I Q U E.

Description du Modele d'un Moulin à scier
présenté à l'Académie par Mr. *Richner*.

Le mécanisme de ce moulin à bras, inventé pour la commodité des endroits, où il n'y a point d'eau vive, est assez différent de celui des moulins à eau, dont on se sert ordinairement pour scier de grandes pieces de bois : & comme cette machine est recommandable par sa simplicité & par l'utilité qu'on en pourroit tirer en plusieurs occasions, il ne sera pas mal à propos d'en décrire en peu de mots les parties les plus essentielles, & celles surtout où elle s'écarte de la structure ordinaire des moulins à eau. Planche V

Derriere les coulisses A B, entre lesquelles glisse le Chassis qui porte la Scie, il y a des deux côtés deux poutres C D dressées verticalement & fermement liées avec les coulisses du Chariot E F & l'assemblage du fond de toute la machine. Ces poutres soutiennent dans des enfourchemens arrondis *a*, une piece de bois *b* transversale quarrée & entrecoupée dans les endroits où elle entre dans les enfourchemens par des tourillons cylindriques, pour y jouer librement, lorsqu'elle est mise en mouvement par le moyen de deux ailes L M attachées aux deux bouts de la piece *b*, dont la face *c d* fait un quart de tour, dès que ces ailes ou leviers sont remués par les moteurs. Ce mouvement se communique au bras *c e* & fait monter & descendre alternativement une chaffe ou piece de

bois *f*, qui tient à ce bras & à l'entretoise supérieure de la scie par des boulons qui traversent les enfourchemens *g g*, & qui fait monter & descendre pareillement la scie *h*.

Deux autres pieces de bois *PQ* fermement liées aux deux coulisses de la scie *AB* & aux deux poutres verticales *CD* servent de pieces d'appui à une autre piece de bois transversale & quarrée *k*, dont les tourillons jouent librement dans les cavités *n*. Cette piece étant mise en mouvement par l'action de la scie au moyen du levier *p q*, fait avancer & reculer le bras *r*. A ce bras tient par un boulon qui traverse son enfourchement la hampe ou le manche de bois *s t* garni d'un fer épatté à pied de biche, pour entrer dans les dents de la crémaillere *KK*, qui tourne par le choc successif & régulier de la hampe. L'axe de la crémaillere fait tourner de même deux lanternes, dont les fuseaux, comme dans les moulins à eau ordinaires, engrenent dans les dents *z*, qui bordent le dessous des brancards du chariot *GH*, enchassés entre ses coulisses *EF* & font avancer peu à peu tant le chariot que la piece de bois à scier à chaque mouvement de la scie.

Il n'est pas douteux que cette machine utile, qui a encore le grand avantage de pouvoir être transportée dans les forêts à tel endroit qu'on voudra pour scier avec facilité les plus grands arbres sur le lieu, ne soit en effet une invention de *M. Richner*: mais il est aussi certain, qu'il n'est pas le premier qui en ait eu l'idée. Un Mécanicien de Commercy en Lorraine, nommé *Lombart* doit avoir inventé & exécuté en grand, il y a quelques années, une scie pareille, moyennant laquelle il a effectivement scié à peu de frais les plus grands arbres en planches, sur le lieu même où ils avoient été abattus.

Echelle à feu présentée à l'Académie par le Sr. *Dablgréen*, Maître Forgeron établi à St. Pétersbourg.

Tout ce qui promet un prompt & infallible secours dans des malheurs aussi ravageans que le sont les incendies, intéresse trop l'humanité pour ne pas mériter une attention particulière de l'Académie. Telle lui a paru l'invention d'une échelle de nouvelle construction, dont le Sr. *Dablgréen*, Suédois de nation, lui a présenté un modèle, & qui ensuite a été exécutée en grand à la satisfaction de l'inventeur.

Nous nous empressons par conséquent de faire part au Public de cette nouvelle machine, qui joint encore à l'usage avantageux qu'on en peut faire dans les incendies, une grande simplicité dans ses parties & une construction peu coûteuse.

La première figure représente cette échelle encore repliée, telle qu'on la transporte à l'endroit de l'incendie où on en a besoin. La facilité de la transporter & de la placer est encore un des avantages considérables de cette invention. A B, C D sont deux leviers de bois, joints & assemblés à leur milieu en *a*, & percés dans ce point par une barre qui les fixe à la caisse M N P Q & en traverse toute la largeur. Les extrémités supérieures C & B de ces deux leviers tiennent aux bouts inférieurs d'une seconde paire de leviers B E & C F, semblables aux premiers & joints par un clou à leur milieu *b*, mais sans être immédiatement fixés à la caisse. Les paires suivantes des leviers G F, E H, G K, I K ne diffèrent en rien de la seconde, & tout cet assemblage est terminé en

Planche II.
Fig. 1.

haut par une espece de Gallerie R S. Un appareil parfaitement semblable se trouve aussi du côté opposé de la caisse, & l'un & l'autre tiennent entr'eux par des barres qui traversent chaque deux paires de leviers correspondans aux points, où ils se croisent, comme en *a*, C, B, *b*, E, F, etc.

Par cette construction on conçoit aisément, que lorsqu'on fait tourner les roues, les cordes en s'entortillant forceront les deux bouts inferieurs de la premiere paire de leviers à se rapprocher, & ces leviers se mouvant ainsi autour de leur centre, tous les autres leviers en feront autant autour de leurs points d'appui & prenant par ce mouvement une situation moins inclinée, ils s'élèveront verticalement.

Planche II.

Fig. 2.

L'Echelle ainsi montée est représentée dans la seconde figure de la même Planche. L'une & l'autre des deux roues a son arrêt, qui s'y engraine, pour assurer à l'échelle la situation qu'on lui a donnée, & pour empêcher qu'elle ne retombe dans la caisse. Pour y mettre encore plus de fermeté, on accroche en haut & en bas des barres de fer horizontales *mn*, *pq*, & on-en peut même ménager des semblables à chaque paire de leviers.

Enfin *tu*, *rs*, *vw* etc. sont des planches horizontales suspendues par des cordes, où les ouvriers se placent pour diriger delà la syringe de la pompe à feu vers l'endroit le plus exposé à la flamme. Le reste de la construction & l'usage de la machine se voit suffisamment par la figure, où il est encore bon de faire observer qu'un des plus grands avantages de ces sortes d'échelles consiste en ce qu'elles se font enlever en l'air, sans être appuyées

appuiées contre la maison, de la quelle on travaille à éteindre les flammes (*).

(*) Cette ingénieuse application d'un mécanisme d'ailleurs très connu à un usage aussi important, a valu au Sr. Dahlgreen une médaille académique que S. E. Mr. le Chambellan de Domaschnef lui a remis publiquement dans une Assemblée solennelle de l'Académie, autant pour le récompenser que pour encourager tous ceux qui comme lui employeront leurs talens à des objets utiles.



PHYSIQUE EXPERIMENTALE.

Electrophore perpétuel.

SA MAJESTE' IMPERIALE, notre très auguste Souveraine, a fait exécuter & placer dans l'Académie un grand appareil électrique, connu aujourd'hui sous le nom d'Electrophore perpétuel & imaginé l'année 1775 par un Gentilhomme de Côme nommé *Alexandre Volta*. Pendant que cette nouvelle machine électrique, exécutée selon Ses ordres par un Mécanicien Russe, Mr. *Kulibin*, a été placée dans le Chateau Impérial à Czarsko-Selo, il a plu à *Sa Majesté*, d'assister Elle même aux expériences électriques, faites avec cet appareil, qui joint à la simplicité du mécanisme la surprise des effets les plus singuliers. Il consiste en deux plaques de métal ; l'une de ces deux plaques est recouverte d'une couche de poix, & l'autre, un peu plus petite, doit être suspendue par des cordes de soie ou isolée d'une façon équivalente, afin qu'on puisse la poser sur la surface résineuse, frottée avec la main ou un morceau de fourrure, & ensuite la relever sans y toucher.

L'Electrophore en question (*) le plus grand qu'on ait encore exécuté, a 9 pieds de longueur sur $4\frac{1}{2}$ de largeur. L'électricité y est produite par une masse résineuse, qui contient 180 livres de poix avec 80 livres de Cire d'Espagne.

La

(*) Il est représenté sur la 11me Planche des figures qui appartiennent aux Mémoires de ce volume, & c'en est la 3me.

La description détaillée de cet appareil, & de ceux de ses effets, qui sont particuliers à ces machines électriques d'un genre nouveau, ainsi que le développement de leur principe physique sont le sujet d'un mémoire de Mr. *Krafft*, inséré au Tome présent des *Actes de l'Académie* (pag. 154.) sous le titre: *Tentamen Theoriae Electrophorici* c'est à dire *Essai d'une Théorie des Electrophores perpétuels.*

Réflexions de Mr. *L. Euler*

Sur quelques nouvelles expériences optiques, communiquées à l'Académie des Sciences,

par Mr. *Wilson.*

Les corps sur lesquels ces expériences ont été faites sont connus sous le nom de Phosphores, qui ont la propriété, qu'ayant été éclairés par les rayons du Soleil, ou seulement exposés au grand jour, ils conservent leur lumière encore pendant quelque temps si on les transporte dans l'obscurité, tout de même que s'ils étoient encore éclairés. Il y a long temps qu'on a reconnu cette propriété dans les pierres de Bologne, qui après avoir été bien éclairées & transportées ensuite dans un lieu obscur y demeurent visibles assez longtemps. Depuis les Chymistes ont trouvé moyen de composer de semblables corps de plusieurs autres matières différentes, & Mr. *Wilson* a poussé cette découverte si loin, qu'il est en état de préparer de tels corps de toutes les couleurs, dont chacun ayant été bien éclairé conserve pendant longtemps dans une chambre obscure sa propre couleur, par la quelle il demeure visible au spectateur.

Or

Or les nouvelles expériences, que cet habile Physicien a faites sur ces différentes especes de corps phosphoriques consistent dans les différentes manieres de les éclairer. Il s'est servi pour cet effet d'une chambre obscure, où l'on peut diviser par le moyen d'un prisme les rayons solaires en leurs couleurs primitives, qu'on voit dans les arcs en ciel; & comme on y peut intercepter telles couleurs qu'on voudra, il a tellement arrangé ses expériences, qu'un même corps phosphorique d'une certaine couleur a été successivement éclairé par tous les différens rayons solaires, & il a observé, qu'après que ce corps a été éclairé par les rayons de sa propre couleur, il n'en a reçu qu'une lueur assez foible dont il a été visible dans l'obscurité. Mais plus le rayon de lumiere dont il a éclairé ce corps différoit de sa propre couleur, plus il en reçut d'éclat dont il brilloit après dans l'obscurité. Ainsi un tel corps phosphorique rouge ayant été éclairé par les rayons rouges, & ensuite transporté dans l'obscurité n'en conservoit qu'une assez foible lumiere, au lieu qu'après l'avoir éclairé successivement par les rayons jaunes, verts, bleus & violets, la lumiere qu'il en acquéroit devint de plus en plus brillante, & les rayons violets, qui sont les plus contraires à sa propre couleur produisirent le plus grand éclat.

Comme on se feroit sans doute attendu, que les rayons de la même couleur dont le corps est doué, lui imprimassent le plus vif éclat, il paroitra extrêmement étrange, que précisément le contraire soit arrivé dans ces expériences, & il semble, que ce phénomène se trouve dans une contradiction ouverte avec les autres phénomènes connus de la lumiere, par les quels nous sçavons, qu'un corps opaque ordinaire d'une certaine couleur ne sauroit être
mieux

mieux éclairé, que par les rayons de la même couleur. Ainsi un tel corps rouge lors qu'on y dirige dans une chambre obscure les rayons rouges du Soleil, en acquiert un très haut brillant, pendant qu'en y dirigeant les rayons violets du Soleil, il n'en reçoit presque aucune illumination, mais demeure presque entièrement invisible; & tout le monde sçait, qu'à la flamme bleue de l'esprit du vin allumé tous les corps rouges paroissent extrêmement sombres, pendant que les corps bleus y paroissent dans leur plus grand éclat.

Or quelque étrange que paroisse ce Paradoxe, si nous y réfléchissons attentivement, nous ne le trouverons plus si contraire aux propriétés connues de la lumière; on n'a qu'à bien distinguer deux momens dans les expériences de Mr. *Wilson* dont le premier est celui où il a éclairé son corps phlogistique rouge par les rayons violets du Soleil, pendant lequel il n'y a aucun doute que le corps n'ait paru presque entièrement destitué de toute couleur; ce n'étoit que dans le second moment lorsqu'il transportoit ce corps dans l'obscurité, qu'il a commencé à briller de sa propre couleur rouge, d'où l'on voit, que les rayons violets du Soleil n'ont pas immédiatement rendu visible le corps, mais qu'ils ont plutôt excité ses moindres particules à un certain mouvement, qui les a rendues propres ensuite à reluire dans l'obscurité de sa couleur naturelle. Par là il est clair, qu'il ne s'agit que d'expliquer comment les rayons violets ou tous les autres rayons hormis les rouges ayent été capables de mettre le corps dans un tel état qu'après avoir été transporté dans l'obscurité, il ait pu répandre ses propres rayons qui ont presque été supprimés pendant qu'il a été exposé aux rayons violets du Soleil. Or je crois, qu'une telle explication ne fera

pas fort difficile suivant la Théorie que j'ai donnée autrefois sur la nature de la lumière & la manière dont les corps opaques nous deviennent visibles.

Or d'abord il est assez clair & Mr. *Wilson* semble en convenir lui même, que ces phénomènes sont entièrement contraires à la Théorie Newtonienne de la lumière & des couleurs; car selon cette Théorie les corps opaques ne sauroient devenir visibles, que par des rayons réfléchis de leurs surfaces. Donc pour qu'un corps rouge par exemple puisse être aperçu de nos yeux, il faut premièrement qu'il y ait des rayons qui tombent sur sa surface, & ensuite qu'ils y souffrent certaines réfractions, par lesquelles tous les rayons qui ne sont pas rouges soient absorbés; de sorte qu'en troisième lieu les seuls rayons rouges soient réfléchis de sa surface. Cela posé on remarque dans ces nouvelles expériences d'abord deux circonstances, directement contraires à ce Système, dont la première est: que le corps phosphorique rouge quoiqu'il n'ait été éclairé que par des rayons violets ne laisse pas que de nous paroître rouge & même avec plus d'éclat que s'il avoit été éclairé par des rayons rouges; de sorte qu'il est impossible de concevoir d'où viennent les rayons rouges par lesquels ce corps nous devient visible, attendu que par cette même Théorie les rayons violets ne sauroient changer de nature. Mais la seconde circonstance est encore d'avantage en contradiction avec cette Théorie, puisque le corps rouge en question ne nous paroît sous cette couleur, que quelque temps après qu'il a été éclairé par des rayons violets; de sorte qu'actuellement il n'y a plus aucun rayon qui tombe sur sa surface, & encore moins sauroit-il y en avoir des réfléchis. D'où l'on voit, que la seule existence de tels corps phosphoriques pourroit suffire à renverser de

de fond en comble la Théorie Newtonienne sur la lumière & les couleurs,

Lorsque j'ai établi autrefois ma nouvelle Théorie de la lumière & des couleurs, j'ai prouvé incontestablement par plusieurs raisons, que le sentiment du grand *Newton* ne sauroit être en aucune manière admis dans la Physique; & il seroit superflu de les répéter ici, après que je les ai exposées fort en détail dans la première partie de mes *Opuscules* imprimés à Berlin 1746 sous le Titre de *Nova Theoria lucis & colorum*, & ensuite aussi dans mes lettres à une Princesse d'Allemagne. Le fondement de cette Théorie consiste en ce que je suppose à la lumière une origine semblable à celle des sons; en sorte que comme le son est produit par un mouvement de vibration transmis par l'air, ainsi la lumière est causée par un semblable mouvement de vibration transmis par l'éther dont l'élasticité étant plusieurs mille fois plus grande que celle de l'air pendant qu'il est aussi plusieurs mille fois plus subtil, j'ai d'abord heureusement expliqué l'incroyable vitesse dont les rayons de lumière doivent arriver du Soleil jusqu'à nous. Ensuite j'ai fait voir très évidemment que les différentes couleurs ne sont produites que par différens degrés de rapidité dans le mouvement de vibration, de la même manière que les sons d'une octave dans la Musique répondent chacun à un certain nombre de vibrations rendues dans une seconde.

Mais pour ce qui regarde de plus près les nouvelles expériences; j'ai démontré, qu'il est absolument faux, que les corps opaques nous deviennent visibles par des rayons réfléchis, comme on s'étoit généralement imaginé autrefois; mais qu'il faut absolument, que les moindres

particules qui se trouvent dans la surface de ce corps soient mises dans un certain mouvement de vibration plus ou moins rapide selon que la couleur du corps l'exige, attendu qu'à chaque couleur il répond un certain nombre de vibrations achevées pendant une seconde; car alors ce même mouvement produit de semblables vibrations dans l'éther environnant, d'où résultent des rayons de la même couleur. Par là il est clair, que les rayons, par lesquels nous voyons les corps opaques sont engendrés dans leur propre surface conformément au degré d'élasticité dont les moindres particules y sont douées. Or pour mettre ces particules dans un tel mouvement de vibration il faut que des rayons de lumière y tombent, lesquels par leur action les excitent à un tel mouvement, de la même manière qu'une corde de musique en repos étant exposée à un son assez fort, commence à trembler & à rendre elle même un son qui répond à son degré de tension.

Cela posé, un corps phosphorique rouge tel que Mr. *Wilson* en a examiné ne nous sauroit devenir visible, qu'en tant que les moindres particules dans sa surface soient excitées à un mouvement de vibration qui convient à sa propre couleur. Ce seront donc sans doute les rayons rouges qui seront les plus propres à imprimer à ces particules un tel mouvement de vibration, qui par la nature phosphorique de ce corps se conserveront encore pendant quelque temps après que les rayons incidens auront cessé d'y agir, mais d'une manière beaucoup plus faible que pendant que les rayons rouges y ont agi actuellement. Voyons à présent, quel effet les rayons violets doivent produire sur ce même corps phosphorique rouge, & d'abord il est évident qu'ils ne sauroient porter ses moindres particules à un mouvement de vibration à cause de la
con-

contrariété qui regne entre les vibrations des rayons violets & celles que les propres particules du corps sont disposées à recevoir. Par cette raison tout l'effet de ces rayons violets se réduira à pousser les particules du corps à un certain degré de tension sans leur imprimer un mouvement actuel. Donc aussitôt que le corps sera retiré de l'action de ces rayons, les moindres particules commenceront à se dégager de leur état de tension & recevront le même mouvement de vibration qui est propre à leur nature, & partant elles repandront des rayons rouges qui seront même d'autant plus forts, à cause du haut degré de tension, que si le même corps avoit été exposé aux rayons rouges. Enfin par la nature des corps phosphoriques ce mouvement de vibration pourra durer plus ou moins longtemps selon le degré de la qualité phosphorique dont ces corps seront doués. De tout cela on comprend aisément, que ces nouvelles expériences quelques paradoxes qu'elles ont paru d'abord sont parfaitement bien d'accord avec ma Théorie de la lumière & des couleurs, & qu'elles pourroient même servir à la porter à un plus haut degré de certitude, si elle n'étoit pas encore suffisamment constatée.

Expérience

sur le phosphore sulphuréo-calcaire de Mr. *Canton*.

Par Mr. *Krafft*.

Les nouvelles expériences sur les phosphores, dont Mr. *Wilson*, Membre de la Société Royale de Londres, a fait part à l'Académie, sont également intéressantes & pour

la connoissance des ces corps & pour la théorie de la lumière. Ce Physicien prépare avec des coquilles d'huitres un phosphore, qui exposé quelques secondes de tems à la lumière du jour, offre dans l'obscurité de très vives apparences de couleurs prismatiques. Par un traitement particulier il prépare la surface supérieure de ces coquilles phosphoriques, de manière à ne briller, que de la seule couleur rouge; & dans l'intensité de cette lumière rouge il a observé des nuances plus ou moins fortes, selon que le phosphore avoit été exposé à tel ou tel rayon coloré du Soleil, séparé par le moyen d'un prisme & introduit seul & à l'exclusion des autres dans une chambre obscure. Le phosphore, éclairé par le seul rayon rouge, le plus homogène à la couleur de sa lumière ordinaire, ne parut offrir dans l'obscurité, qu'une faible lueur rouge; au lieu que ce rouge étoit dans son plus grand éclat, quand le phosphore venoit d'être éclairé par le seul rayon violet, le plus hétérogène à sa couleur originaire.

Ces belles découvertes m'ont donné occasion, de faire sur le phosphore sulphuréo-calcaire, qui offre dans l'obscurité une lumière blanche, une expérience analogue, que le Réverend Pere *Beccaria*, célèbre Physicien de Turin, a annoncée le premier dans les Transactions philosophiques de Londres; Vol. LXI. P. 1. & qui est d'autant plus intéressante, que la couleur blanche est en quelque façon le mélange de toutes les autres. Il fit plusieurs petites boîtes de métal à couvercles de verre différemment coloré. Ayant mis dans chaque boîte une quantité égale de ce phosphore, il les exposa au soleil, & les ouvrant dans un lieu obscur, il trouva à chaque portion de ce phosphore la couleur du couvercle qui le couvroit. *Confit hoc experimento, (dit ce Physicien) non quantum solum*

solum lucem ebiberit phosphorus , sed et qualem , eam ipsum vnice emittere. Mrs. Wilson , de Magellan , & quelques autres Physiciens , ont répété cette expérience , sans réussir à trouver le resultat annoncé , quoiqu'ils ayent suivi exactement tous les procédés de l'Auteur.

J'ai cru , qu'il falloit aussi essayer cette expérience , en faisant usage d'un très bon prisme au lieu des couvercles de verre , pour séparer les rayons colorés du Soleil. Le phosphore a rendu dans l'obscurité une lumière blanche vive & distincte ; mais toutes les fois , que j'ai répété l'expérience , cette lumière nous (*) a paru blanche & sans aucune autre couleur , quel que fût le rayon coloré du Soleil , qui eut éclairé le phosphore.

Mr. Allemand , célèbre Physicien à Leyde , a constaté l'avis du Pere Beccaria par une expérience , qu'il a faite sur le phosphore de Bologne.

Il seroit intéressant de savoir , si peut-être cette qualité n'est pas particuliere à quelques espèces de phosphores de lumière blanche ; par exemple , à celui de la pierre de Bologne ; ou quelles sont les conditions nécessaires pour assurer le succès de l'expérience.

(*) A la premiere expérience a assisté Mr. Gouthry , Médecin anglois , amateur très zélé de la Physique expérimentale.



HISTOIRE NATURELLE.

Description d'un *Husio* monstrueux.

L'Académie reçut au commencement de Mars, de la part du Gouverneur d'Astrachan Mr. le Général de *Jacobi* la tête d'un esturgeon de la grande espèce connue en Russie sous le nom de *Belouga*, en allemand *Hausen*, remarquable par une excrescence extraordinaire qu'elle portoit. Le poisson dont cette tête avoit fait partie, n'avoit gueres surpassé sept pieds en longueur, ce qui est la taille moyenne de cette espèce.

Planche III
Fig. 1. & 2.

L'excrescence se trouve placée presque au milieu du front entre les orbites, où sa base tient immédiatement à la charpente osseuse du Crane, qui s'y étoit visiblement cariée & reconsolidée. Elle s'élève en aspérités irrégulières & comme déchiquetées, qui s'insinuant dans la substance même de l'excrescence en augmentent l'immobilité.

C'est d'abord un cône tronqué irrégulièrement & raboteux *a, a, a*, de 4 pouces anglois de haut sur 5. p. 2. l. de diamètre & 14. p. 6. l. de circonférence à la base. Du sommet de ce cône partent deux branches latérales *b, c*, en forme de croffes, irrégulièrement cylindriques, émoussées, & contournées en avant, dont la distance *b c* (2^e figure) prise transversalement égale 11 pouces, la longueur de la branche gauche *c* surpassant considérablement celle qui est à la droite *b*.

La substance du corps de l'excrescence est cartilagineuse mais très compacte & dure, entremêlée de fibres ligamenteuses des plus ténaces, qui se croisent en tout sens

sens & tournent en arcs & par rézeaux, sans aucune trace de vaisseaux sanguins. Les branches sont simplement cartilagineuses, sans fibres, plus faciles à entamer avec le couteau & plus mollasses : aussi s'affaïsserent-elles considérablement, lorsque la tête qui pendant le tems de son transport avoit continuellement été gélée, commença à se dégeler. Toute la substance se dessécha sans pourriture & devint transparente comme de la colle en perdant environ la moitié de son volume. La figure ainsi que la position de cette excrescence n'a rien de symétrique, sa distance à l'oeil droit se trouve d'un pouce plus grande que celle au gauche qui est d'un pouce 5 lignes, sa distance à la pointe du museau étant de 9. p. 5. l. & la distance à la nuque de 2. p. 4. l.

On ne peut se tromper sur la nature & l'origine de cette excrescence : vraisemblablement elle a été causée par quelque coup de massue que ce poisson sur le point d'être pris aura reçu des pêcheurs, & dont la force ne l'aura pas étourdi assez pour empêcher sa fuite. Cependant la contusion faite au péricrane a dû occasionner cette espèce d'exostose cartilagineuse qui au reste est analogue à la nature des os du crâne de ce poisson, tandis que les exostoses qu'on trouve souvent d'un volume monstrueux aux mâchoires des brochets sont d'une substance osseuse très blanche & compacte.

Description d'une tête de Rhinoceros à deux cornes.

Les ossemens du Rhinoceros & des autres animaux gigantesques qu'on découvre en différens endroits de la Sibérie & dont la description a été donnée dans le XIII^e & XVII^e Tome des nouveaux Commentaires de l'Académie
Histoire de 1777. P. I. 1 *démie*

démie, ont réveillé l'attention des Physiciens observateurs, tant à l'égard des ces restes d'animaux étrangers épars dans les terres du Nord, que par rapport à l'histoire naturelle & à la description du Rhinoceros en particulier, qui malgré tout ce qu'en ont recueilli Mrs. de Buffon & Daubenton est encore bien éloignée de sa perfection.

Mr. Camper célèbre Anatomiste de Gröningue, qui joint aux connoissances profondes le mérite d'employer tous les avantages de sa fortune & de ses relations, pour se procurer les animaux rares des climats les plus éloignés, afin d'augmenter le fond des lumières que peut fournir l'Anatomie comparée, a communiqué à l'Académie une description détaillée d'une tête de Rhinoceros à deux cornes qui lui a été envoyée du Cap de Bonne-espérance. En attendant la publication de ce Mémoire & des planches qui y ont rapport, dont l'Académie a chargé un des ses Membres, nous rapporterons ici les différences essentielles que Mr. Camper a remarquées entre le crane de Rhinoceros d'Afrique & les cranes trouvés en Sibérie, dont Mr. Pallas avoit donné la description & qui semblent aussi avoir été armés de deux cornes.

Le Crane de Rhinoceros décrit par Mr. Camper a toutes les proportions, celles du museau surtout, plus raccourcies que ceux de Sibérie; de sorte que l'orbite se trouve au milieu de toute sa longueur qui est beaucoup moins grande, à proportion de la grosseur & de la force de sa charpente. L'arriere de ce crane avance moins au delà des condyles, qui l'attachent à la premiere vertebre du col: les arcs zygomatiques sont plus larges & plus robustes; & ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que l'extrémité de la cloison des narines, qui est entierement
offeuse

osseuse dans tous les cranes de Sibérie s'est trouvée dans le Rhinoceros du Cap entierement cartilagineuse, quoique les cornes considérables de celui-ci indiquassent un âge avancé. Aussi la voute osseuse qui sert de support à la grande corne, est bien moins considérable & moins large dans les figures de M. Camper que dans nos cranes de Sibérie. Les plus complets de ceux-ci, qui ont été décrits dans le XVII^e Volume des nouveaux Commentaires, semblent n'avoir eu dans chaque machoire que cinq dents molaires de chaque côté: ou en supposant que les alvéoles antérieures eussent servi à deux petites molaires, leur nombre n'auroit pas excédé six, au lieu que le crane du Rhinoceros d'Afrique en a sept bien conformées dans chaque rang, & que ces rangs avancent très près jusqu'à l'extrémité des machoires, qui dans les cranes de Sibérie sont beaucoup plus allongées.

Tant de différences essentielles, pour ne rien dire des autres moins considérables, qui se trouvent annotées dans la description de M. Camper, semblent prouver que le Rhinoceros d'Afrique est d'une espece tout à fait différente de celui des Indes & de l'Asie. C'est ce que le tems & les voyageurs Européens, dont l'esprit observateur se réveille de plus en plus, ne tarderont pas d'éclaircir.

Sur les Champignons, leur production & leur usage.

Le Pere *Cibot* Missionnaire à Pé-king & membre de l'Académie des Sciences, lui a envoyé un mémoire, dans lequel il rapporte fort au long les différentes opinions, qui se trouvent dans les livres Chinois, sur la nature & la production des mousses & des Champignons.

Le plus essentiel de ce mémoire consiste dans la méthode dont les Chinois se servent, afin de multiplier pour les usages économiques les Champignons & même les Agarics, dont les jeunes pousses font une partie de la nourriture de ce peuple. „ Il ne s'agit, dit le P. Cibot, ainsi que nous l'avons observé en parlant du *Mokou-sin*, (*) que d'enterrer dans une bonne terre, en un lieu tourné au midi & bien ombragé, des morceaux pourris du bois de l'arbre qu'on aura choisi, de les y laisser passer l'hiver & de les arroser souvent, surtout quand les chaleurs de l'été auront commencé. On couvrira ce bois d'un terreau de ses propres feuilles, ou on l'arrosera avec de l'eau, où l'on en aura fait bouillir & où l'on aura fait fondre du Nitre. C'est un moyen sûr pour avoir des Champignons dès la première année. „

Le R. P. appuie beaucoup sur l'opinion des Chinois que chaque arbre & même différentes parties d'un arbre, produisent une certaine espèce de champignons qui leur est propre; ce qu'on n'ignore point en Europe, comme il le croit, quoiqu'on ne puisse l'admettre qu'avec restriction. Les Chinois emploient surtout l'*Ormeau*, le *Murier*, le *Saule*, le *Peuplier*, le *Pin* & le *Chataigner*. Le savant Missionnaire continue ainsi „ Comme les Chinois mangent & trouvent très bons les Agarics de plusieurs arbres, ils ont imaginé aussi le moyen de s'en procurer une récolte aussi abondante qu'ils la désirent. Ce moyen consiste à enterrer à demi le tronc de l'espèce d'arbre qu'ils ont choisi, le plus vieux est le meilleur, dans un endroit ombragé & aussi tourné au midi; puis d'arroser souvent ce tronc & la terre d'alentour, surtout dans
„ les

(*) *Novi Commentarii Acad. Imp. Sc. Tom. X.X. pag. 371. seqq.*

„ les grandes chaleurs. Tout ce qui est hors de terre
 „ de ce tronc , principalement quand il a son écorce ,
 „ se couvre d'Agarics d'un bout à l'autre : on les cueille
 „ après quelques jours pour les manger , les confire au
 „ sel ou les faire sécher , & après peu de jours on en
 „ voit reparoitre d'autres. Ce qui dure ainsi pendant plu-
 „ sieurs mois : il faut avoir l'attention au reste de les cueil-
 „ lir après quelques jours , parcequ'ils se durcissent & de-
 „ viennent ligneux. „

Enfin il fait part du moyen dont usent les Chi-
 nois pour s'assurer de la salubrité des Champignons , &
 qui consiste à faire bouillir avec eux quelques morceaux
 de jonc , dont la moëlle prend une teinte noirâtre avec
 les especes de Champignons qui sont nuisibles à l'homme.
 Ceci mérite pour le bien de l'humanité d'être constaté
 par des expériences réitérées.

D'une nouvelle espece de *Ledum* particulière à l'Amérique septentrionale

Mémoires pag. 213.

Le genre de *Ledum* n'offroit jusqu'ici qu'une seule
 espece très commune dans les marais de tout le Nord de
 l'Europe & de l'Asie. Mr. *Bergius* nous en fait connoi-
 tre une nouvelle qu'on trouve dans l'Amérique septen-
 trionale , dont les feuilles ressemblent à celles du Buis , &
 constituent par là la principale différence d'avec l'espece
 vulgaire. Découverte qui ne laisse pas que d'être très
 intéressante pour la Botanique , surtout comme ce genre
 de plantes semble promettre des vertus médicinales, qu'on
 n'a pas encore approfondies par un nombre suffisant d'ex-
 périences.

Des Mulets dans le Regne végétal.

Mémoires pag. 215.

Mr. *Kochreuter* a commencé depuis quelque tems de communiquer à l'Académie une partie des expériences laborieuses & intéressantes qu'il continue de faire avec succès sur la production des plantes *Hybrides*, ou des mulets dans le regne végétal. Le dernier volume des Nouveaux Commentaires (*) contient celles qu'il a faites en mêlant quelques especes des genres du *Lychnis*, du *Cucubalus*, du *Silene*, & d'autres plantes de la même famille : & il a réussi surtout dans la production des individus mitoyens entre deux plantes de genres différens. (*Lychnis divica et Cucubalus viscosus.*)

Les expériences de ce même Physicien botaniste qui sont contenues dans ce premier semestre des Actes de l'Académie roulent sur différentes especes de *Digitales* ou Gands de Notre-Dame. La *Digitalis lutea* & la *Digitalis purpurea* se sont fécondées réciproquement, & ont produit de véritables mulets mitoyens entre ces deux especes, mais très supérieurs pour le cru & la durée de leurs racines aux especes primitives. Une production pareille a eu lieu entre la *Digitalis lutea* & la *Digitalis Thapsi*, & ces mulets ont été si semblables aux premiers, que l'on ne sauroit s'empêcher de prendre la *Digitalis purpurea* & la *Thapsi* pour des variétés d'une seule & même especes, changée par l'influence du climat ; ce qui se confirme encore par la fécondité des mulets produits entre ces deux especes.

Mr.

[(*) Novi Commentarii Acad. Imp. Sc. Tom. XX. pag. 431.

Mr. Koelreuter s'est aussi procuré des mulets en fécondant les parties femelles de la *Digitalis ferruginea*, par la poussière mâle de l'*ambigua*. Mais le mélange des deux especes connues sous les noms de *Digitalis lutea* & *ambigua*, ainsi que plusieurs autres expériences infructueuses qu'il rapporte, ne lui ont rien produit; ce qui confirme d'un autre côté, que ces deux especes considérées par quelques Botanistes comme de simples variétés, sont réellement diverses. Ce qui prouve encore d'avantage la règle qui a tenu bon dans toutes les expériences de notre habile Académicien: savoir que les especes qui n'engendrent rien ensemble, ou ne produisent que des mulets stériles par eux mêmes, ne sauroient jamais être regardées comme de simples variétés, mais qu'elles constituent plutôt des tiges ou des especes originellement différentes.

D'une Masse de fer natif trouvée en Sibérie.

Au mois de Mai l'Académie reçut de Sibérie la grande masse de fer naturellement malléable, dont Mr. le Prof. *Pallas* avoit fait la découverte pendant son séjour aux environs du Jénisei, & dont il a donné l'histoire & la description au troisieme volume des ses voyages.

Au dessous d'une écorce de mine de fer, dont toute la masse semble avoir été environnée, le fer malléable se découvre à la plus grande partie de la surface extérieure. Mais en emportant avec un ciseau d'acier de petits morceaux, on observe que vers l'intérieur le tissu de ce fer natif devient plus clair, & qu'une matiere vitreuse jaune & transparente qui remplit exactement les cavités de ce tissu y occupe de plus grands espaces. On en a même trouvé qui auroient pu contenir un oeuf de pigeon.

Il seroit à désirer qu'on fit couper toute la masse par le milieu , pour en reconnoître tout le tissu intérieur, qui peut - être pourroit offrir quelque substance ou quelque disposition de parties , intéressante pour la Minéralogie , & jeter quelque lumière sur la production de ce morceau unique & remarquable.

Au reste on n'y découvre aucune ressemblance avec des productions volcaniques.

Sur l'Alcali minéral natif qu'on trouve en Sibérie.

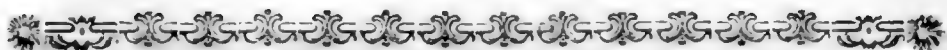
Mémoires pag. 197.

Jusqu'ici on avoit considéré l'Alcali minéral natif, qui est sans doute le véritable *Natron* des anciens, comme une production assez rare dans le regne minéral. L'on en fit cependant la découverte en différens endroits de l'Europe & surtout dans les landes de la Hongrie. Mais aucun pays n'en produit si abondamment & si généralement que la Sibérie & tous les déserts Asiatiques.

Mr. *Géorgi*, qui a recueilli toutes les observations faites à ce sujet pendant les derniers voyages entrepris sous la Direction de l'Académie pour la connoissance de l'Histoire naturelle de l'Empire Russe, y joint les siennes, & les expériences , par lesquelles il a pu se convaincre que cet Alcali se produit continuellement par la destruction naturelle du sel marin , & du sel de Glauber dont les lacs & les marais salés de nos Provinces méridionales abondent. Il indique la grande utilité que l'on pourroit retirer de ces Alcalis naturels , dont la Russie possède un fond inépuisable & qui peut servir à tous les emplois de

la

la soude de commerce. Il donne enfin un procédé, probablement venu de la Chine, par lequel on se procure dans les fonderies de Nertschinsk un sel, qui remplit toutes les fonctions du Borax dans les opérations métallurgiques; procédé qui semble jeter un nouveau jour sur la production encore douteuse du *Tinkal*, qui nous vient des Indes.



MÉTÉOROLOGIE.

L'Extrait des observations météorologiques, qui termine ce premier tome des Actes Académiques, a la même forme que ceux qui se trouvent insérés dans les quatre derniers volumes des nouveaux Commentaires.

L'Auteur ne fait qu'exposer ses observations, & s'il en tire des conclusions, elles n'ont pour but que la comparaison du temps qu'il a fait chaque mois & chaque année, avec celui qu'on a observé soit dans les années précédentes, soit dans d'autres régions de la terre. C'est pour faciliter surtout cette dernière comparaison de ses observations avec celles des météorologues étrangers, qu'il fait toutes ses annotations suivant le nouveau stile.

Les instrumens dont il se sert sont en petit nombre, mais construits avec justesse & exposés convenablement.

Le Barometre est simple, & son échelle divisée en pouces de France dont 12 constituent un pied de Roi: chaque pouce est subdivisé en 20 parties égales; de sorte qu'on y peut estimer la hauteur du mercure jusqu'à une centieme partie de pouce près. Ces centiemes parties dans les hauteurs barométriques sont désignées par les deux dernières figures & séparées du nombre des pouces entiers par un point: Ainsi 28.23, marque une hauteur de 28 pouces entiers & de $\frac{23}{100}$ de pouce.

Pour

Pour réduire ces parties centiemes à des *lignes* dont 12 font un pouce, on n'a qu'à les multiplier par le nombre 12, & retrancher du produit les deux dernières figures qui seront des centiemes d'une ligne. Ensuite pour ceux qui se servent de Barometres dont les échelles sont divisées en pouces anglois, il suffit de remarquer que la hauteur de 28 pouces de Paris répond à $29 \frac{97}{100}$ pouces de Londres & que 2 pouces des premiers font à peu près $2 \frac{13}{100}$ pouces des derniers.

Le Barometre est placé à une hauteur de 18 pieds au dessus du niveau moyen de la Néva à une distance d'environ 5000 pieds de son embouchure ou du Golfe de Finlande.

Enfin l'observateur représente toutes les variations du Barometre qu'il observe par une ligne courbe, dont les appliquées correspondent aux élévations & les abscisses aux jours & aux heures de l'observation. Cette méthode facilite de beaucoup la recherche de la plus grande & de la plus petite élévation, celle de la moyenne & des autres conséquences qu'on trouve dans ses extraits.

Le Thermometre est à mercure & construit suivant la méthode de Mr. *Delisle*. On compte les degrés en descendant du point de l'eau bouillante qui est marqué par *zero* (0), & chaque degré occupe la dix - millieme partie de tout le volume de mercure contenu dans la boule & dans le tuyau de l'instrument. De cette maniere il s'est trouvé que le terme de la congélation naturelle est au 150^{me} degré, & celui du froid artificiel que Fahrenheit avoit employé dans ses Thermometres, au 176¹/₂ degré.

Le 0 de *Delisle* répond donc à 80 de Réaumur & à 212 de Fahrenheit : ensuite le 150 de *Delisle* coïncide

avec le 0 de Réaumur & le 32 de Fahrenheit ; d'où 15 degrés de Delisle font 8 degrés de Réaumur, ou 18 degrés de Fahrenheit. De là il seroit aisé de dresser des tables de comparaison pour réduire les degrés du Thermometre de Delisle à ceux de Réaumur ou de Fahrenheit. Mais il suffit d'indiquer ici qu'on en trouve une très complete dans le XVIII^e Tome des nouveaux Commentaires page 674.

Enfin le Thermometre dont l'Auteur de l'extrait susmentionné se sert, est exposé en plein air vers le Nord : en sorte que le Soleil n'y puisse donner en aucune maniere, que vers les 4 heures du soir. Après ce tems s'il arrive à l'Observateur de vouloir consulter le degré du froid, ou du chaud, il recourt à un second Thermometre de la même construction, qui étant exposé vers l'Est est à l'abri des rayons du Soleil dès le midi.

Comparaison des cinq derniers hyvers

Année 1772 . . 73 — 1776 . . 77.

	1772 — — 1773	1773 — — 1774	1774 — — 1775	1775 — — 1776	1776 — — 1777
Il neigeoit pour la premiere fois -	Oct. 20	Oct. 20	Oct. 5	Nov. 5	Oct. 29
— — — pour la derniere fois -	Avr. 2	Mars. 15	Juin. 2	Mai 5	Avrl. 27
L'intervalle entre ces deux termes	164 jours	146 jours	240 jours	182 jours	180 jours
Il geloit pour la premiere fois - -	Oct. 20	Oct. 20	Oct. 1	Oct. 30	Oct. 20
— — — pour la derniere fois - -	Avrl. 12	Avrl. 23	Mai. 13	Mai. 3	Avrl. 27
L'intervalle entre ces deux termes	174 jours	125 jours	225 jours	186 jours	189 jours
Pendant ce dernier intervalle de tems la Neva fut prise pendant - -	114 jours	123 jours	167 jours	165 jours	170 jours
Savoir depuis le jusqu'au	Dec. 23 Avrl. 16	Nov. 19 Avrl. 21	Nov. 7 Avrl. 22	Nov. 12 Avrl. 25	Nov. 12 Avrl. 30
Le plus grand froid - - - - - le	203 d. Jan. 29	191 d. Fevr. 10	191 d. Jan. 24	200 d. Jan. 18	189 d. Fevr. 2
Le moindre froid - - - - - le	134 d. Nov. 9	136 d. Nov. 1	134 d. Oct. 10	136 d. Avrl. 10	133 d. Avrl. 13
Le froid a été le matin & le soir plus grand que 200.	2 jours	0 jours	0 jours	0 jours	0 jours
ensuite entre 190 & 200 d.	4 —	2 —	3 —	6 —	0 —
180 & 190 d.	14 —	17 —	14 —	13 —	5 —
170 & 180 d.	18 —	22 —	30 —	27 —	33 —
160 & 170 d.	31 —	48 —	61 —	39 —	65 —
150 & 160 d.	59 —	65 —	73 —	71 —	79 —
Ainsi au dessous de 150 d.	128 jours	154 jours	181 jours	156 jours	182 jours
Le froid à midi a été moindre que de 130 d.	0 jours	2 jours	1 jours	0 jours	0 jours
ensuite entre 140 & 130 d.	22 —	9 —	26 —	8 —	5 —
150 & 140 d.	62 —	73 —	75 —	79 —	52 —
Ainsi au dessus de 150 d.	84 jours	84 jours	102 jours	87 jours	57 jours
Le froid moyen , * : matin & soir	160 d.	161 d.	161 d.	162 d.	162 d.
— — — — — à midi - - -	154 d.	153 d.	155 d.	154 d.	155 d.
Le froid moyen du matin & du soir depuis le 1er Octobre jusqu'au 1er Juin a été - - - - -	154 d.	155 d.	159 d.	156 d.	157 d.
& depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai - - - - -	159 d.	161 d.	162 d.	158 d.	162 d.

Comparaison des cinq derniers hyvers

Année 1772..73 — 1776..77.

	1772 — — 1773	1773 — — 1774	1774 — — 1775	1775 — — 1776	1776 — — 1777
L'Etat du Barometre depuis le 1 ^{er} Octobre jusqu'au 1 ^{er} Avril, ce qui fait un intervalle de 182 à 183 jours.					
La plus grande élévation	28.78	28.88	29.11	28.88	28.88
le Fevr. 10		Nov. 23	Janv. 25	Nov. 1	Fevr. 6
La plus petite élévation	26.98	26.85	27.12	27.16	27.02
le Janv. 10		Dec. 31	Mars 26	Fevr. 6	Nov. 22
La variation totale	1.80	2.03	1.99	1.72	1.86
Le milieu	27.88	27.86	28.11	28.02	27.95
La hauteur moyenne (**)	28.14	28.10	28.12	28.06	28.15
Le Barometre a été au dessus de					
27. $\frac{2}{15}$	135 jours	124 jours	130 jours	133 jours	136 jours
28. —	115 —	103 —	113 —	107 —	122 —
28. $\frac{1}{15}$	97 —	87 —	93 —	87 —	103 —
Direction des Vents pendant ce même intervalle de tems de 182 jours					
N	34 jours	32 jours	40 jours	24 jours	31 jours
NO	27 —	31 —	27 —	8 —	11 —
O	6 —	6 —	10 —	24 —	18 —
SO	13 —	7 —	9 —	20 —	29 —
S	14 —	22 —	6 —	21 —	21 —
SW	25 —	24 —	19 —	30 —	24 —
W	28 —	24 —	26 —	36 —	20 —
NW	35 —	36 —	45 —	20 —	28 —
	182 jours	182 jours	182 jours	183 jours	182 jours
Les vents forts depuis le 1 ^{er} Octobre jusqu'au 1 ^{er} Avril ont soufflé du N	2 jours	3 jours	3 jours	2 jours	0 jours
NO	0 —	0 —	3 —	0 —	1 —
O	2 —	0 —	1 —	4 —	1 —
SO	1 —	1 —	2 —	3 —	4 —
S	2 —	3 —	2 —	0 —	2 —
SW	3 —	2 —	6 —	10 —	5 —
W	5 —	5 —	9 —	2 —	1 —
NW	3 —	6 —	7 —	2 —	3 —
Somme des jours de grand vent .	18 jours	20 jours	33 jours	23 jours	17 jours

Pendant

Comparaison des cinq derniers hyvers

Année 1772..73 — 1776..77.

	1772 — — 1773	1773 — — 1774	1774 — — 1775	1775 — — 1776	1776 — — 1777
Pendant le même intervalle de 182 jours, ou depuis le 1er Oct. jusqu'au 1er Avril: il y a eu					
Jours entierement sereins - - -	41 jours	51 jours	23 jours	19 jours	34 jours
Jours entierement couverts - - -	70 —	83 —	93 —	91 —	84 —
Brouillards - - - - -	30 —	31 —	24 —	23 —	21 —
Jours de neige - - - - -	52 —	60 —	81 —	66 —	75 —
Jours de pluie - - - - -	34 —	21 —	21 —	39 —	16 —

(*) On trouve le degré du froid moyen, en divisant la somme de toutes les hauteurs thermométriques par le nombre des observations.

(**) De même la hauteur moyenne du Barometre est la somme de toutes les hauteurs observées dans des intervalles de temps égaux, divisée par leur nombre.

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le Cours du premier Sémestre de l'Année 1777.

Dans l'Assemblée du Lundi 9 Janvier, le Secrétaire de Conférences a présenté les *Essais sur la typométrie* par Mr. *Preuschen* Diacre à Carlsruh, avec quelques épreuves d'une carte topographique du Canton de Bâle, qui a été composée de types & exécutée par Mr. *Hase* fondeur de lettres à Bâle.

Le Vendredi 13 Janvier, le Secrétaire a présenté le premier Cahier des Nouvelles Littéraires par Mr. *Jean Bernoulli*, Astronome Royal à Berlin :

—— un imprimé allemand sur la latitude & la longitude de la ville de *Breslau* par Mr. *Scheibel*

—— l'Ouvrage du D. *Glafer* à Suhla, sur les indices qui décelent les mines de sel fossile cachées sous terre aux environs de Suhla. Enfin

—— le Prospectus d'une traduction allemande des voyages de *Jean Otter* en Turquie & en Perse.

Le 16 Janvier. Mr. le Prof. *Güldenstädt* a communiqué des lettres que Mrs. *Sokolof* & *Hablitz* Correspondans de l'Académie lui avoient écrites d'Astrachan.

Le 27 Janvier. Le Secrétaire a lu un fragment d'une lettre adressée à Mr. de *Grimm* par le Baron de *Dalberg*, Chanoine capitulaire de la Métropole de Mayence & Stadthalter du district d'Erfort. Il s'agit d'établir une correspondance entre l'Académie Impériale & celle des Sciences qui est à Erfort. Cette proposition a été accep-

tée

tée avec un empressement égal à l'utilité publique qui résulte de semblables liaisons.

Le 3 Fevrier. Le Secrétaire a communiqué la réponse très gracieuse que le Roi de Prusse a faite à Mr. *Léonard Euler* son pere sur la lettre que celui-ci avoit écrite à *Sa Majesté* sur Son aggrégation à l'Académie.

Le 6 Fevrier. Mr. le Prof. *Pallas* a lu une lettre du Conseiller d'Etat *Müller* à Copenhague qui envoie & présente à l'Académie le Prospectus de la Zoologie Danoise.

Le Secrétaire a lu un rapport adressé à l'Académie par l'Interprete *Jäbrig* qui est envoyé auprès des nations Mongales pour observer leurs coutumes & étudier leurs langues, leur histoire & leur religion.

Le 10 Fevrier. Mr. le Prof. *Pallas* a lu un rapport fait à l'Académie par Mrs. *Sokolof* & *Hablitzl'*, qui contient la description d'un esturgeon monstrueux de la grande espee, que Mr. le Général *de Jacobi*, Gouverneur d'Astrachan a envoyé à l'Académie (*).

Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. de *Baczko* établi à Schippenbeil en Prusse, qui prétend avoir inventé des machines pour découvrir la longitude en mer & mesurer la vitesse des vents.

Le 17. Fevrier. Le Secrétaire a communiqué une lettre adressée à Mr. *de Domaschnef* par le Prince *Dimitri de Golitsin* Envoyé extraordinaire auprès de Leurs Hautes Puissances à la Haye, qui envoie de la part du Professeur *Pierre Camper* une dissertation latine sur le crane d'un Rhinoceros d'Afrique à double corne (**).

Le 6 Mars. Le Secrétaire a lu une lettre adressée à l'Académie par l'Institut d'éducation à Dessau, qui présente quelques exemplaires du troisieme Cahier de ses Archives. Le

(*) Pag. 80.

(**) Pag. 81.

Le 13 Mars. Mr. le Prof. *Göldenstädt* a lu un rapport à l'Académie envoyé par Mr. *Hablitzl* son Correspondent à Astrachan.

Le 17 Mars. Mr. le Conseiller d'Etat actuel *de Stehlin* a communiqué une lettre de Mr. le Prof. *Kratzenstein* à Copenhague relative à la vente d'une Bibliothèque.

Le 20 Mars. Le Secrétaire a lu un rapport de l'Interprète *Jabrig*, qui envoie à l'Académie la traduction de deux écrits Mongales en Allemand.

Le 27 Mars. Le Sieur *Riechner*, Mécanicien, a fait présenter & soumettre à l'Examen de l'Académie le modèle d'une machine pour scier les poutres en planches (*).

Le Secrétaire a lu la réponse de Mr. *Preufchen*, Diacre à Carlsruh, contenant des éclaircissements sur la Typométrie que l'Académie lui avoit demandés. Elle étoit accompagnée d'une petite brochure, par laquelle un nommé *Christin*, horloger dans la même ville, annonce diverses machines de nouvelle invention, curieuses & surtout utiles pour la navigation.

— — une lettre de Mr. de *Magellan*, Gentil-homme Portugais à Londres, qui communique diverses nouvelles littéraires très intéressantes.

Le 31 Mars. Mr. le Prof. *Göldenstädt* a lu une lettre de M. l'Abbé *Toaldo* à Padoue, qui communique le résultat & les conclusions intéressantes, qu'il a tirées des observations barométriques & thermométriques, faites à Padoue pendant une suite non interrompue de plus de 40 années.

Le 7 Avril. Mr. le Prof. *Krafft* a remis la description du grand Planétaire qui se trouve à la Bibliothèque de l'Académie, avec une instruction pour s'en servir.

Le 24 Avril. Mr. le Prof. *Lepechin* a communiqué une lettre de Mr. le Prof. *Spielmann* à Strasbourg, qui

(*) Pag. 65.

qui envoie à l'Académie une collection de 500 diverses especes de semences.

Le 28 Avril. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. *Leibl*, Baillif près de Manheim, qui prétend avoir découvert l'or potable & le remede universel.

Le 1 Mai. Mrs. les Académiciens chargés de composer un Prospectus détaillé du grand ouvrage de Géographie de Russie que l'Académie s'est engagée à donner au Public, ont remis les résultats de leurs délibérations, & la premiere ebauche du Prospectus même avec leurs remarques & observations (*).

Le Secrétaire a communiqué la lettre circulaire des Mrs. *Gianesini* & *Faccioli* à Venise, qui annocent leur entreprise de construire un Planétaire qui doit montrer avec la plus grande exactitude tous les mouvemens des Astres.

Le 5 Mai. Mr. le Prof. *Pallas* a lu la réponse de Mr. le Prof. *Camper* concernant le crane & les ossemens de *Rhinoceros*, & contenant encore diverses observations très intéressantes sur des objets de Zoologie & d'Anatomie comparée.

Le 8 Mai. Mr. le Prof. *Roumovsky* a communiqué une lettre du Conseiller d'Etat Mr. *Diakof*, qui annonce qu'on vient d'achever le conducteur de la foudre appliqué au Clocher de l'Eglise de St. Pierre & St. Paul dans la Forteresse, & que les Académiciens qui en avoient fourni l'idée & la construction sont invités à se rendre sur le lieu pour y examiner si les ouvriers ont exactement suivi & observé les instructions qui leur avoient été prescrites (**).

Le 15 Mai. Le Secrétaire a lu une lettre de Mr. le Prof. *Spielmann* de Strasbourg, qui envoie à l'Académie ses ouvrages & diverses dissertations séparées; entre

n 2

autres

(*) Ce Prospectus sera inséré au Séminestre suivant.

(**) On en fera mention dans le Volume qui contiendra l'Histoire de l'année 1776.

autres ses Institutions de Matière médicale en latin & ses mémoires sur l'air fixe.

Le 19 Mai. Le Secrétaire a lu quelques passages d'une lettre du Conseiller Aulique Mr. *Kaestner* à Göttingue, qui envoie un imprimé allemand sur la vie & les mérites de *Daniel Speckle*, célèbre Architecte Ingénieur du XVI^e Siècle.

Le 29 Mai. Mr le Prof. *Pallas* a communiqué une lettre de Mr. le Baron de *Meidniger* à Vienne, sur la découverte très importante de préparer les bois & en général toutes sortes de matières combustibles : en sorte qu'elles ne puissent plus s'enflammer ni communiquer le feu aux corps qu'elles touchent.

Le 2 Juin. Le Secrétaire a présenté l'Histoire & les Mémoires de la Société formée à Amsterdam en faveur des Noyés. Tom. II, 2^{de} Partie.

Le 9 Juin. Mr. le Prof. *Pallas* a remis un Paquet de Semences exotiques, que Mr. le Prof. *Bourmann* a envoyées pour le Jardin Académique.

Le 26 Juin. Le Secrétaire a lu une lettre du Curateur & des Préposés de l'Institut d'éducation à Dessau, concernant une nouvelle Edition de la Philosophie pratique du célèbre Prof. *Bafedow*.

Le Conseiller d'Etat actuel Mr. de *Steblin* a remis le Programme publié par la Société Hollandoise des Sciences de Harlem pour le Prix de 1777.

Le 30 Juin. Le Secrétaire a présenté un Prospectus imprimé d'un Ouvrage nouveau intitulé *Fragmens de Physionomie*, ou l'Auteur, Mr. *Lavater* à Zurich se propose d'exciter l'homme à connoître & à aimer ses semblables. Traduction françoise du grand ouvrage allemand, mais rédigé & corrigé considérablement par l'Auteur même.

MATHEMATICA.

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I.

A

DL



DIIVDICATIO
MAXIME PROBABILIS
PLVRIVM OBSERVATIONVM DISCREPANTIVM
ATQVE
VERISIMILLIMA INDVCTIO INDE FORMANDA.

Auctore
DANIELE BERNOVLLI.

§. I.



Astronomis potissimum, genti sagacissime scrupulosae, diiudicandas proponam haesitationes, quas mihi aliquoties feci, de regula, ad quam confugiunt omnes, quoties plures de eadem re factas prae se habent observationes aliquantulum inter se discrepantes; scilicet observationes tunc omnes in vnam colligunt summam, quam postmodum diuidunt per observationum numerum; quod a diuisione oritur, pro vera accipiunt quantitate quaesita, donec aliunde meliora et certiora fuerint edocti. Hoc modo si singulae observationes eiusdem veluti ponderis censeantur, incidunt in centrum grauitatis,

A 2

quod

quod pro vera obiecti explorati positione accipiunt; haec quoque regula conuenit cum ea, qua vtuntur in arte coniectandi, si omnes aberrationes in obseruando commissae aequae facile contingere supponantur.

§. 2. An vero recte statuitur, singulas obseruationes eiusdem esse ponderis vel momenti, siue in quosuis errores aequae pronas esse? an errores aliquot graduum aequae facile committentur atque alii totidem minutorum? an eadem vbique probabilitas? absque plane foret haec affirmatio; haec procul dubio causa est, quod malint astronomi prorsus reiicere obseruationes, quas iudicant nimium a veritate recedere, caeteras vero retineant, imo plane ad eundem censum referant: Id vero dum faciunt, satis et plus satis monstrant, multum abesse, vt idem statuunt pretium singulis a se factis obseruationibus, dum alias reiiciunt totas, alias omnes non solum retineant sed insuper eodem modulo metiantur; nec video limites, quos ultra citraue sint vel penitus reiiciendae vel integrae retinendae; quin forte euenire potest, vt obseruatio, quae reiicitur, optimam praestitura fuisset reliquis correctionem. Attamen non improbo vbiquaque consilium reiiciendae vnus alteriusue obseruationis, imo probo, quoties inter obseruandum sinistri aliquid acciderit, quod per se ipsum protinus scrupulum iniiciat obseruatori, antequam consuluerit euentum eumque cum caeteris obseruationibus contulerit; si nihil tale habeat, quod conqueratur, existimo admittendas esse singulas obseruationes, qualescunque fuerint; modo obseruator sibi sit conscius omnis adhibitae industriae.

§. 3. Liceat obseruatorem comparare cum sagittario, tela sua in propositam metam coniiciente, adhibita omni, qua pollet, industria. Detur ipsi pro meta integra linea verticalis, ita vt singulae aberrationes sub vnica directione horizontali aestimandae veniant; putetur meta linearis depicta

picta in medio plano verticali, perpendiculariter ad axem visionis erecto, totumque planum ab utroque latere in fascias verticales, angustas sed singulas eiusdem latitudinis, diuisum sit. Quod si nunc persaepe sagitta vibrata fuerit et pro quouis iactu locus illisionis examinatus eiusque distantia a meta verticali in charta notetur, etiamsi euentus minime possit exacte praedici, multa tamen sunt, quae cum ratione praesumi debent et quae imprimis ad rem nostram facere poterunt, si modo nulli alii committantur errores, quam qui in utramque partem aequae faciles sunt et quorum euentus penitus incerti, sola veluti sorte haud vitabili deciduntur; sic in astronomia pro errore non habetur, quodcumque *a priori* correctionem admittit. Factis omnibus quas theoria docet correctionibus, quod tunc reliquum est pro conciliandis singulis obseruationibus aliquantulum inter se discrepantibus, hoc solius artis coniectandi opus est; quid proprie inter obseruandum acciderit, hoc, per ipsam hypothesin, profunde ignoramus, sed ipsa haec ignorantia asylum erit, ad quod confugere cogimur, dum consistimus in eo, non quod verissimum sed quod verissimillimum, nec certum sed probabilissimum, ut ars illa docet. An vero status iste semper et ubique competat medio arithmetico adhiberi solito, non sine ratione dubitari potest.

§. 4. Errores, in obseruando ineuitabiles, in singulas utique cadere possunt obseruationes; attamen vnaquaevis obseruatio suo gaudet iure nec liceret vllam vim ipsi inferre, si sola facta fuisset; igitur quaevis obseruatio per se facta atque tecta sit oportet; nulli aliud statuendum est pretium, quam quod ipsi compertum fuit; quia vero sibi contradicunt, pretium statuendum erit toti obseruationum complexui intactis partibus: Sic singulis obseruationibus certus quidam error attribuitur; existimo autem, quod inter in-

finitos modos, quibus observationum errores contingere poterunt, is feligendus sit, qui maximo probabilitatis gradu, pro integro observationum complexu, donatus fuerit.

Regulam hanc quam propouo vltro admittent omnes, si modo pro quavis observatione probabilitatis gradus ratione puncti, quod pro vero assumitur, definiri possit. Equidem libens fateor, hanc postremam conditionem haud esse determinatam, simul autem mihi persuadeo, non esse omnia perinde incerta, atque meliora dari posse, quam quae a regula communiter recepta expectari possint; videamus, annon quaedam iure merito praesumi debeant in hoc argumento, quae non nihil ad maiorem probabilitatem conferant. Examen incipiam a generalioribus.

§. 5. Si innumeros veluti iactus fecerit sagittarius, de quo §. 3. verba feci, et quidem omnes tota sua, qua pollet, industria; sagittae ferient modo fasciam primam metae proximam, modo secundam, modo tertiam et sic porro, idque perinde intelligendum est de vtroque latere an dextro an sinistro; annon per se clarum est, tanto densiores et frequentiores praesumendos esse ictus in vnamquamvis fasciam, quanto propius haec fuerit posita a meta? si omnes in plano erecto loci vtcunque a meta distantes essent aequae expositi, nihil valeret dexterrimus iaculator praecacco. Id tamen statuunt tacite, qui regula vtuntur communi in aestimandis variis observationibus discrepantibus, quando nullo discrimine omnes habent. Hoc igitur modo vnus cuiusuis aberrationis gradus probabilitatis *a posteriori* determinari aliquatenus posset, cum dubium non sit pro magno iactuum numero, quin probabilitas sit vt numerus iactuum impingentium in fasciam ad datam a meta distantiam positam.

Porro non est dubium, quin maxima aberratio suos habeat limites, quos nunquam transgrediatur et quidem
tanto

tanto angustiores, quanto exercitior atque dexterior fuerit obseruator. Extra hosce limites omnis probabilitas nulla est; a limitibus versus mediam metam increfcet probabilitas atque maxima erit in ipsa hac meta.

§. 6. Praefatae annotationes aliquam sistunt ideam de scala probabilitatum pro omnibus aberrationibus, quam quisque obseruator sibi met ipsi formare debeat, non quidem ad amissim veram, sed tamen naturae quaestionis haud male accommodatam: meta proposita est veluti centrum virium, in quod nituntur obseruatores; his vero conatibus innumerac opponuntur imperfectiones minimaque alia obstacula latitantia, quae paruulos iniicere possunt obseruationibus errores fortuitos, alios conspirantes ad eandem plagam, alios sibi inuicem contrarios, prouti fortuna fuerit plus minusue infesta. Intelligitur hinc, aliquam esse relationem inter errores commissos, et ipsam veram positionem centri virium ita vt pro alia metae positione aliter aestimandus sit fortunae euentus: hoc modo incidimus proprie in problema, quo determinanda est positio metae quam maxime probabilis ex cognitis aliquot ictuum locis. Ex allatis sequitur, quod ante omnia scala concipienda sit inter varias distantias a centro virium, quod in ipso scopo vel meta positum erit, et respondentes probabilitates: vtcunque vaga sit huius scalae determinatio, videtur tamen variis subiici axiomatibus, quibus si satisfaciamus, non possumus non in meliora incidere, quam si ponamus singulas aberrationes vtcunque magnas aequa facilitate committi atque adeo aequa probabilitate esse donatas. Concipiamus lineam rectam, in qua diuersa puncta sint positione data, quae nimirum diuersarum obseruationum euentus indicent; notetur in hac linea punctum aliquod intermedium, quod pro vera positione determinanda accipiat; ex singulis punctis erigantur perpendiculares, quae probabilitates, cuius puncto conueni-

venientes exprimant; si curva ducatur per extremitates singularum perpendicularium, haec nobis scala erit probabilitatum, de qua sermo est.

§. 7. Ad huius descriptionis sensum mihi verisimile fit, sequentia scalae probabilitatum vix denegari posse lemmata.

- (a) Ex eo, quod aberrationes a vero puncto intermedio ad utramque partem sint aequae-faciles, sequitur, scalam duos habituram esse ramos perfecte similes et aequales.
- (b) Frequentiores utique erunt atque adeo probabiliores prope a centro virium observationes simulque tanto rariores, quanto magis ab isto centro recedunt: ergo scala ab utraque parte verget ad lineam rectam, in quam coniecta censemus loca observata.
- (c) Intensitas probabilitatis maxima erit in medio, ubi centrum virium locatum supponimus, eritque tangens scalae pro hoc puncto parallela cum praefata linea recta.
- (d) Si verum est, quod autumo, observationes vel inauspicatissimas suos habere limites, quos quisque observator sibi et ipsi optime statuet, sequitur scalam recte ordinatam in ipsis limitibus esse pertineturam ad observationum lineam; etenim pro ambabus extremitatibus evanescit tota probabilitas errorque maior fit impossibilis.
- (e) Denique ex eo, quod ambae aberrationes maximae tanquam limites censentur inter id, quod contingere potest et quod fieri nequit, oportet ut ultima scalae particula, ab utroque latere, praecipitanter tendat ad lineam, in qua puncta observata locantur, sic ut tangentes in punctis extremis fiant ad eandem lineam propemodum perpendiculares et ut ipsa
scala

scala indicet, transgressum fieri vix posse ultra limites suppositos: nec tamen haec conditio omnem requireret rigorem, si modo haud nimis confidenter erroribus limites posueris.

§. 8. Quod si iam super linea, quae totum aberrationum possibilium campum repraesentat, veluti super axe construatur semi ellipsis cuiuscunque parametri, haec profecto haud male praefatis conditionibus satisfaciet; parameter autem ellipsis ideo arbitraria est, quod hic tantum de proportionem inter probabilitates, pro quavis aberratione militantes, sermo sit: utcunque elongata vel compressa fuerit ellipsis super eodem axe constructa, idem praestabit officium, quod indicat non esse, ut nimis simus solliciti de accurata scalae descriptione. Licebit adeoque ipsum adhibere circulum, non ut geometricè verum sed ut vero multo propiorem, quam est linea recta indefinita axi parallela, quae singulas observationes supponit aequè ponderosas atque probabiles, utcunque a vera positione distantes: est quoque haec scala circularis aptissima calculis numericis; hoc interim in antecessum monuisse e re erit, utramque hypothesein ad idem recidere, quoties singulae aberrationes pro infinite parvis habentur: ita quoque conspirant ambae hypotheses, si radius semicirculi auxiliaris ponatur infinite magnus aequè ac si aberrationibus nulli limites essent circumscripti. Hoc modo si aberratio observationis a vera positione consideretur tanquam sinus aliquius arcus circularis, repraesentabitur probabilitas illius observationis per cosinum eiusdem arcus. Liceat semicirculum subsidiarium, quem nunc descripsi, epitheto *moderatoris* insignire: ubi autem centrum ponitur istius semicirculi, ibi vera positio, observationibus quam maxime conueniens, statuenda est. Equidem precaria aliquo vsque, at certissime communi praefenda est hypothesis nostra nec vnquam in-

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. B telli-

telligentibus periculosa erit, quoniam euentus, quem statuent, semper erit maiori probabilitate donatus. quam si methodo communi adhaerescant: cum ex natura rei decisio certa non detur, nil superest, quam vt probabilius praeferratur minus probabili.

§. 9. Methodum istam philosophandi triuiali quodam illustrabo exemplo: conciliandae proprie sunt obseruationes discrepantes; ergo de differentia obseruationum agitur; quod si autem aleator vna cum alea tres fecerit iactus, quorum secundus primum vno puncto, tertius secundum duobus punctis excesserit, iactus tribus modis oriri potuerunt, nempe 1. 2. 4 vel 2. 3. 5 vel 3. 4. 6; horum iactuum nullus duobus caeteris est praeferendus; singuli sunt per se aequae probabiles; si praeferas modum medio loco positum, nempe 2. 3. 5, id absque vlla ratione feceris; simile quid contingit, si obseruationes pro parte euentuales, siue astronomicas siue alius generis, pro aequae probabilibus haberi velis; iam vero finge aleatorem iactibus duarum alearum, ter iterum repetitis, eundem plane habuisse euentum; tunc octo diuersis modis hunc euentum obtinere potuit, nempe 2. 3. 5; 3. 4. 6; 4. 5. 7; 5. 6. 8; 6. 7. 9; 7. 8. 10; 8. 9. 11 et 9. 10. 12: at multum abest, vt eorum singuli sint aequae probabiles; notum enim est, probabilitates respectiuas progredi vt numeri 8; 30; 72; 100; 120; 90; 40 et 12; ex hac autem scala cognita iure concludo potiori, modum contigisse quintum ceu maxima probabilitate donatum, quam vllum alium, atque sic tres iactus binarum alearum fuisse 6, 7 et 9; nemo tamen inficias ibit, potuisse forte fortuna modum primo loco positum 2, 3 et 5 contingere, vtut tantum decima quinta probabilitatis parte, quae modo quinto competit, donatum; sic nihil aliud facio quam quod, seligere coactus, seligam quod maxime est probabile. Quamvis istud exemplum nondum plane quadret ad argumentum

nostrum, intelligitur tamen ex illo, quid disquisitio probabilitatum ad diiudicandos casus conferre possit. Iam vero rem ipsam propius aggredior.

§. 10. Velim ante omnia, ut quisquis observator probe secum perpendat atque aestimet maximum errorem, quem nunquam se transgressurum, quotiescunque observationem repetat, moraliter certus sit, si vel omnes Deos Deasque offendat iratas; sit ipsemet dexteritatis suae iudex nec severus nec blandus. Nec tamen admodum multum refert siue congruum siue quodammodo temerarium ea de re tulerit iudicium: tum radium *circuli moderatoris* faciat maximo errori praememorato aequalem: sit radius iste $= r$ atque proinde latitudo totius campi ambigui $= 2r$; si hac de re praecepta desideres omnibus observatoribus communia, suadeo, ut iudicium demum componas ad ipsas, quas feceris, observationes: si enim differentiam inter duas observationes extremas duplices, sat tuto, mea sententia, ea vteris pro diametro circuli moderatoris vel, quod eodem recidit, facies radium aequalem differentiae inter duas observationes extremas: imo sufficiet fortasse sesquuplicare hanc differentiam ad formandam diametrum circuli, si plures institutae fuerint observationes; ego quidem duplicarem pro tribus vel quatuor observationibus, ac sesquuplicarem pro pluribus. Ne vero haec vagatio quemquam offendat, haud abs re erit monuisse, quod si infinitum faciamus semicirculum nostrum moderatorem; tunc demum incidamus in regulam communiter adhibitam pro medio arithmetico; si vero circulum diminuamus quantum fieri absque contradictione potest, obtineamus mediam inter duas observationes extremas, quam regulam pro pluribus observationibus institutis, minus plerumque fallere vidi, quam credideram nondum explorata re.

§. 11. His omnibus praeparatis denique superest, ut positio circuli moderatoris determinetur, quandoquidem in

huius circuli centro singulae obseruationes veluti concentratae censerī debeant. Deducitur autem praefata positio ex hoc principio, quod totus obseruationum complexus pro illo situ facilius proindeque probabilius contingat, quam pro vlla alia circuli positione: habebimus sic verum probabilitatis gradum pro toto obseruationum complexu, si pro singulis obseruationibus institutis respondentem probabilitatem notemus atque omnes probabilitates inter se multiplicemus, plane vt feci §. 9. Deinde productum, quod a multiplicatione oritur, differentietur tandemque hoc differentiale ponatur $= 0$. Hoc modo aequationem obtinebimus, cuius radix dabit distantiam centri a dato aliquo loco.

Ponatur radius circuli moderatoris $= r$; minima obseruatio $= A$; secunda $= A + a$; tertia $= A + b$; quarta $= A + c$; etc. distantia centri semicirculi moderatoris a minima obseruatione $= x$, ita vt $A + x$ denotet quantitatem, quae probabilissime ex omnibus obseruationibus praesumenda sit; erit, per hypothesin nostram, probabilitas, pro sola prima obseruatione, exprimenda per $\sqrt{rr - xx}$; pro secunda obseruatione per $\sqrt{rr - (x - a)^2}$; deinde per $\sqrt{rr - (x - b)^2}$; postea per $\sqrt{rr - (x - c)^2}$ et sic porro. Postmodum velim secundum praecepta artis coniectandi, vt singulae probabilitates inter se multiplicentur, quo facto habebitur

$$\sqrt{rr - xx} \times \sqrt{rr - (x - a)^2} \times \sqrt{rr - (x - b)^2} \times \sqrt{rr - (x - c)^2} \times \text{etc.}$$

Denique si huius producti differentiale ponatur $= 0$, dabit aequatio, vi nostrarum hypothesium, valorem quaesitum x ceu maxima probabilitate donatum. Quoniam vero praefata quantitas ad statum maximi valoris reducenda est, patet, fore simul eius quadratum ad hunc statum reductum: licebit igitur, commodioris calculi ergo, formula vti ex meris terminis rationalibus composita, nempe

$$(rr - xx) \times (rr - (x - a)^2) \times (rr - (x - b)^2) \times (rr - (x - c)^2) \times \text{etc.}$$

cuius

cuius differentiale iterum ponendum est $= 0$; caeterum tot sumendi sunt factores, quot observationes factae fuerunt.

§. 12. Si vnica instituta fuerit observatio, aliter non possumus, quin ipsam observationem pro vera accipiamus; id vero etiam indicat hypothesis nostra; si enim primus factor $rr - xx$ solus accipiat, habebitur $-2x dx = 0$ vel $x = 0$ proindeque $A + x = A$: sic nostra cum communi hypothesis coincidit hoc casu.

Si duae factae fuerint observationes A et $A + a$, accipiendi sunt duo factores, scilicet $(rr - xx) \times (rr - (x - a)^2)$ vel $r^4 - 2rrxx + x^4 + 2arrx - aarr - 2ax^3 + aaxx$, cuius quantitatis differentiale $= -4rrx dx + 4x^3 dx + 2arr dx - 6axx dx + 2aax dx = 0$ siue $2x^3 - 3axx - 2rrx + aax + arr = 0$, quae aequatio pro radice utili dat $x = \frac{1}{2}a$ atque $A + x = A + \frac{1}{2}a$, quod idem rursus hypothesis communis docet. Haecque coincidentia subsistit, qualiscunque adhibeatur radius circuli moderatoris, quod satis indicat pro pluribus institutis observationibus, magnitudinem circuli nostri moderatoris ad amissim exactam, nec in huiusmodi negotio requiri nec expectandam esse. Id vero, quod haud dissimulabo, sinistrum est, quod pro pluribus observationibus calculus requiratur prolixissimus, ita ut vix aliter quam *in abstracto* discussiones haec proponere audeam. Liceat saltem theoriam trium observationum, quae maximi est momenti, exponere.

§. 13. Quando praesto sunt tres observationes, nempe A ; $A + a$ et $A + b$, habebimus tres factores

$$(rr - xx) \times (rr - x - a^2) \times (rr - x - b^2),$$

pro quibus status valoris *maximi* est definiendus. Si vero hi factores actu inter se multiplicentur, obtinebitur

$$\begin{aligned} & r^6 + 2ar^4x - 3r^4xx - 4arrx^3 + 3rrx^4 + 2ax^5 - x^6 \\ & -aar^4 - 2abbrrx + 2bbrrxx + 2abbx^3 - bbx^4 + 2bx^5 \\ & -bbr^4 + 2br^4x - aabbxx - 4brrx^3 - 4abx^4 \\ & + aabbrr - 2aabrrx + 4abrxx + 2aabx^3 - aax^4 \\ & + 2aarrxx \end{aligned}$$

Si haec quantitas differentietur, tumque, postquam diuisa fuit per elementum dx , pro statu maximi valoris ponatur $= 0$, sequens habebitur aequatio generalis pro institutis tribus obseruationibus qualibuscunque

$$\begin{aligned} & 2ar^4 - br^4x - 12arrxx + 12rrx^3 + 10ax^4 - 6x^5 = 0. \\ & -2abbrr + 4bbrrx + 6abbxx - 4bbx^3 + 10bx^4 \\ & + 2br^4 - 2aabbx - 12brrxx - 16abx^3 \\ & - 2aabrr + 8abrrx + 6aabxx - 4aax^3 \\ & + 4aarrx \end{aligned}$$

Radix huius aequationis, quae quidem est quinque dimensionum et ex viginti terminis constat, dabit distantiam centri circuli moderatoris a prima obseruatione atque quantitas $A+x$ dabit valorem probabilissime ex factis tribus obseruationibus deducendum.

§. 14. Pauci fortasse erunt, nisi omni cum attentione principiorum nostrorum energiam perpenderint, qui vllam aliquam suspicentur relationem inter aequationem enormem leuissimamque quae videtur quaestiunculam; statuitur enim communiter $x = \frac{a+b}{3}$. Attamen non male respondet aequatio nostra omnibus notionibus aliunde obuiis, quarum nunc aliquas exponam.

(a) Si statuatur radius circuli moderatoris infinitus prae vagantibus quantitibus a et b , reiiciendi sunt omnes termini praeter illos, in quibus littera r ad maximam dimensionem ascendit; sic integra aequatio ad hanc simplicissimam reducitur $2ar^4 + 2br^4 - 6r^4x = 0$ siue $x = \frac{a+b}{3}$: ergo regula communis continetur in aequatione nostra: Quod si vero definitio nostra, paragrapho decimo exposita, perpendicularur, apparebit, quam incongrua sit hypothesis pro radio infinito et quam manifeste alia aptior ipsi substitui possit.

(b) Si ponatur $b = 2a$, perspicuum est fore $x = a$ qualiscunque valor detur radio r idque rursus commune erit

erit vtrique theoriae. Videamus igitur, quid pro hoc casu doceat aequatio nostra; haec facta substitutione pro quantitate b , abit in hanc alteram

$$\begin{aligned} bar^4 - 6r^4x - 36arrxx + 12rrx^3 + 30ax^4 - 6x^5 = 0. \\ - 12a^3rr + 36aarrx + 36a^3xx - 52aax^3 \\ - 8a^4x \end{aligned}$$

Huic autem aequationi, qualiscunque fuerit valor r , omnino satisfacit valor $x=a$, quod ipsa rei natura postulat pro hoc casu.

(c) Si fuerit $b=-a$, oportet vtique vt fiat $x=0$, quiscunque sit valor r ; id ipsum vero egregie itidem indicat aequatio nostra, quae nunc abit in hanc alteram

$$\begin{aligned} -6r^4x + 12rrx^3 - 6x^5 = 0 \\ -2a^4x + 8aax^3 \end{aligned}$$

haec autem primo intuitu monstrat radicem vtilem $x=0$.

§. 15. Haec et alia similia corollaria satis confirmant verum nexum principiorum nostrorum cum argumento, quod commentamur, vtcunque enormis appareat, in quaestione tam simplici, inuenta aequatio. Progredior ad exempla, in quibus radius circuli moderatoris nec infinitus nec adiaphorus sit: huc autem pertinent fere omnia: In his exemplis semper differt noua ista theoria a communi et tanto magis differt, quanto magis observatio intermedia accedit ad alterutram extremam: In his discussionibus cardo negotii vertitur: Igitur recurrere debemus ad exempla pure numerica

Exemplum 1. Assumamus tres observationes

A ; $A+0,2000$ et $A+1,0000$, ita vt sit

$a=0,2000$ et $b=1,0000$;

ponaturque pro valore ex his tribus observationibus quam probabilissime praesumendo $A+x$; dabit regula communis $x=0,4000$: Videamus nouam, meo iudicio, probabiliorem;

vtamur

vtamur autem positione $r = 1,000$ (conf. §. 10.). His positis emergit sequens aequatio pure numerica

$$1,9200 - 0,3200x - 12,9600xx + 4,6400x^3 \\ + 12,0000x^4 - 6x^5 = 0$$

pro qua inuenitur, quam proxime, $x = 0,4427$, qui valor alterum, communiter receptum, plusquam decima eius parte excedit. Notabilis iste excessus exinde originem duxit, quod obseruatio media multum admodum propior sit primae, quam tertiae. Hinc facile praesumitur excessum in defectum mutatum iri, si media obseruatio propior sit tertiae quam primae, istumque defectum tanto minorem fore, quanto minor assumpta fuerit differentia obseruationis mediae inter vtramque distantiam a duabus obseruationibus extremis. Vt coniecturam experirer, retentis caeteris valoribus, solam mutavi obseruationem mediam, vt sequitur.

Exemplum 2. Sit igitur nunc $a = 0,5600$, posito rursus $r = b = 1,0000$; habebimus pro regula communiter recepta, $x = 0,5200$. Videamus de nostra: Dabit nunc aequatio paragraphi decimi tertii sequentem aequationem numericam

$$1,3728 + 3,1072x - 13,4784xx - 2,2144x^3 \\ + 15,6000x^4 - 6x^5 = 0;$$

cui proxime satisfacit $x = 0,5128$: Nunc igitur valor x minor fit secundum principia nostra, quam est medius arithmeticus communiter receptus; differentia autem inter vtrumque valorem iam admodum exigua est, quippe $= 0,0072$, plane vt in antecessum rem fore praesumeram. Hinc etiam videtur maximum discrimen inter vtramque aestimationem fore, si forte fortuna contingerit vt duae obseruationes perfecte coinciderent, sola tertia euagante: id duobus diuersis modis obtinetur, nempe si ponatur vel $a = 0$ vel $a = b$. Euentum pro vtroque casu exponam.

Exem-

Exemplum 3. Sit $a=0$ retentis reliquis denominationibus; habebimus (facta diuisione aequationis per $2b-2x$) hanc aequationem numericam:

$$1.0000 - 6.0000xx - 2.0000x^2 + 3.0000x^3 = 0,$$

cui proxime satisfacit valor $x=0.3977$, qui ab regula communi reperitur $x=0.3333$. prior alterum superat quantitate $0,0644$: Quod si vero ponatur $a=b$, oritur aequatio (postquam diuisa fuit per $2x$) quae sequitur:

$$4.0000 - 6.0000x - 6.0000xx + 10.0000x^2 - 3.0000x^3 = 0.$$

huic nunc aequationi satisfacit valor $x=0.6022$ quam proxime, qui communiter statuitur $=0,6666$; Ergo differentia inter vtrumque valorem est iterum, vt ante, $=0,0644$; nunc autem nouus noster valor minor est communi, cum in priori casu esset maior, vnde apparet methodum nostram collimare ad punctum aliquod intermedium melius quam methodus communis: huiusmodi criteria haud parum commendant methodum quam propono; hanc animaduersionem paulo accuratius discutiam, vt saltem argumentum, quod dicitur ad hominem, habeatur in re, quae demonstrationem geometricam haud admittit.

§. 16. Si vtrumque casum in exemplo tertio expositum inter se combinemus, ita vt sex institutas fuisse observationes putemus, nempe $A.A.A+b$ et $A+b.A+b.A$, patet sic tres observationes facere pro valore A et totidem pro valore $A+b$; vidimus autem §. 12. in hoc casu vtramque methodum indicare medium valorem quaesitum $=A+\frac{1}{2}b$ siue, pro exemplo tertio, $=A+0,5000$, aut, omissa quantitate permanente A , simpliciter $=0,5000$: de hoc valore, ex vnitis sex observationibus deducto, nemo dubium mouebit: nunc vero hasce sex observationes resolvamus in duas alias triades, scilicet $A.A.A.+1,0000$. atque $A+\frac{1}{2}1,0000.A+\frac{1}{2}1,0000.A$: hoc modo dabit regula communiter recepta, pro prima triade, reiecta iterum quan-

titate A, dabit, inquam, pro prima triade valorem 0,3333 et pro secunda triade 0,6666; vterque a medio valore 0,5000 differt quantitate 0,1666, alter in defectu alter in excessu: nostra autem methodus eosdem pro quavis triade, valores indicat 0,3977 et 0,6022, quorum vterque a medio valore 0,5000 differt 0,1022 et quidem pariter alter in excessu alter in defectu. Sic itaque theoria communis, pro quavis observationum triade seorsim sumpta errorem committeret 0,1666, nostra vero 0,1022 notabiliter minorem: huiusmodi criteria alia quam plurima afferri possent, quibus principia nostra magis stabiliantur; at vereor ne nimius videar in adstruenda re, quae certam omnique titulo perfectam determinationem haud admittit, nec enim ad altiora contendimus quam ut diiudicare possimus id quod magis ab eo quod minus probabile est.

§. 17. Si quae vltior perfectio expectanda sit, consistet in accuratiori et strictiori determinatione scalae moderatricis eiusque amplitudine: De hoc rei momento aliquas superaddam notationes. Ex praemissis perpenstationibus liquet, non multum admodum recedere aestimationes nostras ab regula communiter recepta: agitur ergo de correctione aliqua, quam admittere videtur haec regula; istam correctionem subministrant ipsi discessus observationum a vero puncto quaesito, qui ita ordinari possunt, pro quavis data scalae moderatricis amplitudine, ut probabilissime conveniant cum hoc puncto. At equidem nihil video, quo amplitudo praememoratae scalae strictè determinari possit, nisi quod submonui §. 10. Si quis autem observator, virium suarum ultra quam par erat diffusus, nimium auxerit magnitudinem semicirculi moderatoris, hic quidem non omnem tulerit opem sed certiore; si, e contrario, nimium constrinxerit hanc scalam, incidet caeteris paribus in correctionem paulo maiorem et aliquantulum minus probabi-

babilem. Prudentia non minus quam perspicacia hic opus esse videtur. Si ipsis institutis observationibus uti velis ad formandam a posteriori aestimationem de adhibenda amplitudine scalae moderatricis, haud imprudenter actum erit, si tecum perpenderis, an feliciter vel infeliciter observationes cessasse statuendum sit; quanto plus fortunae dederis, tanto minus dexteritati in observando adhibitae tribues, tantoque proinde maiorem circulum moderatorem adhibebis. In paragrapho decimo quinto assumsi $r = b$, siue radium circuli moderatoris aequalem distantiae inter duas observationes extremas: fateor tamen, re melius perpensa, hancce radii magnitudinem mihi videri nimia aliquantulum confidentia positam; tutior utique futura fuisset positio $r = \frac{1}{2}b$ vel etiam $r = 2b$; sub hac positione correctio prodiret notabiliter minor at tanto certior maioriq̃ue fiducia adhibenda.

§. 18. Si quae efficacia insit principiis nostris, etiam si metaphysicis potius quam mathematicis, iure merito exinde concludemus, nunquam aut saltem rarissime nec sine omni adhibita circumspectione reiiciendam esse aliquam observationem, qua de re sententiam meam in antecessum aperui.

§. 2. totus enim observationum complexus nihil aliud est quam euentus fortuitus dexteritate observatoris modificatus et intra certos fines coercitus. Inter tres observationes contingere utique potest, quamvis casu rarissimo, ut duae, mirum in modum, inter se conspirent, tertia autem, infauista forte, ab ambabus prioribus longissime recedat. Id vero si mihi contigerit, atque si certus fuero, me haud nimium coarctasse limites maximorum errorum possibilium aut nimium dexteritati mea fidisse, non haesitarem totius rei examen ad principia nostra reuocare ex iisque aestimationem formare: Modo observator pro singulis observationibus

C 2

nibus parem adhibuerit industriam, quiscunque fuerit earum euentus; velim vt omnium aequa ratio habeatur.

§. 19. Vnicum superest monendum de scala, quam adhibui, moderatrice; vsurpauimus semicirculum, tanquam sic satis respondentem conditionibus §. 7. expositis simulque calculis subducendis aptissimum; notabile interim est, infinitas dari alias curuas, quae plane ad eandem aequationem, quam in fine paragraphi decimi tertii exposui, perducant: Pro scala circulari fecimus paragrapho vndecimo probabilitates respectiue proportionales applicatis $\sqrt{rr - xx}$; $\sqrt{rr - (x - a)^2}$; $\sqrt{rr - (x - b)^2}$. Quod si autem, semicirculi loco, supponamus arcum parabolicum super linea $2r$ constructum, cuius axis per medium huius lineae perpendiculariter transeat, habebimus, retentis iisdem denominationibus, applicatas quasuis siue probabilitates inde expressas aequales

$$\frac{g}{rr} \times \sqrt{rr - xx}; \frac{g}{rr} \times \sqrt{rr - a - x^2}; \frac{g}{rr} \times \sqrt{rr - b - x^2} \text{ etc.}$$

vbi per nouam literam g intelligo maximam applicatam pro abscissa $x = 0$. Quia vero factor $\frac{g}{rr}$ omnibus terminis communis est, poterit huic factori simpliciter vnitas substitui, quando productum ex omnibus et singulis probabilitatibus ad *maximum* reducendum est; vnde sequitur parametrum parabolaе arbitrariam manere; monui etiam in praefato paragrapho vndecimo, quod si idem productum ad statum suum *maximum* fuit reductum, simul omnes eius dignitates praerogatiua maximi vel minimi gaudeant; hinc liquet vtramque scalam, parabolicam aequae ac circularem, ad eundem valorem quaesitum x perducere. Sed et porro perspicuum est, innumeras alias scalas idem praestare officium; erunt autem omnes eius indolis vt a summitate sua in vtramque partem ad lineam $2r$, in quam singulae observationes necessario incidere ponuntur, accedant eamque inter-

interfacent. Ergo omnes huiusmodi scalae ad scopum nostrum collimant, nec est vt hac in re nimis simus meticulosi, ad meliora si non ad optimum contendisse contenti.

§. 20. Quod denique attinet ad incommodam fereque monstrosam aequationis nostrae fundamentalis §. 13. expositae formam, poterit et huic incommodo aliquatenus occurrì; dico enim fore propemodum radicem vtilem

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a^2 - 3ab + 3b^2}{27r^2}$$

prius membrum nil aliud est quam commune medium arithmeticum pro tribus obseruationibus, alterum indicat proxime correctionem, quam principia nostra porro exigunt: ista quidem radix tanto accuratius cum aequatione §. 13. conueniet, quanto maior assumpta fuerit amplitudo scalae moderatricis indicata per $2r$; absit tamen, vt sola calculi commoditate inducì valorem literae r praeter necessitatem augeamus, quia omne augmentum inutile momento correctionis nostrae aliquid detrahit: Nec minus periculosum foret nimium viribus suis in obseruando tribuere atque sic radium r vltra quam par est contrahere: *Certi sunt fines, quos vltra citraque nequit subsistere rectum.* conf. §. 10. Docent vel ipsa principia nostra fieri nunquam posse vt sit $r < \frac{1}{2}b$, quia haec positio manifestam implicaret contradictionem, dum id ipsum impossibile poneretur, quod contigisse supponitur. Caeterum haud dissimulaui quae in argumentatione nostra paullo liberius assumpta fuerunt: crediderim tamen criteria nostra institutarum obseruationum non omnia propterea esse reiicienda: hoc saltem mihi persuadeo, *regulam communem pro tribus obseruationibus peccare aliquantulum in defectu, quoties $a < \frac{1}{2}b$ atque in excessu si $a > \frac{1}{2}b$, nec vnquam certius adhiberi, quam cum obseruatio intermedia proxime aequidistat a duabus extremis.* Deinde mihi probabile videtur aequationem nostram §. 13. tutius

et melius determinare positionem feligendam, modo radius circuli moderatoris haud temere diminuatur vltra limites, quos vires obseruatoris permittunt: conf. §. 17. Quaestio autem, quam tractauimus, proprie haec est, vt datis tribus pluribusue sagittae iactibus, in linea recta notatis, determinetur positio probabilissima loci, quem sagittarius pro scopo suo habebat. Sed vnusquisque obseruator harum rerum intelligens pro natura argumenti, quod prae manibus habet, alia atque alia sibi formabit criteria, scopo suo haud inutilia, si modo regulis, ex arte combinatoria depromptis, caute vtatur.

Recapitulatio. Problema nostrum per se vtique est indeterminatum, quandoquidem pendet ab vsu, experientia, dexteritate obseruatoris, a praecisione instrumentorum, ab acie sensuum, ab innumeris denique circumstantiis plus minus fauentibus: horum omnium ratio habebitur assumpta amplitudine aberrationum campi, qua de re, omni adhibita circumspectione, sententiam meam aperui. Deinde energia sortis fortuitae exploranda est, quae pro quauis aberratione militet, quia vtile est vt cuius aberratione sua, pro natura rei, conueniens assignetur probabilitas; haec equidem probabilitatum scala rursus incerta atque indeterminata manet, si accurata desideretur, attamen plures manifestat, ex ipsa rei natura, proprietates, quibus si satis fiat, poterit pro sufficienter cognita haberi, quod plura tentamina me docuerunt. Inde modus innotescit exprimendi secundum praecepta in arte coniectandi demonstrata, probabilitatem absolutam cuius systemati obseruationum dato conuenientem pro quouis situ assumpto eiusdem systematis. Sic aliud non superest, quam vt ille seligatur propositi systematis situs, qui maxima gaudet probabilitate. Mirabile prorsus mihi visum est, quod aequatio algebraica, qua situs iste definitur, tam longe petita, ad quintam dimensionem

sionem, pro tribus tantum observationibus, assurgens, permagno terminorum numero expressa, ex principiis nunquam vsitatis deducta, denique nihil indicet, vndecunque examinetur, quod vlllo modo displicere possit, multo minus ad absurdum aliquod perducatur: quod in quouis exemplo ab calculo emergit semper parum ab eo, quod methodus communis docet, differt si modo haud temere impingatur in praecepta, quae praescripsi: quoties tres observationes datae ita sunt comparatae vt media ab extremis fere aequaliter distet, absque scrupulo regulae communi adhaerebimus; at si ambo intervalla sint notabiliter inaequalia, consultius existimo ad theoriam nostram confugere, si modo ad mentem praeceptorum, quae exposui, omnique adhibita prudentia, aequi fines aberrationum campo statuti fuerint. Caeterum haec omnia velim vt trutina potius methaphysica quam mathematica perpendantur: Qui maxime principiis nostris offenditur, si modo maximum simul statuatur aberrationum possibilium campum, nil porro quod redarguat habebit.

OBSERVATIONES IN PRAECEDENTEM DISSERTATIONEM

Illustr. Bernoulli.

Auctore

L. EULERO.

§. I.

Quaestionem haud exigui momenti hic tractat Illustris *Bernoulli*, quemadmodum quantitatem incognitam ex pluribus observationibus inter se parumper discrepantibus concludi oporteat. Cuius quaestionis indoles, quo clarius perspiciatur, ponamus cuiuspiam loci eleuationem poli inueniri debere, plures autem observationes hunc in finem institutas praebere tales valores inter se discrepantes:

$$\Pi + a, \Pi + b, \Pi + c, \Pi + d, \text{ etc.}$$

vbi litterae a, b, c, d , etc. v. gr. in minutis secundis expressae habeantur, ex quibus vera huius loci eleuatio poli, quae sit $\Pi + x$, sit concludenda. Vulgo quidem haec quantitas x per medium arithmeticum inter omnes quantitates a, b, c, d , etc. assignari solet; vnde si observationem numerus fuerit $= n$, erit $x = \frac{a + b + c + d + \text{etc.}}{n}$.

§. 2. In hac autem regula manifesto assumitur omnes observationes pari gradu bonitatis esse praeditas. Si enim aliae aliis essent magis exactae, huius discriminis ratio utique in computum duci deberet. Quanquam autem ex circumstantiis nulla pateat ratio, cur vni harum observationum maius pretium sittribuendum quam reliquis: tamen Celeberrimus Auctor obseruat, his observationibus eo maiorem gradum bonitatis adiudicari debere, quo propius ad veritatem accesserint, quemadmodum etiam vulgo eiusmodi observationes quae nimis a veritate recedere cen-

sen-

sentur prorsus reiici solent. Totum igitur negotium huc redit, vt indicetur, quomodo gradus bonitatis singulis obseruationibus conueniens sit aestimandus.

§. 3. Secundum mentem autem Illustris Auctoris aberrationem cuiusque obseruationis a veritate quasi iam esset cognita perpendi conueniet, quae cum pro prima obseruatione sit $x-a$; pro secunda $x-b$; pro tertia $x-c$ etc. defectum cuiusque obseruationis non tam ex his differentiis quam earum quadratis aestimari oportet; quandoquidem defectus ipse idem est statuendus, siue obseruatio in excessu siue defectu aberrauerit. Hinc ergo si quaequam obseruatio cum veritate perfecte conueniat, eius defectus erit nullus: vnde si istius obseruationis gradus bonitatis indicetur per rr , euident est, gradum bonitatis primae obseruationis indicari debere per $rr-(x-a)^2$, secundae per $rr-(x-b)^2$, tertiae per $rr-(x-c)^2$ et ita porro, vbi litterae r talis valor tribui debet, vt pro huiusmodi obseruatione, quae tantum non reiicienda videatur, gradus bonitatis euanescat. Quare si sumamus hoc contingere in obseruatione, quae dedisset $\Pi+u$, quoniam eius gradus bonitatis foret $rr-(x-u)^2$, statui vbique debebit $rr=(x-u)^2$.

§. 4. His circa gradum bonitatis cuiusque obseruationis stabilitis Illustris Auctor in subsidium vocat sequens principium, cuius quidem nullam affert rationem: quod productum omnium illarum formularum, quibus gradus bonitatis singularum obseruationum exprimitur, valorem *maximum* fortiri debeat. Ex hoc ergo principio iubet istud productum differentiare, eiusque differentiale nihilo aequare, quandoquidem tum ex hac aequatione verus valor x fit proditurus; id quod nonnullis exemplis, ad ternas obseruationes accommodatis, illustrat, vnde eiusmodi valores pro x deriuat, qui veritati admodum conformes videantur.

§. 5. Istud autem principium pro tribus tantum observationibus deduxit ad aequationem quinti ordinis, cuius radicem x assignare oportebat; et si quis idem principium ad quatuor observationes accommodare vellet, perueniret ad aequationem septimi gradus: quinque autem observationes deducerent ad aequationem noni gradus et ita porro. Vnde manifesto liquet, hanc methodum nullo modo ad casus, ubi plures observationes proponuntur, in usum vocari posse, id quod etiam Illustris Auctor ingenue concedit, dum totam dissertationem tanquam speculationem mere metaphysicam in medium attulerit.

§. 6. Verum quia Illustris Auctor hoc principium *maximi* nulla demonstratione corroborauit, haud aegre feret, si dubia quaedam contra illud proposuero. Namque assumamus inter observationes propositas vnam reperiri, quae tantum non reiici debuisset, cuius ergo gradus bonitatis esset quam minimus, euidens est, productum omnium memoratarum formularum etiam ad nihilum redigi, ita ut nullo modo amplius pro maximo haberi possit, quantumvis magnum etiam fuisset omissa ista observatione. Principia autem artis coniectandi manifesto declarant, eundem valorem quantitatis incognitae x prodire debere, siue talis observatio omni bonitate destituta in calculum introducatur, siue penitus reiiciatur.

§. 7. Arbitror autem in hac quaestione opus non esse ad principium maximorum confugere, cum praecepta certissima artis coniectandi prorsus sufficiant ad omnes huiusmodi quaestiones resoluendas. Si enim primae observationi, quae dederat $\Pi + a$ tribuamus pretium seu gradum bonitatis $= \alpha$, secundae $= \beta$, tertiae $= \gamma$, ex regulis huius artis quantitas incognita x ita determinatur, ut sit

$$x = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + \text{etc.}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}}$$

Hinc

Hinc igitur erit

$\alpha(x-a) + \beta(x-b) + \gamma(x-c) + \delta(x-d) + \text{etc.} = 0$.
Manifestum autem est, si omnes gradus bonitatis inter se essent aequales, numerusque observationum foret $=n$, tum reperiri $x = \frac{a+b+c+d+\text{etc.}}{n}$ quemadmodum regula vulgaris exhibet. Ex quo intelligitur, quatenus gradus bonitatis inter se discrepat, eatenus diuersos valores pro quantitate incognita x prodire posse.

§. 8. Cum igitur, vt Illustris Auctor ipse affirmat, gradus bonitatis litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, indicati sint

$$\alpha = rr - (x-a)^2, \beta = rr - (x-b)^2, \\ \gamma = rr - (x-c)^2, \delta = rr - (x-d)^2, \text{ etc.}$$

posterior forma aequationis inuentae erit:

$$rr(x-a) + rr(x-b) + rr(x-c) + \text{etc.} = 0 \\ -(x-a)^3 - (x-b)^3 - (x-c)^3 - \text{etc.} = 0.$$

Vnde si numerus observationum $=n$ et breuitatis gratia ponatur

$$a + b + c + d + \text{etc.} = A \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} = B \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} = C$$

ista aequatio redigetur ad sequentem formam satis simplicem:

$$nrrx - Arr - nx^3 + 3Axx - 3Bx + C = 0$$

sicque peruenimus ad aequationem cubicam, ex qua incognitam x facile definire licebit, quantuscunque fuerit observationum numerus n .

§. 9. Quod si quantitatem r quasi infinitam spectemus, qui est casus, quo omnibus observationibus idem bonitatis gradus tribui solet, neglectis reliquis terminis ex hac aequatione statim deducitur

$$x = \frac{A}{n} = \frac{a+b+c+d+\text{etc.}}{n},$$

prorsus vt regula, vulgo adhiberi solita, postulat. Quod si iam istum valorem designemus littera p , et in ipsis observationibus loco Π scribamus $\Pi + p$, singulos numeros a, b, c, d , etc. eadem quantitate p diminui oportebit, sicque summa omnium, quam posuimus A , nunc erit $A = 0$. Ne autem hic nouas litteras in calculum introducamus, statim quantitatem Π ita constituere poterimus, vt si valores singularum observationum statuantur

$$\Pi + a, \Pi + b, \Pi + c, \Pi + d, \text{ etc.}$$

summa litterarum $a + b, + c + d + \text{ etc.}$ futura sit $= 0$; tum igitur pro quantitate x inuenienda habebitur ista aequatio multo simplicior:

$$nx^3 - nrrx + 3Bx - C = 0$$

vnde si r esset infinitum, sequeretur $x = 0$; hincque euidentis est, si ista aequatio plures habeat radices reales, tum minimam pro x sumi debere, ita vt verus valor quaestus futurus sit $= \Pi + x$.

§. 10. At vero eandem hanc quaestionem adeo ad aequationem quadraticam reuocare licebit introducendo eiusmodi observationem, quae, perpenſis omnibus circumstantiis, reiicienda videretur, propterea quod nullum gradum bonitatis esset habitura. Sit igitur talis observatio $\Pi + u$, et quia per hypothesin eius gradus bonitatis, qui est $rr - (x - u)^2$ debet esse nullus, fiet $rr = (x - u)^2$. Hic autem valor in aequationem postremo loco inuentam introductus producet hanc formam:

$$2nuxx - nuux + 3Bx - C = 0.$$

In qua aequatione terminum $-nuux$ vt maximum spectari conueniet, ita vt aequatio hac forma referri queat:

$$x(nuu - 3B - 2nux) = -C,$$

vnde sequitur

$$x = \frac{-C}{nuu - 3B - 2nux},$$

vbi si loco x valor modo inuentus substituitur, pro x reperiemus hanc fractionem continuam:

$$x = \frac{-C}{n u u - 3 B + 2 n u C} \frac{1}{\frac{n u u - 3 B + 2 n u C}{n u u - 3 B + 2 n u C} \frac{1}{\frac{n u u - 3 B + 2 n u C}{n u u - 3 B + 2 n u C} \frac{1}{\text{etc.}}}}$$

quae forma mox verum ipsius x valorem declarabit.

§. 11. Quoniam Illustris Auctor suam solutionem eiusmodi principio superstruxit, quod proprietate cuiuspiam maximi esset praeditum, nunc haud difficile erit eiusmodi formulam analyticam exhibere. quae maximo aequalis posita verum valorem ipsius x esset ostensura. Utamur hunc in finem forma primum inuenta

$$rr(x-a) + rr(x-b) + rr(x-c) + \text{etc.} - (x-a)^3 - (x-b)^3 - (x-c)^3 - \text{etc.} = 0$$

quae spectetur tanquam differentiale cuiuspiam formulae, quae ad maximum reduci debeat; ipsa igitur haec formula prodibit, si haec expressio in dx ducta integretur. Multiplicemus autem per $4 dx$ et integratio dabit

$$2rr(x-a)^2 + 2rr(x-b)^2 + 2rr(x-c)^2 + \text{etc.} - (x-a)^4 - (x-b)^4 - (x-c)^4 - \text{etc.} + C.$$

Haec autem forma, si pro constante sumamus $-nr^4$, existente n numero obseruationum, mutatis signis manifesto hinc nascitur ista formula:

$$(rr - (x-a)^2)^2 + (rr - (x-b)^2)^2 + (rr - (x-c)^2)^2 + \text{etc.}$$

§. 12. Loco ergo formulae, quam Ill. *Bernoulli* maximo aequari debere censuit nunc assecuti sumus aliam formulam ad quaestionis naturam maxime accommodatam, quae ad maximum reducta, verum praebet valorem ipsius x , quandoquidem ista formula obtinetur, si quadrata omnium graduum bonitatis in vnam summam colligantur.

§. 13. Vt nostrae methodi exemplum proferamus, consideremus observationes, quibus Tomo I. priorum Academiae Commentariorum longitudo observatorii Petropolitani est conclusa ex differentia meridianorum inter observatorium Parisinum et Petropolitanum, quae ita referuntur

$$\begin{array}{ll} \text{I. } 1^{\circ}. 51'. 50''. & \text{IV. } 1^{\circ}. 51'. 50''. \\ \text{II. } 1. 51. 52. & \text{V. } 1. 51. 50. \\ \text{III. } 1. 51. 39. & \text{VI. } 1. 51. 50. \end{array}$$

Ex quibus medium arithmeticum more solito sumtum dat $1^{\circ}. 51'. 48\frac{1}{2}''$.

§. 14. Nunc vt formulas nostras ad hunc casum applicemus, sumamus $\Pi = 1^{\circ}. 51'. 48\frac{1}{2}''$. eruntque valores sex nostrarum litterarum a, b, c, d, e, f sequentes

$$a = 1\frac{1}{2}, b = 3\frac{1}{2}, c = -9\frac{1}{2}, d = 1\frac{1}{2}, e = 1\frac{1}{2}, f = 1\frac{1}{2}$$

vnde utique earum summa fit $A = 0$; tum vero inuenitur summa quadratorum $B = \frac{223}{2}$; summa cuborum vero $C = -801$. Vnde aequatio nostra ob $n = 6$ erit

$$12uxx - 6uwx + 801 = 0 \\ + 334\frac{1}{2}.$$

§. 15. Nunc numerum u ex eiusmodi casu definiamus; quem Auctor observationum reiciendum censuit; talis erat $1^{\circ}. 52'. 20''$, vnde fit $u = 31\frac{1}{2}$. Ponamus autem esse $u = 30$, et aequatio nostra quadratica erit

$$360xx - 5065\frac{1}{2}x + 801 = 0$$

cuius loco in numeris rotundioribus scribere licet

$$36xx = 500x - 80 \text{ vnde fit } x = \frac{250 \pm \sqrt{50690}}{36}$$

hincque colligitur vel

$$x = \frac{250 + 244}{36} = 14. \text{ vel } x = \frac{250 - 244}{36} = \frac{1}{9},$$

qui posterior valor solus locum habere potest, quem etiam

am statim colligere potuiffemus neglecto in aequatione primo termino, vnde fuisset valor $x = \frac{8}{30} = \frac{1}{4}$ proxime; sicque hinc erit differentia meridianorum quaesita $= 1^{\circ}.51'.48\frac{2}{3}''$.

§. 16. Deinde etiam reiecta fuerat obseruatio, quae dederat $1^{\circ}.51'.0''$, vnde fit $u = -48\frac{1}{2}$. Suma ur autem $u = -48''$ et aequatio nostra erit

$$-576xx - 13489\frac{1}{2}x + 801 = 0,$$

vnde neglecto primo termino fit $x = \frac{8}{135} = \frac{1}{17}$. Quoniam autem haec obseruatio reiici meruisset, si fuisset circiter $u = -300$, hinc subducto vt ante calculo, produisset $x = \frac{1}{6}$ circiter; vnde patet hoc casu regula communi nos contentos esse potuisse, cum nequidem vnum minutum secundum spectari possit.

§. 17. Quoniam autem inter has obseruationes tertia tantopere a reliquis discrepat, fortasse conueniet non procul ab ea limitem constituere. Quod si faciamus pro casu $1^{\circ}.51'.33\frac{1}{3}''$, $u = -15''$ hinc aequatio nostra foret

$$-180xx - 1000x + 800 = 0$$

cuius aequationis minor radix erit $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, ita vt hinc differentia meridianorum proditura fit $1^{\circ}.51'.49\frac{1}{6}''$. Ex hoc casu denuo patet, nullum notabilem errorem esse metuendum, nisi valde enormiter in assumptione numeri u aberraverimus, in quo negotio sufficiet notasse, semper uuu multo maius esse debere quam 3 B.

§. 18. Imprimis haec methodus applicari meretur ad illas obseruationes, ex quibus non ita pridem *Cel. Lexell* parallaxin Solis determinauit, vnde exempli loco tantum depromamus sequentes quatuor conclusiones ex obseruationibus formatas, quae erant;

I.	II.	III.	IV.
8, 52,	8, 43,	8, 86,	8, 28,

inter quas medium arithmeticum sumendo prodit 8, 52. Quod si ergo statuamus $\Pi = 8, 52$ valores quatuor litterarum a, b, c, d sequenti modo constitui possunt

$$a = 1.$$

$$a=1, b=9, c=-34, d=+24,$$

vt eorum summa prodeat $A=0$, scilicet hi numeri denotant partes centesimas vnius minuti secundi. Hinc ergo erit summa quadratorum $B=1814$, summa vero cuborum $C=-24750$; vnde ob $n=4$ aequatio nostra erit:

$$8uxx-4uux+5442x+24750=0.$$

§. 19. Quod si iam sumamus pro termino vbi gradus bonitatis euanescit $u=40$, aequatio nostra euadet

$$320xx-948x+24750=0.$$

Vnde autem valor ipsius x prodiret imaginarius; hanc ob rem sumamus $u=50$ ac aequatio fiet

$$400xx-10000x+24750=0 \\ +5442x$$

vnde adhuc in imaginaria incidimus. Sumto autem $u=60$, erit minor valor ipsius $x=3\frac{5}{12}$, qui autem valor nimis magnus videri posset. Eo autem admissio foret parallaxis Solis $=8,555$. Ceterum notetur ex maioribus valoribus ipsius u minores valores pro x deduci. Et quoniam applicatio huius methodi tam est vaga, merito dubitare licet, num hac ratione propius ad veritatem accedere queamus. Ac fortasse sufficiet hinc saltem didicisse, vtrum valor ipsius x proditurus sit posituius an negatiuus?

§. 20. Hoc quidem casu vidimus, valorem ipsius x certe esse posituium, praeterea quod pro C numerum negatiuum inuenimus; vnde in genere obseruasse iuuabit, quoties numerus C prodierit posituius, tum x fieri negatiuum, contra autem si C fuerit negatiuum, valorem ipsius x fore posituium. Vtroque autem casu tam exiguus statui debet, vt determinatio a regula vulgari vix discrepet. Saltem hoc adiici poterit, quo maior fuerit numerus C etiam valorem ipsius x augeri debere. Si enim etiam summa cuborum C euanesceret, tum semper

per foret $x=0$, quicunque valor pro u acciperetur, prorsus vt regula vulgaris postulat.

§. 21. Hinc autem, non obstante incertitudine a numero u oriunda, aliquid si non certum tamen satis probabile statui posse videtur, si ad haec momenta attendamus. Primo certum est, quoties fuerit summa cuborum $C=0$, tum etiam semper fore $x=0$. Secundo, quo maior fuerit quantitas C , eo maiorem quoque futurum esse valorem ipsius x sub signo contrario affectum. Tertio satis clarum est quantitatem nuu plurimum superare debere quantitatem $3B$; quibus perpenſis satis probabili ratione statui posse videtur $x = -\frac{C}{\lambda n B}$, vbi quidem numerus λ arbitrio nostro relinquatur. Veruntamen pro omnibus casibus vix a veritate aberrabitur, si ponatur $\lambda=2$ vel ad summum $\lambda=3$; discrimen enim hinc oriundum plerumque tam parui erit momenti, vt vix attendi mereatur. Casus enim quo maximus error esset metuentus sine dubio foret, si plures obseruationes, quarum numerus sit $=i$, prorsus inter se conuenirent, singulis existentibus $=a$ quibuscum vnica obseruatio coniungeretur praebens $-ia$, vt fiat summa omnium $A=0$; tum autem erit summa quadratorum $B=iaa+iaa=i(i+1)aa$; summa vero cuborum $ia^3-i^3a^3=-i(ii-1)a^3$. Nunc ergo si $n=i+1$, nostra formula dabit $x = +\frac{i(ii-1)a}{\lambda i(i+1)^2} = \frac{(i-1)a}{\lambda(i+1)}$, ergo si fuerit i numerus praegrandis et capiatur $\lambda=2$, prodit $x=\frac{1}{2}a$. Sumto igitur $\lambda=2$, in exemplo priore, vbi erat $n=6$, $B=111\frac{1}{2}$ et $C=-801$, fiet $x = +\frac{801}{12.111\frac{1}{2}} = \frac{8}{5}$ propemodum. Pro altero vero exemplo, quo $n=4$, $B=1814$ et $C=-24750$, fit $x = +\frac{24750}{2.1814} = \frac{8}{5}$ circiter, qui valores nihil absurdi inuoluere videntur.

Si quis autem putet maiori iure sumi debere $\lambda=3$, operae vix pretium erit super differentia disputare, cum ipsa obseruationum natura maiorem gradum praecisionis non recipiat.

SUR
QUELQUES SÉRIES INFINIES
DONT LA SOMME PEUT ÊTRE EXPRIMÉE
PAR DES
FONCTIONS ANALYTIQUES
D'UNE FORME PARTICULIÈRE.

PAR
Mr. le Marquis de CONDORCET.

I. SÉRIE.

Soit une série $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \dots + (m)x^m \dots$
& qu'elle soit formée de la manière suivante.

1°. $b = a^n$, n est un nombre quelconque.

2°. $c = \frac{1}{2}a^{n-1} \times fa + a^2 + a^3 \dots + a^n$. (Série géométrique, dont on a la valeur, n étant quelconque).

3°. d sera composé de deux termes, le 1^{er} étant $\frac{1}{3}a^{n-1} \times$.
(La somme des c pris depuis $n=1$ jusqu'à $n=n$. Le 2°. étant $\frac{1}{3}a^{n-2} \times$. (La somme du produit deux à deux de tous les termes de la série des b pris depuis $n=1$ jusqu'à $n=n$).

4°. e sera composé de 3 termes, le 1^{er} étant $\frac{1}{3}a^{n-1} \times$. (La somme des d pris depuis $n=1$ jusqu'à $n=n$. Le second $\frac{1}{2 \cdot 3}a^{n-2} \times$. (La somme des produits deux à deux de tous les termes de la série des c par ceux de la série des b pris depuis $n=1$ jusqu'à $n=n$).

Tous ces produits se prennent de manière, que ni deux termes d'une même série ne sont multipliés l'un par l'autre, ni le terme répondant à une valeur de n dans une série par le terme répondant à la même valeur de n dans l'autre série.

En général le terme répondant à x^m se formera ainsi : On prendra un produit de $m-1$ variables $y, y', y'' \dots$ & on cherchera

chera dans la valeur de $d^{m-1}(y, y', y'', y''' \dots)$ les coefficients numériques des termes multipliés par $d^{m-1}y, dy' d^{m-2}y, ddy' d^{m-3}y \dots dy'' dy' d^{m-3}y, dy'' ddy' d^{m-4}y,$ & ainsi de suite, en ne prenant dans cette valeur de $d^{m-1}(y, y', y'' \dots)$ que les termes, qui, en alternant les y d'une manière quelconque, ne peuvent devenir un des termes déjà pris dans la série. Par exemple si on a le terme $dy' d^{m-2}y$, il ne faut plus prendre $dy' d^{m-2}y', dy'' d^{m-2}y'$ &c. parce que ces termes se peuvent changer en $dy' d^{m-2}y$, en mettant dans le 1^{er} y pour y' , & y , & dans le second y' pour y'' & y'' pour y' . Nous appellerons dans la suite ces termes les termes 1^{ers} de la valeur de $d^{m-1}(y, y', y'' \dots)$.

Chacun de ces termes en produira un dans la valeur de (m) . Pour former celui qui répondra à $d^{m-q}y d^{l-p-1}y' d^{p-r}y'' d^r y'''$, soit t le coefficient de ce terme dans $d^{m-1}(y, y', y'' \dots)$ on prendra $\frac{t, 1, 2, 3, \dots, m-q, 1, 2, \dots, q-p-1, 1, 2, \dots, p-r, 1, 2, \dots, r}{1, 2, 3, \dots, m} a^{n-4}x$. (La somme des produits 4 à 4 des coefficients $x^{m-q}, x^{q-p-1}, x^{p-r}, x^r$. La suite de ces coefficients étant prise depuis $n=1$, jusqu'à $n=n$).

On prendra de même tous les autres termes, & on formera la valeur de (m) égale à leur somme.

Cela posé je dis que la somme d'une série infinie ainsi for-

$$E^a + \dots$$

E

mée sera E

Le nombre de fois que ces élévations successives sont répétées étant n ; E étant tel, que si l'on suppose son logarithme égal à l'unité, il soit $E^a = a$.

II. SÉRIE.

Soit une série semblable $a + b + c x^2 + \dots + (m) n^m \dots$ formée de manière que $a = \cos. A$, $b = (-1)^n \sin. A^m$, & que pour avoir $a(m)$ on prenne 1°. comme ci-dessus tous les termes premiers de la valeur de $d^{n-1}(y, y', y'' \dots)$ dont chacun donnera un terme dans la valeur de (m) , 2°. que soit $d^m - q y d^{l-p-1} y' d^{p-r} y'' d^r y'''$ un de ces termes, le terme correspondant dans la valeur de (m) soit égal au coefficient numérique que $\frac{1}{1.2.3 \dots m}$ multiplié par une fonction de n & des coefficients des termes précédens. Maintenant pour former cette fonction on prendra à cause de $d^m - q y$, les termes de l'ordre $m - q$ dans la série $V + \frac{V^2}{2} + \frac{V^3}{3} \dots V = du + d^2 u + d^3 u \dots + d^{m-q} u$, on multipliera les termes pairs par $\cos. A$, & les impairs par $-\sin. A$, on mettra ensuite dans tous ces termes au lieu de du , (1); 2 (2) au lieu de ddu ; 2.3.(3) au lieu de $d^3 u$; 2.3.4.(4) au lieu de $d^4 u$ & ainsi de suite, (1), (2), (4) ... étans les coefficients de $x, x^2, x^3, x^4 \dots$ dans la série proposée. On fera successivement dans cette expression $n = 1, 2 \dots n$, & on formera une suite de termes $B, B', \dots B^{m-n-1}$. On formera de la même manière pour $d^{l-p-1} y'$ une série de termes $C, C', C'' \dots C^{m-n-1}$; pour $d^{p-r} y''$ une série de termes $D, D' \dots D^{m-n-1}$; pour $d^r y'''$ une série de termes $E, E', E'' \dots E^{m-n-1}$. On prendra la somme des produits quatre à quatre des termes de ces quatre séries & soit F cette somme: la partie de la valeur de (m) répondante au terme $d^m - q y d^{l-p-1} y' d^{p-r} y'' d^r y'''$ sera $\frac{1}{1.2.3 \dots m} F$.

On formera de même les autres termes.

Cela posé la somme de cette série infinie sera

$$\overbrace{\cos. \cos. \dots \cos. (A + x)}^n,$$

le nombre des signes *cos* étant répété n fois & A étant tel que $\cos. A = A$.

III. SÉRIE.

Soit encore une série $a + bx + cx^2 + \dots (m)x^m \dots$ formée de manière que $a = B$, $b = \frac{1}{m^n} B^n \dots$ & (m) de la manière suivante. 1°. On prendra toujours les termes premiers de la valeur de $d^{m-1} (y, y', y'' \dots)$. 2°. Soit un de ces termes $d^{m-1} y d^{l-p-1} y' d^{p-r} y'' d^r y'''$ & t son coefficient; pour trouver le terme correspondant dans la valeur de (m) , on prendra $d^{m-1} \frac{1}{u}$, on mettra dans cette fraction au lieu de u , a ; b au lieu de du ; $2.c$ au lieu de $d^2 u$; $2.3(3)$ au lieu de $d^3 u$; $2.3.4(4)$ au lieu de $d^4 u$ & faisant dans cette valeur successivement $n = 1, 2, \dots, n$, on formera une série de termes $B, B' \dots B^{m-n-1}$; on formera une série semblable de termes $C, C' \dots C^{m-n-1}$ répondans à $d^{l-p-1} y'$, une de termes $D, D', D'', \dots D^{m-n-1}$ pour $d^{p-r} y''$, enfin une de termes $E, E', E'' \dots E^{m-n-1}$ pour le terme $d^r y$. On prendra la somme des produits 4 à 4 de tous les termes de ces quatre séries & soit F cette somme: la partie du terme général répondante à $d^{m-1} y d^{l-p-1} y' d^{p-r} y'' d^r y'''$ fera $\frac{1.F}{1.2.3\dots m}$.

Enfin on déterminera de même les autres termes de la valeur de (m) . Cela posé la somme de cette Série sera $\sqrt[m]{A} + \sqrt[m]{A} - - - + \sqrt[m]{A} + \sqrt[m]{B} + x$, A étant $B - \sqrt[m]{B}$,

Chaque terme des Séries précédentes sera égal à une fonction finie de u , n étant quelconque. En effet toute suite formée par une combinaison quelconque des termes d'une série récurrente, pourvu quelle ne renferme que des puissances entières de ces termes, & qu'ils y entrent tous d'une manière semblable, est également une série récurrente. Cette observation générale se déduit fort simplement de cette réflexion: que la somme d'un nombre n de termes de toute suite récurrente est composée ainsi que son terme général d'un nombre fini de termes de la forme $A n^p e^{fn}$, p étant un nombre fini.

DE FORMVLIS EXPONENTIALIBVS REPLICATIS.

Auctore
L. E V L E R O.

§. I.

Communicauit nuper cum Academia Illustr. *Marchio de Condorçet* profundissimas speculationes circa formulas Analyticas fere penitus insolitas, inter quas primum locum tenent formulae, quas hic appellare liceat exponentiales replicatas; quandoquidem quaelibet potestas abit in exponentem sequentis potestatis: cuiusmodi expressio hoc modo vulgo re-

α .

r

r

r

praesentari solet r Quoniam autem indoles talium expressionum etiam nunc parum est perspecta, etiam vis illarum inuestigationum incredibili sagacitate erutarum neutiquam clare percipi et cognosci potest; hanc ob rem haud inutile erit, hoc loco praecipuas proprietates talium expressionum explicare.

§. 2. Hunc in finem, cum supremus exponens positus sit α , ipsa autem quantitas continuo eleuanda denotetur littera r , statuamus primam potestatem $r^\alpha = \beta$, atque iam β erit expo-

α

r

nens secundae potestatis $r = r^\beta$, quam porro designemus littera γ , quae cum sit exponens tertiæ potestatis, statuamus simili modo $r^\gamma = \delta$; tum vero porro $r^\delta = \epsilon$; $r^\epsilon = \zeta$ etc. ita vt hoc modo totum negotium reducatur ad considerationem progressionis

sionis litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ etc. quarum quaelibet reperitur, si quantitas fixa r ad praecedentem eleuetur, quae ergo lex progressionis hoc modo clarissime ob oculos ponetur $\beta = r^\alpha$; $\gamma = r^\beta$; $\delta = r^\gamma$; $\epsilon = r^\delta$; $\zeta = r^\epsilon$; vnde statim patet, si incipiamus ab $\alpha = 0$ fore $\beta = 1$ et $\gamma = r$; sequentes vero $\delta = r^r$;

$\epsilon = r^r$ etc.

§. 3. Hic primo evidens est, si pro r capiatur numerus modice magnus, terminos nostrae seriei mox in immensum excrecere; si enim tantum sumamus $r = 2$, posito $\alpha = 0$, vt sit $\beta = 1$ et $\gamma = 2$, sequentes termini erunt $\delta = 4$; $\epsilon = 16$; $\zeta = 65536$; vbi tantum sequentem terminum η nemo facile euoluet, siquidem constaret ex 19729 figuris. Hinc iam manifestum est, si pro r numerum adhuc maiorem sumeremus, tum nostram seriem α, β, γ etc. multo rapidius in immensum esse excreturam. Contra autem sponte intelligitur, si loco r numeri binario minores accipiantur, tum huiusmodi augmentationem multo lentius esse processuram, quandoquidem pro casu $r = 1$ omnes nostrae seriei termini in infinitum perpetuo manebunt vnitati aequales.

§. 4. Hic igitur statim quaestio maximi momenti se offert: vbi ista enormis augmentatio incipiat? neque enim, statim ac numerus r vnitatem superet, ista augmentatio contingit, id quod vnico casu ostendisse sufficiet, quo sumatur $r = \sqrt{2}$, vbi adeo primo exponenti α iam maiorem valorem tribuamus quam $\sqrt{2}$. Sit scilicet $\alpha = 2$ ac prodibit $\beta = 2$, hincque porro $\gamma = 2$, sicque deinceps omnes termini nostrae progressionis nullam augmentationem accipiunt, dum omnes binario aequales manent. Quin etiam idem phoenomenon locum habebit, si primo exponenti α adhuc maiorem valorem tribuamus, scilicet $\alpha = 4$; tum enim prodibit $\beta = 4$ et $\gamma = 4$, neque vlla ulterior augmentatio occurret; statim autem ac α ultra 4 augebitur,

bitur, veluti si sumatur $\alpha = 6$, tum reperietur $\beta = 8$; hincque porro $\gamma = 16$; $\delta = 256$, sequentes vero ob summam magnitudinem vix et ne vix quidem exprimere licebit.

§. 5. Cum igitur casu $r = \sqrt{2}$, incipiendo ab $\alpha = 0$, augmentatio terminorum non ultra modicam quantitatem excreseat, cum sumpto $r = 2$ ea quasi subito in infinitum dilatetur, maxime sine dubio operae erit pretium limitem assignare, ubi ista augmentatio incipiat; quem ante quam ex principiis Analyticis definiamus, haud abs re erit, casus quosdam intra limites $\sqrt{2}$ et 2 examini subiicere, id quod facili negotio per logarithmos expedire licebit. Cum enim sit $\beta = r^\alpha$, erit $l\beta = \alpha l r$ et $ll\beta = l\alpha + llr$; similique modo erit $ll\gamma = l\beta + llr$; tum vero $ll\delta = l\gamma + llr$ et ita porro. Hoc igitur modo examinemus casum, quo $r = \frac{3}{2}$ vnde fit

$$l r = 0,1760913 \text{ et } ll r = 9,2457379$$

et quia, nostram seriem a cyphra incipiendo, statim peruenimus ad terminum $\frac{3}{2}$, incipiamus a positione $\alpha = \frac{3}{2}$ et calculus sequenti modo concinne absoluetur.

$$l \alpha = 0,1760913 \text{ hincque } \alpha = 1,5000$$

$$ll r = 9,2457379$$

$$ll \beta = 9,4218292$$

$$l \beta = 0,2641370 \text{ hincque } \beta = 1,8371$$

$$ll r = 9,2457379$$

$$ll \gamma = 9,5098749$$

$$l \gamma = 0,3235004 \text{ hincque } \gamma = 2,1062$$

$$ll r = 9,2457379$$

$$ll \delta = 9,5692383$$

$$l \delta = 0,3708841 \text{ hincque } \delta = 2,3490$$

$$ll r = 9,2457379$$

$$ll e =$$

$$11\varepsilon = 9,6166220$$

$$1\varepsilon = 0,4136396 \text{ hincque } \varepsilon = 2,5920$$

$$11r = 9,2457379$$

$$11\zeta = 9,6593775$$

$$1\zeta = 0,4564335 \text{ hincque } \zeta = 2,8604$$

$$11r = 9,2457379$$

$$11\eta = 9,7021714$$

$$1\eta = 0,5036993 \text{ hincque } \eta = 3,1893$$

$$11r = 9,2457379$$

$$11\theta = 9,7494372$$

$$1\theta = 0,5616140 \text{ hincque } \theta = 3,6443$$

§. 6. Hic ergo termini nostrae progressionis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. tam lente increſcunt, vt dubitare queamus, an non ad certum quendam limitem conuergant; verum quia poſtremae differentiae manifeſto increſcunt, neceſſe eſt, vt ipſi termini tandem continuo vltra creſcant, vnde concludere licet, limitem, quem quaerimus, infra $\frac{2}{3}$ ſubſiſtere. Examinemus ergo ſimili modo caſum $r = \frac{4}{3}$, atque incipiendo ab $\alpha = \frac{4}{3}$ calculus ſequenti modo procedet.

$$1\alpha = 0,1249387 \text{ hincque } \alpha = 1,3333$$

$$11r = 9,0966972$$

$$11\beta = 9,2216359$$

$$1\beta = 0,1665850 \text{ hincque } \beta = 1,4675$$

$$11r = 9,0966972$$

$$11\gamma = 9,2632822$$

$$1\gamma = 0,1833505 \text{ hincque } \gamma = 1,5252$$

$$11r = 9,0966972$$

$$11\delta = 9,2800477$$

$$l\delta = 0,1905670 \text{ hincque } \delta = 1,5508$$

$$11r = 9,0966972$$

$$11\varepsilon = 9,2872642$$

$$l\varepsilon = 0,1937600 \text{ hincque } \varepsilon = 1,5622$$

$$11r = 9,0966972$$

$$11\zeta = 9,2904572$$

$$l\zeta = 0,1951898 \text{ hincque } \zeta = 1,5674$$

Hic iam differentiae manifesto continuo decrescunt; vnde satis tuto concludere licet, terminos nostrae progressionis non ultra certam quantitatem auctum iri. Quoniam autem suspicari possemus etiam hoc casu differentias iterum augeri, solutio sequentis problematis omnem tollet dubitationem.

Problema.

Inuestigare limitem, quem simulac radix r superare inceperit, termini nostrae progressionis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. in infinitum excrescant.

Solutio.

§. 7. Quaeri ergo oportet maximum valorem radices r , pro quo termini nostrae seriei non in infinitum augeantur, sed versus certum quendam limitem finitum conuergant. Denotet igitur a terminum infinitesimum nostrae progressionis, qui cum iam limitem quaesitum attigerit, necesse est, ut terminus ipsum sequens, qui est r^a , illi sit aequalis, ita ut habeamus hanc aequationem: $r^a = a$; vnde maximum valorem, quem littera r attingere potest, definiri oportet.

§. 8. Cum igitur sumptis logarithmis fiat $a \log r = \log a$, hinc erit $\log r = \frac{\log a}{a}$, siue etiam $r = a^{\frac{1}{a}}$. Maximus igitur valor inuestigari

ri debet, quem isto fractio $\frac{l\omega}{\omega}$ acquirere potest: Quod autem hic maximum detur, inde intelligitur, quod sumpto tam $\omega=1$ quam $\omega=\infty$, haec fractio utroque casu evanescat. Hinc ergo ad casum maximi inueniendum, differentiale huius fractionis nihilo aequetur; quem in finem denotet $l\omega$ logarithmum hyperbolicum ipsius ω , ut eius differentiale statui possit $\frac{d\omega}{\omega}$, sicque peruenietur ad hanc aequationem $l\omega=1$; unde si e designet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $=1$, quem nouimus esse 2,718281828, erit $lr=\frac{1}{e}$, ideoque $r=e^{\frac{1}{e}}$.

§. 9. Hoc modo iam didicimus, quoties radix r maior accipiatur hoc valore inuento $e^{\frac{1}{e}}$, toties progressionem nostram $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ etc. in infinitum augeri debere; contra autem si radix r intra istum valorem subsistat, tum nostram seriem perpetuo ad certum quandam litem conuergere, qui adeo limes pro ipso casu inuento $r=e^{\frac{1}{e}}$ erit $\omega=e$; cuius veritas vicissim hinc patet, quod hoc modo fiat terminus sequens $e^{\frac{1}{e}}=e$. Hic haud inutile erit obseruare, denotante x numerum quemcunque diuersum ab e siue maiorem siue minorem, semper fore $x^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{e}}$. Quod quo clarius perspiciatur, calculum pro casibus simplicioribus instituamus; quem in finem ponamus $x^{\frac{1}{x}}=z$, eritque logarithmis communibus sumendis $lz=\frac{l x}{x}$ hincque porro $llz=llx-lx$, unde valor ipsius z quouis casu facillime colligitur. Primo quidem perspicuum est sumto $x=1$ fore $z=1$, pro sequentibus autem valoribus calculus ita instituetur secundum formulam $\frac{l x}{x}$:

	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
$l x$	0,3010300	0,4771213	0,6020600	0,6989700	0,7781513
$\frac{l x}{x}$	0,1505150	0,1590404	0,1505150	0,1397940	0,1296919
z	1,41421	1,44225	1,41421	1,37972	1,34800

Patet hic valores ipsius z , dum x ultra limitem $=e$ augetur, continuo decrefcere et tandem ad vnitatem conuergere; tum vero hinc etiam liquet, maximum valorem ipsius z inter pofitiones $x=2$ et $x=3$ incidere, ita vt is certe maior fit quam 1,44225.

§. 10. Quaeramus igitur hunc ipsum maximum valorem ipsius z ex casu $x=e=2$, 718281828 et quoniam est $lle=lle=le$, calculus ita fe habebit

$$\text{ob } le=0,4342944$$

$$\text{erit } lle=9,6377842$$

$$\text{hinc subtr. } le=0,4342944$$

$$\text{fit } llz=9,2034898$$

$$\text{et } lz=0,1597679 \text{ tandem } z=1,44467$$

qui ergo valor proxime est $z=1\frac{4}{5}$.

§. 11. Si quis istum valorem maximum ipsius r accuratius defiderauerit, quam vt tabulae logarithmicae vulgares ei fufficient, is eundem ope feriei maxime conuergentis commodiffime obtinere poterit; cum enim fit

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\text{etc.}$$

erit valor quaefitus

$$e^e=1+\frac{1}{e}+\frac{1}{2ee}+\frac{1}{6e^3}+\frac{1}{24e^4}+\text{etc.}$$

pro qua ferie fingulae potestates reciprocae ipsius e paffim ad plures figuras decimales euoluti reperiuntur.

§. 12. Quodfi ergo pro r accipiatur numerus quicunque minor quam valor modo inuentus 1,4447, tum series inde resultans $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ etc. certe ad quendam limitem finitum conuerget, qui, fi dicatur $=\Phi$, ita definietur vt fit $e^\Phi=\Phi$, ideoque $r=\Phi^\Phi$. Ex praecedentibus autem patet, femper binos dari valores ipsius Φ , vnde eadem radix r oriri queat, quemadmodum in casibus fupra euolutis valores $x=2$ et $x=4$ eundem

dem valorem pro z prodixerunt; atque hi duo valores ipsius Φ eo magis a se inuicem discrepabunt, quò magis radix assumpta r a limite inuento $1,4447$ differat, siquidem in ipso limite ambo valores in vnum coalescunt. His igitur valoribus inueniendis sequens problema destinamus.

Problema.

Si pro radice r accipiatur numerus quicunque minor quam limites inuentus $e^{\frac{1}{p}} = 1,4445$, inuestigare binos illos valores, ad quos progressio nostra $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. conuergere potest, siue quaerere duplicem valorem ipsius Φ , vt euadat $r^\Phi = \Phi$; vbi tamen obseruari necesse est, valorem radice r vnitatem maiorem accipi debere, quandoquidem valores vnitatem minores peculiarem explanationem postulant.

Solutio.

§. 13. Hic primo haud parum alienum videbitur, quòd talis aequatio $r^\Phi = \Phi$ duas inuoluat radices reales, quotiescunque r intra limites 1 et $e^{\frac{1}{p}}$ continetur, neque Analysis vllam methodum certam praescribit hos duos valores inueniendi; quoniam autem iam certo nouimus duos dari huiusmodi valores, designemus alterum littera ψ , ita vt etiam sit $r^\psi = \psi$; hinc igitur, eliminando litteram r , impetrabimus hanc aequationem inter Φ et ψ : $\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\psi}$.

§. 14. Iam ad hanc aequationem resoluendam ponamus $\psi = p\Phi$, vt sit $1\psi = 1p + 1\Phi$, vnde facta substitutione reperitur $1\Phi = \frac{1p}{p-1}$; tum vero $\Phi = p^{\frac{1}{p-1}}$; at alter valor iam erit $\psi = \frac{p}{p-1}$, qui ergo in genere exprimunt binos valores quaesitos.

§. 15. Sumpto ergo pro lubitu numero p , inde colliguntur bini exponentes quaesiti Φ et ψ ; ipsa vero radix proposita r ita

per p exprimetur, vt fit $lr = \frac{p^{\frac{1}{p-1}} l p}{p-1}$. Hinc autem vicissim ex data radice r numerus p aliter colligi nequit, nisi approxi-
mando; quem in finem notasse iuuabit, si fuerit $p=1$, hoc casu bini exponentes Φ et Ψ euadere aequales inter se atque adeo ipsi numero e , cuius logarithmus hyperbolicus $=1$; quod quo clarius appareat, ponamus $p=1+\omega$, existente ω infinite paruo, eritque $\Phi=(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}$ ideoque $l\Phi=\frac{1}{\omega}l(1+\omega)$. Quia igitur est $l(1+\omega)=\omega$, erit $l\Phi=1$ ideoque $\Phi=e$; tum vero erit $lr=\frac{1}{e}$ ideoque $r=e^{\frac{1}{e}}$, qui est ipse limes pro radice r supra inuentus; hoc ergo casu bini valores Φ et Ψ inter se conueniunt.

§. 16. Pro reliquis autem casibus, quibus r minorem sortitur valorem, bini isti valores continuo magis a se inuicem discrepabunt. Ita si capiamus $p=2$, vt fiat $\Psi=2\Phi$, prodibit $\Phi=2$ et $\Psi=4$, tum vero porro $r=\sqrt{2}$, qui est ipse casus, quem supra fusius euoluimus, quandoquidem hinc manifesto fit $(\sqrt{2})^2=2$ et $(\sqrt{2})^4=4$. Sin autem sumamus $p=3$, fiet $\Phi=\sqrt{3}$ et $\Psi=3\sqrt{3}$, qui ergo bini valores locum habent pro $lr=\frac{l3}{2\sqrt{3}}$; ipsa ergo radix erit $r=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$. Tales autem expressiones, vbi exponentes sunt irrationales, inter quantitates interscendentes referri solent.

§. 17. Vt igitur hoc incommodum euitemus, ponamus $p=1+\frac{1}{n}$, denotante n numerum quantumuis magnum, eritque $\Phi=\frac{(n+1)^n}{n^n}$ et $\Psi=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$; tum vero erit $lr=\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} l \frac{n+1}{n}$, vnde ipse valor ipsius r haud commode referri potest. Pro casibus autem specialibus hi valores ita se habebunt

I. Si

I. Si $n=1$, erit $\Phi=2$ et $\Psi=4$; tum vero $r=\sqrt{2}$, vt supra notauimus.

II. Si $n=2$, erit $\Phi=\frac{9}{4}$ et $\Psi=\frac{27}{8}$; tum vero $lr=\frac{9}{4}l^{\frac{1}{2}}$, ideoque $r=(\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$; hinc enim manifesto fit $r^{\Phi}=\frac{9}{4}=\Phi$, at $r^{\Psi}=\frac{27}{8}=\Psi$.

III. Si $n=3$, erit $\Phi=\frac{64}{27}$ et $\Psi=\frac{256}{81}$; tum vero erit $lr=\frac{64}{27}l^{\frac{2}{3}}$, ideoque $r=(\frac{4}{3})^{\frac{2}{3}}$; hinc enim fit $r^{\Phi}=\frac{64}{27}=\Phi$ et $r^{\Psi}=\frac{256}{81}=\Psi$.

IV. Si $n=4$, erit $\Phi=\frac{625}{256}$ et $\Psi=\frac{3125}{1536}$; hinc vero erit $lr=\frac{625}{256}l^{\frac{3}{4}}$, ideoque $r=(\frac{5}{4})^{\frac{3}{4}}$; hinc autem fiet $r^{\Phi}=\frac{625}{256}=\Phi$ et $r^{\Psi}=\frac{3125}{1536}=\Psi$.

Solutio geometrica eiusdem problematis.

§. 18. Super axe A O eiusmodi curua describatur, pro qua, si ponatur abscissa A X= x et applicata X Y= y , fit $y=r^x$, quae ergo curua erit logarithmica, et pro initio $x=0$ fiet prima applicata A B=1; tum vero, sumpta abscissa A C=1, erit applicata C D= r quae ergo exhibeat nostram radicem r ; ficque abscissae x nobis dabunt exponentes potestatum r^x , applicatae vero y exhibebunt ipfas potestates. Iam ex initio A producatu recta A Q U, cum axe faciens angulum semirectum, quam curua in duobus punctis Q et U secabit, siquidem fuerit $e < e^{\frac{1}{e}}$. Hoc modo pro puncto Q erit abscissa A P= Φ simulque P Q= $r^{\Phi}=\Phi$. Simili modo pro altera interfectione U abscissa erit A T= Ψ simulque T U= $r^{\Psi}=\Psi$.

Tab. I.
Fig. 1.

§. 19. Ab initio igitur ista curua supra rectam A Q verfabitur a puncto B vsque ad Q; at vero a puncto Q vsque ad U curua infra istam rectam cadit, a termino autem U ulterius continuata in regionem superiorem in infinitum vsque ascendet. Hinc intelligitur, quamdiu abscissa x minor fuerit quam Φ , tum applicatam $y=r^x$ fore maiorem quam x ideoque ad limitem P Q propius accedere, donec sumpto $x=A P=\Phi$ etiam fiet $y=r^{\Phi}=\Phi$. Quando autem x superat Φ , ita

ta-

tamen vt minor fit quam ψ , tum applicata y erit minor quam x ideoque propius ad terminum Φ accedet; hocque eueniet, quamdiu absciffa x minor fuerit quam ψ : sumpto autem $x = \psi$ etiam fiet $y = \psi$. Denique vero si capiatur $x > \psi$, tum manifesto applicata y maior erit quam x , ideoque magis a termino ψ recedet atque adeo tandem in infinitum elongabitur.

§. 20. Hic igitur fingulare Phœnomenon fe offert, in hoc confiftens, quod, quam diu absciffa x minor accipitur termino maiore ψ , tum applicata y femper propius ad terminum minorem Φ accedat quam x , hocque eueniet quamdiu fuerit $x < \psi$, et non nifi in ipfo hoc altero termino $x = \psi$, applicata quoque fiet $y = \psi$. Statim enim atque absciffa x vel minimum difcrepat a ψ , applicata y adhuc magis a ψ difcrepabit.

§. 21. Bini igitur valores fupra affignati Φ et ψ in hoc effentialiter a fe inuicem differunt, quod fi x fivē maior fivē minor capiatur quam Φ , tum y propius ad Φ accedat; contrarium autem euenit in altero termino ψ , quippe a quo, ftatim atque x difcefferit, etiam y adhuc magis difcedit.

§. 22. Quo hoc fummum difcrimen clarius appareat, confideremus cafum, quo $r = \sqrt{2}$; $\Phi = 2$ et $\psi = 4$; atque iam fatis liquet, fi progreflionis noſtræ numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. primus terminus α accipiatur minor quam 2, tum fequentes β, γ, δ etc. continuo propius ad 2 eſſe acceſſuros; quandoquidem ſumpto $\alpha = 2$ omnes fequentes eundem valorem recipient. Sumamus igitur $\alpha > 2$, attamen minus quam 4 et quaeramus fequentes terminos β, γ, δ , etc. ex formula $ll\beta = l\alpha + llr$ pro qua

$$llr = 0,1505150 \text{ et } llr = 9,1775798.$$

quem in finem tribuamus primo termino α valorem 3, vtpote medium inter binos limites 2 et 4 et calculus fequenti modo fehabebit

ad

ad. $la = 0,4771213$ hincque $\alpha = 3,0000$
 add. $llr = 9,1775798$

$$ll\beta = 9,6547011$$

$$l\beta = 0,4515451 \text{ hincque } \beta = 2,8284$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\gamma = 9,6291249$$

$$l\gamma = 0,4257209 \text{ hincque } \gamma = 2,6651$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\delta = 9,6033007$$

$$l\delta = 0,4011442 \text{ hincque } \delta = 2,5185$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\epsilon = 9,5787240$$

$$l\epsilon = 0,3790740 \text{ hincque } \epsilon = 2,3937$$

Hinc iam patet istos terminos continuo magis ad limitem α conuergere.

§. 23. Ne quis autem putet hoc aliter esse euenturum ; si ipsi α valor parum tantum a 4 discrepans tribuatur , euoluamus casum $\alpha = 3,99$ et calculus sequenti modo se habebit.

$$la = 0,6009729 \text{ hincque } \alpha = 3,9900$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\beta = 9,7785527$$

$$l\beta = 0,6005548 \text{ hincque } \beta = 3,9861$$

$$llr = 9,1775798$$

$$ll\gamma = 9,7781346$$

$$l\gamma = 0,5999770 \text{ hincque } \gamma = 3,9808$$

$$llr = 9,1775798$$

$$\underline{ll\delta = 9,7775568}$$

$$\underline{l\delta = 0,5991792} \text{ hincque } \delta = 3,9735$$

$$\underline{llr = 9,1775798}$$

$$\underline{ll\varepsilon = 9,7767590}$$

$$\underline{l\varepsilon = 0,5980795} \text{ hincque } \varepsilon = 3,9635$$

Hic ergo quoque evidens est, terminos β , γ , δ , ε etc. continuo magis a limite $\psi = 4$ recedere et continuo magis ad alterum limitem $\Phi = 2$ appropinquare.

§. 24. Interim tamen manifestum est, si statuatur exacte $\alpha = 4$, tum omnes sequentes terminos prorsus eundem valorem esse retenturos; statim vero ac littera α vel tantillum superaverit limitem 4, sequentes terminos continuo magis eum esse superaturos, quemadmodum sequens calculus, sumendo $\alpha = 4,01$ ostendet.

$$l\alpha = 0,6031444 \text{ ideoque } \alpha = 4,0100$$

$$\underline{llr = 9,1775798}$$

$$\underline{ll\beta = 9,7807242}$$

$$\underline{l\beta = 0,6035652} \text{ hincque } \beta = 4,0138$$

$$\underline{llr = 9,1775798}$$

$$\underline{ll\gamma = 9,7811450}$$

$$\underline{l\gamma = 0,6041502} \text{ hincque } \gamma = 4,0293$$

$$\underline{llr = 9,1775798}$$

$$\underline{ll\delta = 9,7817300}$$

$$\underline{l\delta = 0,6049645} \text{ hincque } \delta = 4,0268$$

$$\underline{llr = 9,1775798}$$

$$\underline{ll\varepsilon = 9,7825443}$$

$$\underline{l\varepsilon = 0,6061000} \text{ hincque } \varepsilon = 4,0373$$

hinc

Hinc patet indolem limitis $\psi = 4$ similem esse limiti aequilibrii labilis, quo acus cuspidi quidem insistere potest, simulac vero quam minime deturbetur, penitus procumbit.

§. 25. Hic autem probe meminisse necesse est, huiusmodi binos limites Φ et ψ locum habere non posse, nisi radix r infra valorem $e^{\frac{1}{2}}$ substituerit; statim vero ac r hunc valorem superauerit, hi limites fiunt imaginarii; atque adeo haec ipsa imaginaria assignare licebit, cuiusmodi inuestigationes cum adhuc parum sint tritae, haud inutile erit sequens problema adiicere.

Problema.

Si radix r maior fuerit, quam limes supra assignatus $e^{\frac{1}{2}}$, exponentem imaginarium ω inuestigare, ut fiat $r^{\omega} = \omega$.

Solutio.

§. 26. Cum quicquid in Analyfi imaginarii occurrere potest semper in hac forma contineatur $x + y\sqrt{-1}$, ita ut tam x quam y sint quantitates reales, statuamus $\omega = x + y\sqrt{-1}$, ita ut esse debeat

$$r^{x+y\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1} \text{ siue } r^x \cdot r^{y\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$$

ex qua aequatione binas litteras x et y erui oportet.

§. 27. Quoniam constat esse

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos. z + \sqrt{-1} \sin. z$$

statuatur $r^{y\sqrt{-1}} = e^{z\sqrt{-1}}$, ut fiat $y\sqrt{-1} \cdot \ln r = z\sqrt{-1}$, ob $\ln e = 1$, eritque ergo $z = y \ln r$, sicque habebimus

$$r^{y\sqrt{-1}} = \cos. y \ln r + \sqrt{-1} \sin. y \ln r$$

quo valore substituto aequatio nostra erit

$$r^x (\cos. y \ln r + \sqrt{-1} \sin. y \ln r) = x + y\sqrt{-1}$$

vnde cum partes reales et imaginariae inter se seorsim aequari debeant, oriuntur hac duae aequationes:

$$\text{I. } r^x \cos. y l r = x$$

$$\text{II. } r^x \sin. y l r = y$$

quarum posterior per priorem diuifa praebe-
 t tang. $y l r = \frac{y}{x}$, ex
 qua colligimus $x = \frac{y}{\tan g. y l r}$, ita vt ex valore
 ipfius y cognito va-
 lor ipfius x assignari queat.

§. 28. Pro y autem inueniendo posterioris
 aequationis capiantur logarithmi, qui dabunt

$$x l r + l \sin. y l r = l y, \text{ ideoque } \frac{y l r}{\tan g. y l r} + l \sin. y l r = l y$$

fiue $\frac{y l r}{\tan g. y l r} = l \frac{y}{\sin. y l r}$; ficque totum negotium huc est perdu-
 ctum, vt quantitas y ex data radice r eliciatur. Quo autem
 ifta relatio commodius exprimi poffit, ftatuamus $y l r = \theta$, vt
 obtineamus hanc aequationem $\frac{\theta}{\tan g. \theta} = l \frac{y}{\sin. \theta}$, vnde colligimus

$$l y = l \sin. \theta + \frac{\theta}{\tan g. \theta} \text{ ideoque } y = e^{\theta \cot. \theta} \sin. \theta$$

hincque porro $l r = \frac{\theta e^{-\theta \cot. \theta}}{\sin. \theta}$; atque hinc tandem erit
 $x = e^{\theta \cot. \theta} \cos. \theta$.

§. 29. Optandum quidem foret, vt ex data radice r an-
 gulus θ definiri poffet; verum contenti effe debemus, quod hinc
 ex quolibet valore ipfius θ haud difficulter radix erui queat,
 vbi quidem facile intelligitur, pro extremo valore $r = e^{\frac{1}{e}}$, vbi
 imaginaria incipiunt, effe debere $y = 0$, id quod euenit ponen-
 do $\theta = 0$, quo cafu ob $\theta \cot. \theta = \frac{\theta \cos. \theta}{\sin. \theta} = 1$, erit $x = e$, quem-
 admodum natura rei poftulat, dum vtique fiet $e^e = e$; reuera
 autem hinc prodibit $l r = \frac{1}{e}$, confequenter $r = e^{\frac{1}{e}}$. Quia autem
 hic affumimus, valorem ipfius r maiorem effe quam $e^{\frac{1}{e}}$, hi cafus
 prodibunt, fi angulo θ maiores valores tribuantur. Quod quo
 clarius appareat, fingamus angulum θ minimum, vt fit

$$\sin. \theta = \theta - \frac{1}{6} \theta^3 \text{ et } \cos. \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \text{ vnde fit}$$

$$\theta \cot.$$

$$\theta \cot. \theta = \frac{\theta \cos. \theta}{\sin. \theta} = \frac{1 - \frac{1}{3} \theta^2}{1 - \frac{1}{5} \theta^2} = 1 - \frac{1}{3} \theta^2$$

hincque erit

$$e^{\theta \cot. \theta} = e \cdot e^{-\frac{1}{3} \theta^2} = e (1 - \frac{1}{3} \theta^2)$$

ex quo valore colligimus

$$x = e (1 - \frac{1}{3} \theta^2) \text{ et } y = e \theta (1 - \frac{1}{3} \theta^2)$$

hincque quoniam

$$lr = \frac{\theta}{y} \text{ erit } lr = \frac{1}{e (1 - \frac{1}{3} \theta^2)} = \frac{1 + \frac{1}{3} \theta^2}{e}$$

unde patet fore $lr > \frac{1}{e}$, ideoque $r > e^{\frac{1}{e}}$, simulque intelligitur quantumvis magnum valorem ipsi r tribuere velimus, semper pro θ angulum convenientem assignari posse, quandoquidem eius valor iam in infinitum augebitur, si capiatur $\theta = 180^\circ = \pi$. Casus hic prae caeteris memoratu dignus occurrit, quando capitur $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$; tum enim ob $\cot. \theta = 0$ fiet $x = 0$ at $y = 1$

hincque porro $lr = \frac{\pi}{2}$ ideoque $r = e^{\frac{\pi}{2}}$; tum igitur erit

$$r^{x+y\sqrt{-1}} = e^{\frac{1}{2} \pi \sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$$

id quod egregie conuenit cum formulis iam pridem cognitis, quibus, fumendis logarithmis, erat $\frac{1}{2} \pi \sqrt{-1} = l\sqrt{-1}$ siue $\frac{1}{2} \pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ vel etiam $\pi = \frac{l(-1)}{\sqrt{-1}}$.

Consideratio casuum, quibus radix r vnitatem minor accipitur.

§. 30. Hic ante omnia obseruandum est omnes terminos nostrae seriei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ etc. tanquam vnitatem minores spectari posse; quantumvis enim magnus primus α accipiat veluti $\alpha = 10$, secundus $\beta = r^{10}$ eo minor erit fractio, quo maior fuerit α . Quam ob rem, ne calculus logarithmicus instituendus turbetur, tam loco radicis r , quam singulorum terminorum

nostrae progressionis fractiones in calculum introducamus, sitque $r = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{2}$; $\gamma = \frac{1}{2}$; $\delta = \frac{1}{2}$ etc. et cum sit

$$\beta = r^\alpha \text{ erit } \frac{1}{b} = \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \text{ ideoque } s^{\frac{1}{2}} = b$$

Per logarithmos ergo erit $\frac{1}{2} l s = l b$ siue $l s = a l b$; porro $l l s = l a + l l b$ ideoque $l l b = l l s - l a$, cuius formulae ope ex datis s et a reperitur b ; similique modo erit $l l c = l l s - l b$ et $l l d = l l s - l c$ et ita porro.

§. 31. Illustremus nunc casum exemplo, sitque $r = \frac{1}{2}$ fumaturque $\alpha = \frac{1}{2}$; erit $s = 2$ et $a = 2$, vnde calculus ita se habebit

$$\begin{array}{r} a l l s = 9,4786098 \\ \text{subtr. } l a = 0,3010300 \text{ propterea quod } \alpha = 0,5000 \\ \hline l l b = 9,1775798 \\ l b = 0,1505150 \text{ hinc } l \beta = 9,8494850 \text{ hinc} \\ \beta = 0,70710 \\ \\ l l s = 9,4786098 \\ l b = 0,1505150 \\ \hline l l c = 9,3280948 \\ \hline l c = 0,2128604 \text{ hinc } l \gamma = 9,7871396 \text{ vnde} \\ \gamma = 0,61254 \\ \\ l l s = 9,4786098 \\ \hline l l d = 9,2657494 \\ \hline l d = 0,1843951 \text{ hinc } l \delta = 9,8156049 \text{ ergo} \\ \delta = 0,65404 \\ \\ l l s = 9,4786098 \\ \hline l l e = 9,2942147 \end{array}$$

$l e =$

$$le = 0,1968859 \text{ hinc } l\varepsilon = 9,8031141 \text{ ergo}$$

$$\varepsilon = 0,63549$$

$$\begin{array}{r} ll s = 9,4786098 \\ \hline ll f = 9,2817239 \end{array}$$

$$lf = 0,1913039 \text{ hinc } l\zeta = 9,8086961 \text{ ergo}$$

$$\zeta = 0,64371$$

$$\begin{array}{r} ll s = 9,4786098 \\ \hline ll g = 9,2873059 \end{array}$$

$$lg = 0,1937789 \text{ hinc } l\theta = 9,8062211 \text{ ergo}$$

$$\theta = 0,64006.$$

§. 32. Hinc igitur elucet terminos nostrae progressionis continuo magis ad certum quendam valorem fixum conuergere, quem alternatim superant ab eoque deficiunt, qui valor circiter erit 0,64, ad quem simul ac fuerit peruentum, sequentes omnes ipsi manebunt aequales. Ad hunc valorem fixum inueniendum obseruemus logarithmos numerorum a, b, c, d etc. conuergere ad valorem propemodum 0,192; vnde si verum medium sit lm necesse est vt fiat $lm + llm = ll s$; hanc autem inuestigationem aliter nisi tentando elicere non licet, quod per aliquot hypotheses exequemur:

$lm =$	0,192	0,1925	0,1928	0,1929
add. $llm =$	9,2833012	9,2844307	9,2851070	9,2853322
debeb. effe	9,4753012	9,4769307	9,4779070	9,4782322
est ver. $lls =$	9,4786098	9,4786098	9,4786098	9,4786098
error (-)	0,0033086	0,0016791	0,0007028	0,0003776

$$lm =$$

$lm =$	0,1930	0,1931
add. $llm =$	9,2855573	9,2857823
debebat esse	9,4785573	9,4788823
est vero $lls =$	9,4786098	9,4786098
error	-0,0000525	+0,0002725

Patet igitur verum valorem subsistere inter binas postre-
mas hypotheses 0,1930 et 0,1931, quarum differentia est
0,0001, ex qua oritur differentia errorum 0,0003250; debe-
bat autem esse 0,0002200; quare ut summa errorum ad diffe-
rentiam hypothesium, ita error penultimus ad excessum
veritatis super penultimam; quocirca verus valor erit
 $lm = 0,1930161$, cuius complementum est, 9,8069839, cui
respondet terminus progressionis quaesitus 0,64118, ad quem
termini alternatim continuo propius accedunt.

§. 33. Ex his intelligitur, semper eiusmodi exponen-
tem ω definiri posse, ut sit $r^\omega = \omega$, siue posito $\omega = \frac{1}{z}$, ut sit $s^z = z$
siue $s = z^z$. Quoniam enim s est numerus unitate maior, sem-
per assignari poterit eiusmodi numerus z ut fiat $z^z = s$.

§. 34. In exemplo quidem ante euoluto, quo erat $r = \frac{1}{2}$,
termini nostrae progressionis continuo propius contuebant
ad valorem quendam fixum; verum hic ingens discrimen oc-
currit, quando pro r sumitur fractio valde exigua, veluti si
sumamus $r = \frac{1}{20}$ siue $s = 20$ et calculum ut supra instituamus,
incipiendo ab $a = 2$ ob $ls = 1,3010300$ calculus ita se habebit

$$\begin{array}{l} a \quad ll s = 1,1142873 \\ \text{subtr. } la = 0,3010300 \text{ hinc } a = 0,50000 \\ \hline ll b = 9,8132573 \\ \hline lb = 0,6505149 \text{ hinc } l\beta = 9,3494841 \text{ ergo } \beta = 0,22360 \\ \hline ll s = 0,1142873 \end{array}$$

$ll c =$

$$llc=9,4637724$$

$$lc=0,2909192 \text{ hinc } l\gamma=9,7090808 \text{ ergo } \gamma=0,51177$$

$$lls=0,1142873$$

$$lld=9,8233681$$

$$ld=0,6658373 \text{ hinc } l\delta=9,3341627 \text{ ergo } \delta=0,21585$$

$$lls=0,1142873$$

$$lle=9,4484500$$

$$le=0,2808342 \text{ hinc } \epsilon=9,7191658 \text{ ergo } \epsilon=0,52380$$

$$lls=0,1142873$$

$$llf=9,8334531$$

$$lf=0,6814800 \text{ hinc } \zeta=9,3185200 \text{ ergo } \zeta=0,20821$$

$$lls=0,1142873$$

$$llg=9,4328043$$

$$lg=0,2708988 \text{ hinc } \eta=9,7291012 \text{ ergo } \eta=0,53592$$

etc.

etc.

§. 35. Hinc ergo clare perspicitur, terminos huius progressionis continuo longius a se inuicem recedere atque alternatim ad duos valores fixos appropinquare, quorum maior erit $> 0,53592$, minor vero erit $< 0,20821$. Hoc ergo singulare phenomenon sine ullo calculo in hoc simplici exemplo,

quo $r = \frac{1}{16}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, consideremus; tum enim erit $\beta = (\frac{1}{16})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$, $\gamma = r^{\beta} = \frac{1}{2}$, $\delta = r^{\gamma} = \frac{1}{4}$ etc. omnes igitur termini alternatim erunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Vt igitur hos duos limites fixos inuestigemus, quoties quidem tales occurrunt, designemus eos litteris Φ et Ψ , ita ut sit $r^{\Phi} = \Psi$ et $r^{\Psi} = \Phi$, siue si ponamus $r = \frac{1}{x}$, $\Phi = \frac{1}{x}$ et $\Psi = \frac{1}{y}$, pro dato valore s requiruntur bini numeri x et y , ut fiat $s = x^y$ et $s = y^x$.

§. 36. Sumptis ergo logarithmis erit primo $ls = ylx$ et $ls = xly$, ita ut esse debeat $y/x = x/y$. Ponatur hic $y = px$ fietque $plx = lp + lx$, unde colligitur $lx = \frac{lp}{p-1}$ ideoque

$$x = p^{\frac{1}{p-1}} \text{ atque } y = p^{\frac{p}{p-1}}; \text{ porro vero habebitur } ls = \frac{p^{\frac{p}{p-1}} lp}{p-1}.$$

§. 37. Hinc iam primo discimus casum duorum limitum fixorum locum habere non posse, nisi valor ipsius s in hac aequatione $ls = \frac{p^{\frac{p}{p-1}} lp}{p-1}$ contineatur; tum vero ambo illi li-

mites erunt $x = p^{\frac{1}{p-1}}$ et $y = p^{\frac{p}{p-1}}$, quae ergo eo magis a se inuicem discrepabunt, quo maior numerus pro p accipiat; aliquos igitur casus iuuabit attulisse. Sit primo $p = 2$ eritque $x = 2$ et $y = 4$ ideoque $s = 16$, ita ut sit $r = \frac{1}{16}$; $\Phi = \frac{1}{2}$ et $\Psi = \frac{1}{4}$, quem casum iam supra sumus contemplati; sit nunc $p = \frac{5}{2}$ eritque $x = \frac{9}{4}$ et $y = \frac{27}{8}$, tum vero $s = (\frac{27}{8})^{\frac{9}{2}}$; consequenter erit $r = (\frac{8}{27})^{\frac{9}{2}}$, $\Phi = \frac{4}{9}$ et $\Psi = \frac{8}{27}$.

§. 38. Hinc autem quoque ipsum limitem assignare poterimus, quem simul ac numerus s superauerit, bini valores fixi x et y se exerant. Euidens autem est hunc limitem constitui debere in eo loco, ubi bini numeri x et y fiunt aequales, siue ubi $p = 1$; supra autem vidimus hoc casu fieri $x = e$ simulque $y = e$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, tum vero erit $s = e^e$; quam ob rem habebimus $r = \frac{1}{e^e}$ et $\Phi = \Psi = \frac{1}{e}$, unde patet huiusmodi binos valores sem-

per locum habere, quando radix r minor fuerit quam $\frac{1}{e^e}$.

§. 39. Operae igitur pretium erit hunc ipsum limitem accuratius definire; cum igitur sit $e = 2,7182818$,
 $le =$

$le = 0,4342944$ et $ls = ele$, erit $lls = le + lle = 0,0721786$ ideoque $ls = 1,1808000$, hinc $lr = 8,8192000$, consequenter $r = 0,065948$, siue etiam $r = \frac{1}{15,184}$; vnde intelligitur quamdiu radix r maior fuerit hac fractione $\frac{1}{15,184}$, tum omnes terminos nostrae progressionis semper ad certum limitem fixum conuergere; contra autem quando fuerit $r < \frac{1}{15,184}$ tum accessionem ad duos limites diuersos alternatim conuergere.

De theoremate, quod Illustr. *Marchio de Condorcet* nobiscum communicauit.

§. 40. His mirabilibus phoenomenis perpensis multo facilius erit vim memorati theorematis circa hoc ipsum argumentum intelligere; descripsit autem vir illustris seriem quandam infinitam, cuius termini lege tantopere perplexa formari debent, vt eius indolem non nisi summa patientia adhibita perspicere licet, istius autem seriei summam affirmat esse talem formulam exponentialem replicatam, quam hactenus fusius sumus perscrutati; demonstrationem quidem non addidit: manifestum autem est, eam per inuersionem ex solutione sequentis problematis erui debere.

Problema.

Sumpta pro lubitu radice r , si formata fuerit ista progressio $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ etc. ita vt sit $\beta = r^\alpha$; $\gamma = r^\beta$; $\delta = r^\gamma$ etc. tum eam inuestigare progressionem, quae resultabit, si primus exponent α quapiam quantitate siue augeatur siue minatur.

Solutio.

§. 41. Ponamus igitur primum exponentem esse $= \alpha(1+z)$ similique modo pro sequentibus terminis statuamus

$$r^{\alpha(1+z)} = \beta(1+z'); \quad r^{\beta(1+z')} = \gamma(1+z''); \\ r^{\gamma(1+z'')} = \delta(1+z''') \text{ etc.}$$

H 2

quo

quo pacto progredi licebit, quovsque lubuerit; horum vero terminum vltimum illustris auctor indefinitum assumpsit.

§. 42. Cum igitur sit $r^{\alpha(1+z)} = \beta(1+z')$ ideoque ob $r^{\alpha} = \beta$ habebitur $r^{\alpha z} = (1+z')$, vnde quantitatem z' erui oportet; cum igitur $r^{\alpha z}$ per seriem infinitam sit

$$1 + \alpha z l r + \frac{1}{2} \alpha^2 z^2 (l r)^2 + \frac{1}{6} (\alpha z l r)^3 + \frac{1}{24} (\alpha z l r)^4 + \frac{1}{120} (\alpha z l r)^5 \text{ etc.}$$

affequimur hanc determinationem aequalem isti z seriei, primo termino sublato. Ponamus autem breuitatis gratia $\alpha z l r = v$ ut fiat

$$z' = v + \frac{1}{2} v v + \frac{1}{6} v^3 + \frac{1}{24} v^4 + \frac{1}{120} v^5 + \text{etc.}$$

Cum autem sit $\alpha l r = l \beta$ erit $v = z l \beta$ sicque facili negotio valor z' definietur.

§. 43. Simili modo cum sit $r^{\beta(1+z')} = \gamma(1+z'')$ vnde ob $r^{\beta} = \gamma$, si breuitatis gratia ponamus $\beta z' l r = v'$, ita ut sit $v' = z' l \gamma$, colligitur fore

$$z'' = v' + \frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{6} v'^3 + \frac{1}{24} v'^4 + \frac{1}{120} v'^5 + \text{etc.}$$

simili modo si porro ponamus $\gamma z'' l r = z'' l \delta = v''$ erit

$$z''' = v'' + \frac{1}{2} v''^2 + \frac{1}{6} v''^3 + \frac{1}{24} v''^4 + \frac{1}{120} v''^5 + \text{etc.}$$

Porro vero si fiat $v''' = z''' l \epsilon$ erit

$$z'''' = v''' + \frac{1}{2} v'''^2 + \frac{1}{6} v'''^3 + \frac{1}{24} v'''^4 + \frac{1}{120} v'''^5 + \text{etc.}$$

quae progressio iam facillime percipitur; ac si continuo ipsam quantitatem z substituere velimus, nullum est dubium, quin ipsa series ab illustri *Condorcet* proposita oriatur.

DE
METHODIS QVAE ADHIBERI POSSVNT,
AD INTEGRANDAS AEQVATIONES
DIFFERENTIALIAES LINEARES,
QVAS
DIFFERENTIALIA PLVRIVM VARIABILIVM
INGREDIVNTVR.

Auctore
L E X E L L.

§. I.

Per aequationes differentiales lineares, eae intelligi solent in quibus nec quadrata, nec altiores potestates differentia-
lium reperiuntur, excepto tamen differentiali, quod pro his
aequationibus ponitur constans, quodque differentiale quasi
mensuram constituit, ad quam reliquorum valores exquiri de-
bent. Huius modi igitur aequationes differentiales sub forma
sequenti repraesentari possunt:

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + \delta x + \epsilon y + \zeta z = 0$$

$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz + \delta' x + \epsilon' y + \zeta' z = 0$$

$$ddz + \alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz + \delta'' x + \epsilon'' y + \zeta'' z = 0,$$

vbi quidem breuitatis gratia differentiale constans, eiusque po-
testates eo potius omisimus, quod illas in ipsis coefficientibus
constantibus α , β , γ etc. iam contineri, supponere liceat.
Fient vero hae aequationes aliquanto generaliores, si expres-
siones nostrae modo allatae,

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + \delta x + \epsilon y + \zeta z \text{ etc.}$$

non aequentur nihilo, sed functionibus quibusdam eius quanti-
tatis, cuius differentiale ponitur constans, et Methodi quidem,

quae pro integratione formularum propositarum valent, etiam ad illas generaliores applicari possunt.

§. 2. Pro integrandis quidem aequationibus differentialibus huius formae:

$$ddx + \alpha x + \beta y + \gamma z = T$$

$$ddy + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = T'$$

$$ddz + \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = T''.$$

Illust. *d' Alembert* in egregio opere suae *Dynamices*, elegantem valde proposuit Methodum, de qua tamen mihi non liquet, quomodo adplicari possit, ad aequationes differentiales, in quibus praeter ddx , ddy , ddz etiam differentialia simplicia dx , dy , dz reperiuntur; multo minus eius vsus adhiberi posse videtur, si aequationes differentiales superiorum ordinum proponantur, quas, differentialia quarta, tertia etc. singularum variabilium x , y , z ingrediuntur. Quum igitur resolutiones plurium Problematum Mechanicorum ex integratione huiusmodi aequationum differentialium pendeant; operae pretium duxi, Methodos, quae pro his integrationibus mihi se obtulerunt, heic proponere.

§. 3. Ut igitur a simplicioribus ordiar, propositae sint binae hae aequationes differentiales:

$$I. ddx + \alpha dx + \beta \delta y + \gamma x + \delta y = 0$$

$$II. ddy + \alpha' \delta x + \beta' \delta y + \gamma' x + \delta' y = 0.$$

Quum itaque in his aequationibus differentialia ipsorum x et y sint permixta, in mentem venit, ut modum inuestigare quo reperiri posset aequatio differentialis, quae ex differentialibus vel solius x , vel solius y , sit composita; quod institutum sequenti ratione adgressus sum. Differentientur binae aequationes propositae bis, ita ut habeantur hae aequationes differentiales:

$$III. d^2 x + \alpha ddx + \beta ddy + \gamma dx + \delta dy = 0$$

$$IV. d^2 y + \alpha' ddx + \beta' ddy + \gamma' dx + \delta' dy = 0$$

V.

$$V. d^4x + \alpha d^3x + \beta d^2y + \gamma ddx + \delta ddy = 0$$

$$VI. d^4y + \alpha' d^3x + \beta' d^2y + \gamma' ddx + \delta' ddy = 0.$$

Iam vero totium negotium eo redit, ut ex aequatione V, subsidio aequationum praecedentium I. II. III. IV. eliminari queant, omnia differentialia ipsius y , scilicet d^2y , ddy , dy et y , quod omnino succedere debere ex rei natura intelligitur; hac autem eliminatione facta, prodibit aequatio differentialis quarti gradus, quam sola differentialia ipsius x ingrediuntur. Operosum autem foret, si hanc substitutionem re ipsa perficere vellemus, quare rem ita tentabimus, ut supponamus, aequationem nostram quaesitam prodire, per sequentem combinationem: $V + \lambda IV. + \mu III. + \nu II. + \varrho I = 0$. Hinc autem consequemur:

$$\begin{aligned} d^4x + \alpha d^3x + \beta d^2y + \gamma ddx + \delta ddy \\ + \lambda d^3y + \lambda \alpha' ddx + \lambda \beta' ddy + \lambda \gamma' dx + \lambda \delta' dy \\ + \mu d^3x + \mu \alpha ddx + \mu \beta ddy + \mu \gamma dx + \mu \delta dy \\ + \nu ddx + \nu ddy + \nu \alpha' dx + \nu \beta' dy + \nu \gamma' x + \nu \delta' y \\ + \varrho \alpha dx + \varrho \beta dy + \varrho \gamma x + \varrho \delta y = 0. \end{aligned}$$

In qua aequatione quum per hypothesin sola differentialia ipsius x reperiri debeant, coefficientes ipsorum d^3y , ddy , dy et y nihilo aequari debent, ex quo sequentes prodibunt aequationes:

$$\beta + \lambda = 0, \delta + \lambda \beta' + \mu \beta + \nu = 0; \lambda \delta' + \mu \delta + \nu \beta' + \varrho \beta = 0; \nu \delta' + \varrho \delta = 0.$$

Hinc autem deducuntur sequentes valores:

$$\lambda = -\beta; \mu = \beta'; \nu = -\delta, \varrho = \delta',$$

quare aequatio nostra erit:

$$\begin{aligned} d^4x + (\alpha + \mu) d^3x + (\gamma + \lambda \alpha' + \mu \alpha + \varrho) ddx + (\lambda \gamma' + \mu \gamma + \nu \alpha' + \varrho \alpha) dx \\ + (\nu' \gamma + \varrho \gamma) x = 0, \text{ siue} \\ d^4x + (\alpha + \beta') d^3x + (\alpha \beta' - \alpha' \beta + \gamma + \delta') ddx + (\alpha \delta' - \alpha' \delta + \beta' \gamma - \beta \gamma') dx \\ + (\delta' \gamma - \delta \gamma') x = 0, \end{aligned}$$

sicque iam adepti sumus aequationem differentialem, quam
sola

sola differentialia ipsius x ingrediuntur. Vltiorem autem integrationem huius aequationis differentialis heic suscipere, eo minus e re est, quod totum hoc negotium iam alibi sit tractatum, imprimisque in Tomo II. Calculi Integralis Illustr. Euleri.

§. 4. Si eadem ratione atque iam factum est, quaerere vellemus aequationem, quae ex solis differentialibus ipsius y componitur, perueniremus ad hanc aequationem differentialem:

$$d^2y + (\alpha + \beta')d'y + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')ddy + (\alpha\delta' - \alpha'\delta - \beta\gamma' + \beta'\gamma)dy + (\delta'\gamma - \delta\gamma')y = 0$$

quae priori prorsus similis est, vnde intelligitur x et y simili modo determinari; superfluum autem foret vtramque hanc quantitatem seorsim inuestigare, inuento enim valore ipsius x , valor quantitatis y , per solas differentiationes, facile eruitur. Hunc enim in finem ope aequationis I. et II, ex aequatione III. eliminantur ddy et dy , ita vt sola remaneat y , cuius igitur valor per d^2x , ddx , dx et x exprimetur. Vt autem hoc facilius procedat, ponamus esse: III. $+ \eta$ II. $+ \theta$. I. $= 0$, siue

$$d^2x + \alpha ddx + \beta ddy + \gamma dx + \delta dy + \theta ddx + \eta ddy + \eta\alpha'dx + \eta\beta'dy + \eta\gamma'x + \eta'\delta y + \theta\alpha dx + \theta\beta dy + \theta\gamma x + \theta\delta y = 0,$$

vnde erit $\beta + \eta = 0$, siue $\eta = -\beta$, tumque esse debet

$$\delta + \eta\beta' + \theta\beta = 0, \text{ siue } \theta = \frac{\beta\beta' - \delta}{\beta} = \beta' - \frac{\delta}{\beta},$$

quare habebimus:

$$d^2x + (\alpha + \beta' - \frac{\delta}{\beta})ddx + (\gamma - \alpha'\beta + \alpha\beta' - \frac{\alpha\delta}{\beta})dx + (\beta'\gamma - \beta\gamma' - \frac{\delta\gamma}{\beta})x + (\beta'\delta - \beta\delta' - \frac{\delta^2}{\beta})y = 0.$$

Cacterum obseruari meretur, quod si ad huius aequationis differentiale, addatur ipsa per $\frac{\delta}{\beta}$ multiplicata, tumque inde subtra-

trahatur aequatio I. in $(\frac{\beta'\delta}{\beta} - \delta' - \frac{\delta^2}{\beta^2})$ ducta, prodire aequationem istam:

$$d'x + (\alpha + \beta')d^2x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')ddx + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')dx + (\delta'\gamma - \delta\gamma')x = 0.$$

Ex quo consensus harum binarum aequationum tanto magis confirmatur.

§. 5. Si in aequationibus nostris ponatur, $\alpha = 0$; $\alpha' = 0$; $\beta = 0$; $\beta' = 0$, pertingemus ad has aequationes quarti gradus

$$d'x + (\gamma + \delta')ddx + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)x = 0 \text{ et} \\ d'y + (\gamma + \delta')ddy + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)y = 0.$$

Tumque aequatio differentialis per quam y exprimitur, ita erit expressa: $ddx + \gamma x + \delta y = 0$, siue y iam per primam aequationum propositarum dabitur, modo cognitus fuerit valor ipsius x . Porro si ponatur $\gamma' = 0$, $\delta' = 0$, siue si aequatio nostra II. fuerit, $dy + \alpha'x + \beta'y = 0$, fiet aequatio nostra finalis:

$$d^4x + (1 + \beta')d^5x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma)ddx - \alpha'\delta dx = 0, \text{ siue} \\ d^3x + (\alpha + \beta')ddx + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma)dx - \alpha'\delta x = 0.$$

Neque hac integratione ullam constantem arbitrariam introducere necesse est. Tum vero ex aequationibus nostris differentialibus quarti gradus, quae sola differentialia ipsorum x et y inuoluunt, facile perspicitur, loco x et y , introduci posse vel summam $x + y$ vel differentiam $x - y$, seu etiam quoduis huiusmodi productum $\pi x + \sigma y$, quod si enim id statuatur $= z$, erit quoque

$$d^4z + (\alpha + \beta')d^5z + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')ddz + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')dz + (\delta'\gamma - \delta\gamma')z = 0.$$

§. 6. Primo quidem intuitu incongruum videri posset, quod ex binis nostris aequationibus differentialibus, quae secundi gradus tantum sunt, per differentiationem ad aequationes differentiales quarti gradus transiuimus; quum scilicet *Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I.* I solu-

solutio aequationis differentialis quarti gradus sine dubio maiorem pariat difficultatem, quam resolutio aequationis secundi gradus. Verum heic perpendendum est, binas proponi aequationes differentiales secundi gradus, per quarum integrationem quatuor constantes arbitrariae introducuntur, totidem nimirum ac per integrationem vnius aequationis differentialis quarti gradus. At integrata vna earum, vti ea quam sola differentialia ipsius x ingrediuntur, alteram pro y allatam, seorsim integrare, minime necessarium est; quippe quum y , vti modo ostendimus, per valores differentialium d^3x, ddx, dx et ipsam x , sponte exprimatur; vnde inuentis constantibus arbitrariis, quae pro x locum habent, nullae nouae constantes pro y introducuntur.

§. 7. Consideremus nunc has binas aequationes differentiales:

$$\text{I. } a^5x + \alpha ddx + \beta ddy + \gamma dx + \delta dy + \epsilon x + \zeta y = 0$$

II. $d^3y + \alpha' ddx + \beta' ddy + \gamma' dx + \delta' dy + \epsilon' x + \zeta' y = 0$
ex quibus vt elici queat aequatio, sola differentialia ipsius x involuens, differentietur vnaquaeque harum aequationum ter, vt habeatur:

$$\text{III. } d^4x + \alpha d^3x + \beta d^3y + \gamma ddx + \delta ddy + \epsilon dx + \zeta dy = 0$$

$$\text{IV. } d^4y + \alpha' d^3x + \beta' d^3y + \gamma' ddx + \delta' ddy + \epsilon' dx + \zeta' dy = 0$$

$$\text{V. } d^5x + \alpha d^4x + \beta d^4y + \gamma d^3x + \delta d^3y + \epsilon ddx + \zeta ddy = 0$$

$$\text{VI. } d^5y + \alpha' d^4x + \beta' d^4y + \gamma' d^3x + \delta' d^3y + \epsilon' ddx + \zeta' ddy = 0$$

$$\text{VII. } d^6x + \alpha d^5x + \beta d^5y + \gamma d^4x + \delta d^4y + \epsilon d^3x + \zeta d^3y = 0$$

$$\text{VIII. } d^6y + \alpha' d^5x + \beta' d^5y + \gamma' d^4x + \delta' d^4y + \epsilon' d^3x + \zeta' d^3y = 0.$$

Iam vero ponatur esse aequatio, sola differentialia ipsius x involuens, ista sequens:

$$\text{VII} + \lambda' \text{VI} + \lambda \text{V} + \mu' \text{IV} + \mu \text{III} + \nu' \text{II} + \nu \text{I} = 0$$

quare

quare habebimus :

$$= \begin{vmatrix} d^2x & d^2x & d^2y & d^2x & d^2y & d^2x & d^2y & ddx & ddy & dx & dy & x & y \\ +1 & +\alpha & +\beta & +\gamma & +\delta & +\epsilon & +\zeta & +\lambda\epsilon & +\lambda\zeta & & & & \\ & +\lambda & +\lambda' & +\lambda\alpha & +\lambda\beta & +\lambda\gamma & +\lambda\delta & +\mu\gamma & +\mu\delta & +\mu\epsilon & +\mu\zeta & & \\ & & +\mu & +\mu' & +\mu\alpha & +\mu\beta & +\mu\gamma & +\nu\alpha & +\nu\beta & +\nu\gamma & +\nu\delta & +\nu\epsilon & +\nu\zeta \\ & & +\lambda'\alpha' & +\lambda'\beta' & +\nu & +\lambda'\delta' & +\lambda'\epsilon' & +\lambda'\zeta' & & & & & \\ & & & +\lambda'\gamma' & +\mu'\beta' & +\mu'\gamma' & +\mu'\delta' & +\mu'\epsilon' & +\mu'\zeta' & & & & \\ & & & +\mu'\alpha' & +\nu' & +\nu'\alpha' & +\nu'\beta' & +\nu'\gamma' & +\nu'\delta' & +\nu'\epsilon' & +\nu'\zeta' & & \end{vmatrix}$$

Heic vero coefficientes differentialium d^2y , d^2y , d^2y , ddx , ddy , dx et ipsius y disparere debent, quare sequentes habebuntur aequalitates :

$$\begin{aligned} \beta + \lambda' &= 0; \quad \delta + \lambda\beta + \mu' + \lambda'\beta' = 0 \\ \zeta + \lambda\delta + \mu\beta + \lambda'\delta' + \mu'\beta' + \nu' &= 0 \\ \lambda\zeta + \mu\delta + \nu\beta + \lambda'\zeta' + \mu'\delta' + \nu'\beta' &= 0 \\ \mu\zeta + \nu\delta + \mu'\zeta' + \nu'\delta' &= 0; \quad \nu\zeta + \nu'\zeta' = 0. \end{aligned}$$

Ex his autem aequationibus sequentes deducuntur valores :

$\lambda' = -\beta$; $\lambda = \beta'$; $\mu' = -\delta$; $\mu = \delta'$; $\nu' = -\zeta$; $\nu = \zeta$, quibus valoribus suffectis, aequatio nostra sexti gradus sequenti modo erit expressa :

$$\begin{aligned} d^2x + (\alpha + \beta')d^2x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')d^2x \\ + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma' + \epsilon + \zeta')d^2x \\ + (\alpha\zeta' - \alpha'\zeta + \beta'\epsilon - \beta\epsilon' + \gamma\delta' - \gamma'\delta)ddx \\ + (\gamma\zeta' - \gamma'\zeta + \delta'\epsilon - \delta\epsilon')dx + (\epsilon\zeta' - \epsilon'\zeta)x = 0. \end{aligned}$$

§. 8. Simili plane ratiocinio pertingere licebit ad aequationem differentialem, quam sola differentialia ipsius y ingrediuntur, priori perfecte similem. At vero postquam variabilis x inuenta fuerit, inde y facile determinabitur ope huius combinationis :

$$V + m. IV + m'. III + n. II + n'. I,$$

quae euoluta dat :

$$\begin{aligned}
 0 = & d^2x + \alpha.d^2x + \beta.d^2y + \gamma.d^2x + \delta.d^2y + \varepsilon.ddx + \zeta.d dy \\
 & + m' + m + m\alpha' + m\beta' + m\gamma' + m\delta' + m\varepsilon'dx + m\zeta'dy \\
 & + m\alpha + m'\beta + m'\gamma + m'\delta + m'\varepsilon + m'\zeta \\
 & + n' + n + n\alpha' + n\beta' + n\gamma' + n\delta' \\
 & + n\varepsilon'x + n\zeta'y + n'\alpha + n'\beta + n'\gamma + n'\delta \\
 & + n'\varepsilon + n'\zeta.
 \end{aligned}$$

Quum termini quae differentialia ipsius y inuoluunt prorsus eliminari debeant , habebimus has aequationes :

$$\begin{aligned}
 \beta + m = 0; \quad \delta + m\beta' + m'\beta + n = 0; \quad \zeta + m'\delta + m\delta' + n\beta' + n'\beta = 0; \\
 m\zeta' + m'\zeta + n\delta' + n'\delta = 0,
 \end{aligned}$$

vnde conficietur :

$$m = -\beta; \quad m' = \beta' + \lambda; \quad n = -\delta - \beta\lambda; \quad n' = \delta' - \frac{\zeta}{\beta} + \lambda(\beta' - \frac{\delta}{\beta}),$$

vbi quidem

$$\lambda = \frac{\beta^2 \zeta' - \beta \beta' \zeta - \zeta \delta}{\beta(\beta' \delta - \beta \delta') - \delta^2 + \beta^2 \gamma} = \frac{\beta(\beta' \zeta' - \beta' \zeta) - \zeta \delta}{\beta(\beta' \delta - \beta \delta') - \delta^2 + \beta^2 \gamma}.$$

Cacterum ipsam quidem aequationem , qua y sic exprimitur heic exponere , nunc nihil attinet.

§. 9. Si fuerit $\varepsilon = 0$; $\zeta = 0$; $\varepsilon' = 0$; $\zeta' = 0$, seu si aequationes nostrae fuerint vt supra :

$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0$; $ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y = 0$,
aequatio finalis pro x , erit :

$$\begin{aligned}
 d^2x + (\alpha + \beta')d^2x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')d^2x + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma')d^2x \\
 + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)ddx = 0,
 \end{aligned}$$

quae sponte sua ad illam aequationem quarti gradus §. 4. allatam, deprimitur. Porro vero si tantum sit $\varepsilon' = 0$, $\zeta' = 0$, fiet aequatio nostra :

$$\begin{aligned}
 d^2x + (\alpha + \beta')d^2x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')d^2x + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma' + \varepsilon)ddx \\
 + (-\alpha'\zeta + \beta'\varepsilon + \gamma\delta' - \gamma'\delta)dx + (\delta'\varepsilon - \gamma'\zeta)x = 0.
 \end{aligned}$$

Deinde si vltcrius sit quoque $\gamma' = 0$; $\delta' = 0$, fiet aequatio :

$$\begin{aligned}
 d^2x + (\alpha + \beta')d^2x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma)ddx + (\beta'\gamma - \alpha'\delta + \varepsilon)dx \\
 + (\beta'\varepsilon - \alpha'\zeta)x = 0.
 \end{aligned}$$

Quibus

Quibus perpensis iam facile patet, istam aequationem differentialem, quae ex solis differentialibus ipsius x componitur, eiusdem semper esse difficultatis, ac binas illas propositas, differentialia ipsorum x et y inuoluentes, ex quibus illa deducta fuit. Vnaquaeque autem aequatio differentialis aestimatur ex ordine differentialis summi in ista aequatione, sic haec aequatio:

$$d^3x + \alpha ddx + \beta ddy + \gamma dx + \delta dy + \varepsilon x + \zeta y = 0,$$

est aequatio differentialis tertii ordinis, cum qua igitur si combinetur illa secundi ordinis:

$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y = 0.$$

perueniemus ad aequationem differentialem quinti gradus, sola differentialia ipsius x inuoluentem.

§. 10. Ex iis quae nunc docuimus, facile constat, quomodo tractari debeant aequationes adhuc altiorum ordinum, in quibus differentialia binarum variabilium x et y occurrunt. Vti si propositae fuerint hae aequationes:

$$d^3x + \alpha d^2x + \beta d^2y + \gamma ddx + \delta ddy + \varepsilon dx + \zeta dy + \eta x + \theta y = 0$$

$$d^2y + \alpha' d^2x + \beta' d^2y + \gamma' ddx + \delta' ddy + \varepsilon' dx + \zeta' dy + \eta' x + \theta' y = 0.$$

Nimirum si breuitatis gratia, prior harum aequationum indicetur per P , posterior per P' , capienda sunt differentialia dP , ddP , d^3P , d^4P , itemque dP' , ddP' , d^3P' , tumque facta combinatione:

$$d^4P + \lambda d^3P + \lambda' d^3P' + \mu d^2P + \mu' d^2P' + \nu dP + \nu' dP' + \zeta P + \zeta' P' = 0,$$

emerget aequatio, quam sola differentialia ipsius x ingrediuntur, si valores ipsorum λ , λ' , μ , μ' etc. ita determinantur, ut sit:

$$\lambda = +\beta'; \lambda' = -\beta; \mu = +\delta'; \mu' = -\delta; \nu = +\zeta'; \nu' = -\zeta; \zeta = +\theta'; \zeta' = -\theta.$$

His enim valoribus adhibitis, coefficientes differentialium ipsius y euanescent, pro nostra expressione:

$d^4P + \lambda d^3P + \lambda' d^3P + \mu ddP + \mu' ddP' + \nu dP + \nu' dP' + \varphi P + \varphi' P' = 0$.
Iidem vero valores in coefficientibus differentialium ipsius x introducti, sequentem exhibebunt aequationem:

$$\begin{aligned} d^4x + (\alpha + \beta') d^3x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta') d^2x \\ + (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta'\gamma' + \varepsilon + \zeta') d^1x \\ + (\alpha\zeta' - \alpha'\zeta + \beta'\varepsilon - \beta'\varepsilon' + \gamma\delta' - \gamma'\delta + \eta + \theta') d^0x \\ + (\alpha\theta' - \alpha'\theta + \beta'\eta - \beta'\eta' + \gamma\zeta' - \gamma'\zeta + \delta'\varepsilon - \delta'\varepsilon') ddx \\ + (\gamma\theta' - \gamma'\theta + \delta'\eta - \delta'\eta' + \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta) ddx + (\varepsilon\theta' - \varepsilon'\theta + \zeta'\eta - \zeta'\eta') dx \\ + (\eta\theta' - \eta'\theta) x = 0. \end{aligned}$$

§. 11. Operae pretium iam est, vt dispiciamus quomodo valores coefficientium pro differentialibus, d^2x , d^3x . etc. expedite formari queant, quippe quum hinc evidens fiet quomodo idem negotium, pro aequationibus altioribus perficere liceat. Quum igitur aequationes nostrae propositae fuerint:

$$\begin{aligned} d^4x + \alpha d^3x + \beta d^2y + \gamma ddx + \delta ddy + \varepsilon dx + \zeta dy + \eta x + \theta y = 0 \\ d^4y + \alpha' d^3x + \beta' d^2y + \gamma' ddx + \delta' ddy + \varepsilon' dx + \zeta' dy + \eta' x + \theta' y = 0. \end{aligned}$$

Notentur coefficientes differentialium ipsius x , qui sunt:

$$\alpha, \alpha', \gamma, \gamma', \varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta'$$

itemque coefficientes differentialium ipsius y sequentes:

$$\beta, \beta', \delta, \delta', \zeta, \zeta', \theta, \theta'.$$

Tum vero obseruetur in coefficientibus differentialium pro x , aequationis nostrae finalis, primum occurrere has summas simplicium coefficientium:

$$\alpha + \beta'; \gamma + \delta'; \varepsilon + \zeta'; \eta + \theta';$$

quarum prima coefficientem differentialis d^2x constituit, secunda vero coefficientem differentialis d^3x , tertia coefficientem differentialis d^4x et quarta coefficientem differentialis d^4x ingreditur. Porro sequentia formentur producta, binorum coefficientium:

$$\begin{aligned} \alpha\beta' - \alpha'\beta; \alpha\delta' - \alpha'\delta; \alpha\zeta' - \alpha'\zeta; \alpha\theta' - \alpha'\theta; \\ \beta'\gamma - \beta'\gamma'; \beta'\varepsilon - \beta'\varepsilon'; \beta'\eta - \beta'\eta'; \\ \gamma\delta' - \gamma'\delta; \gamma\zeta' - \gamma'\zeta; \gamma\theta' - \gamma'\theta; \delta'\varepsilon - \delta'\varepsilon'; \delta'\eta - \delta'\eta'; \\ \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta; \varepsilon\theta' - \varepsilon'\theta; \zeta'\eta - \zeta'\eta'; \eta\theta' - \eta'\theta; \end{aligned}$$

quae

quae maioris perspicuitatis gratia scribantur, vti sequens schema indicat:

$$\begin{array}{ccccccc}
 d^5 x & d^4 x & d^3 x & d^2 x & d d x & d x & x \\
 \alpha \beta' - \alpha' \beta & \alpha \delta' - \alpha' \delta & \alpha \zeta' - \alpha' \zeta & \alpha \theta' - \alpha' \theta & & & \\
 & \beta' \gamma - \beta \gamma' & \beta' \varepsilon - \beta \varepsilon' & \beta' \eta - \beta \eta' & & & \\
 & & \gamma \delta' - \gamma' \delta & \gamma \zeta' - \gamma' \zeta & \gamma \theta' - \gamma' \theta & & \\
 & & & \delta' \varepsilon - \delta \varepsilon' & \delta' \eta - \delta \eta' & \varepsilon \theta' - \varepsilon' \theta & \\
 & & & & \varepsilon \zeta' - \varepsilon' \zeta & \zeta' \eta - \zeta \eta' & \eta \theta' - \eta' \theta
 \end{array}$$

Tituli autem differentialium singulis columnis verticalibus superscripti indicant, ad quemnam coefficientem producta in istis columnis contenta, pertineant.

§. 12. Simili modo si propositae fuerint binae hae aequationes differentiales quinti gradus:

$$d^5 x + \alpha d^4 x + \beta d^3 y + \gamma d^3 x + \delta d^2 y + \varepsilon d d x + \zeta d d y + \eta d x + \theta d y + \iota x + \kappa y = 0$$

$$d^5 y + \alpha' d^4 x + \beta' d^4 y + \gamma' d^3 x + \delta' d^3 y + \varepsilon' d d x + \zeta' d d y + \eta' d x + \theta' d y + \iota' x + \kappa' y = 0,$$

quae perducent ad hanc aequationem decimi gradus:

$$d^{10} x + A d^9 x + B d^8 x + C d^7 x + D d^6 x + E d^5 x + F d^4 x + G d^3 x + H d d x + I d x + K x = 0,$$

coefficientes A, B, C etc. sequenti modo formari poterunt: Primum notentur summae:

$$\alpha + \beta'; \quad \gamma + \delta'; \quad \varepsilon + \zeta'; \quad \eta + \theta'; \quad \iota + \kappa';$$

quarum $\alpha + \beta' = A$, reliquae vero $\gamma + \delta'$; $\varepsilon + \zeta'$; $\eta + \theta'$; $\iota + \kappa'$ respectiue pertinent ad B, C, D, E. Deinde formentur producta ex binis coefficientibus, vti supra docuimus:

$d^2 x$	$d^2 x$	$d^2 x$	$d^2 x$	$d^2 x$	$d^2 x$	ddx	dx	x
$\alpha\beta' - \alpha'\beta$	$\alpha\delta' - \alpha'\delta$	$\alpha\zeta' - \alpha'\zeta$	$\alpha\theta' - \alpha'\theta$	$\alpha\kappa' - \alpha'\kappa$	$d^2 x$			
$\beta'\gamma - \beta\gamma'$	$\beta'\varepsilon - \beta\varepsilon'$	$\beta'\eta - \beta\eta'$	$\beta'\iota - \beta\iota'$	$\beta'\iota - \beta\iota'$	$\gamma\kappa' - \gamma\kappa$			
	$\gamma\delta' - \gamma'\delta$	$\gamma\zeta' - \gamma'\zeta$	$\gamma\theta' - \gamma'\theta$	$\gamma\theta' - \gamma'\theta$	$\gamma\iota' - \gamma\iota$			
	$\delta'\varepsilon - \delta\varepsilon'$	$\delta'\eta - \delta\eta'$	$\delta'\iota - \delta\iota'$	$\delta'\iota - \delta\iota'$	$\varepsilon\kappa' - \varepsilon\kappa$			
		$\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta$	$\varepsilon\theta' - \varepsilon'\theta$	$\varepsilon\theta' - \varepsilon'\theta$	$\varepsilon\iota' - \varepsilon\iota$			
			$\zeta'\eta - \zeta\eta'$	$\zeta'\iota - \zeta\iota'$	$\zeta'\iota - \zeta\iota'$	$\eta\kappa' - \eta\kappa$		
					$\eta\theta' - \eta'\theta$	$\eta\iota' - \eta\iota$	$\theta'\iota - \theta\iota'$	$\iota\kappa' - \iota\kappa$

Hinc igitur pro aequatione nostra finali, erunt valores coefficientium:

$$A = \alpha + \beta'$$

$$B = \gamma + \delta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

$$C = \varepsilon + \zeta' + \alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma'$$

$$D = \eta + \theta' + \alpha\zeta' - \alpha'\zeta + \beta'\varepsilon - \beta\varepsilon' + \gamma\delta' - \gamma'\delta$$

$$E = \iota + \kappa' + \alpha\theta' - \alpha'\theta + \beta'\eta - \beta\eta' + \gamma\zeta' - \gamma'\zeta + \delta'\varepsilon - \delta\varepsilon'$$

$$F = + \alpha\kappa' - \alpha'\kappa + \beta'\iota - \beta\iota' + \gamma\theta' - \gamma'\theta + \delta'\eta - \delta\eta' + \varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta$$

$$G = + \gamma\kappa' - \gamma'\kappa + \delta'\iota - \delta\iota' + \varepsilon\theta' - \varepsilon'\theta + \zeta'\eta - \zeta\eta'$$

$$H = + \varepsilon\kappa' - \varepsilon'\kappa + \zeta'\iota - \zeta\iota' + \eta\theta' - \eta'\theta$$

$$I = + \eta\kappa' - \eta'\kappa + \theta'\iota - \theta\iota'$$

$$K = + \iota\kappa' - \iota'\kappa$$

Nec haec disquisitionio maiorem inueniet difficultatem, si aequationes differentiales huius generis, adhuc altiorum ordinum proponantur; quare iam ad eas aequationes differentiales trans-eamus, in quibus differentialia trium variabilium x, y, z , occurrunt.

§. 13. Hec vero iterum a simpliciiori quodam casu, initium faciamus. Propositae igitur sint hae tres aequationes secundi ordinis:

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma dz + \delta x + \varepsilon y + \zeta z = 0$$

$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz + \delta' x + \varepsilon' y + \zeta' z = 0$$

$$ddz + \alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz + \delta'' x + \varepsilon'' y + \zeta'' z = 0,$$

ex

ex quibus aequationem elicere oportet, quae sola differentia-
lia ipsius x contineat. Quodsi nunc breuitatis gratia, haec tres
aequationes respectiue indicentur per P, P', P'' , tumque ca-
pianur differentialia harum formularum, vsque ad quartum,
scilicet:

$$dP \dots d^4 P; dP' \dots d^4 P'; dP'' \dots d^4 P'';$$

deinde vero illa fiat combinatio

$$\begin{aligned} d^4 P + \lambda d^3 P + \mu ddP + \nu dP + \varrho P \\ + \lambda' d^3 P' + \mu' ddP' + \nu' dP' + \varrho' P' = 0 \\ + \lambda'' d^3 P'' + \mu'' ddP'' + \nu'' dP'' + \varrho'' P''. \end{aligned}$$

Si in hac aequatione neque differentialia ipsius y , nec ipsius z
reperiantur, illud perfecimus, quod nobis erat propositum, vt
aequationem eliceremus ex solis differentialibus ipsius x com-
positam. Ex ista vero conditione, valores coefficientium $\lambda,$
 μ etc. λ', μ' etc. facile determinantur. Facta scilicet euolu-
tione nostrae aequationis:

$$\begin{aligned} d^4 P + \lambda d^3 P \dots + \varrho P \\ + \lambda' d^3 P' \dots + \varrho' P' = 0 \\ + \lambda'' d^3 P'' \dots + \varrho'' P'' \end{aligned}$$

obtinebimus:

$d^4 x$	$d^3 x$	$d^2 y$	$d^2 z$	$d^3 x$	$d^2 y$	$d^2 z$	$d^3 x$	$d^2 y$	$d^2 z$
$0 = +1$	$+ \alpha$	$+ \beta$	$+ \gamma$	$+ \delta$	$+ \epsilon$	$+ \zeta$	$+ \lambda \delta$	$+ \lambda \epsilon$	$+ \lambda \zeta$
	$+ \lambda$	$+ \lambda'$	$+ \lambda''$	$+ \lambda \alpha$	$+ \lambda \beta$	$+ \lambda \gamma$	$+ \lambda' \delta'$	$+ \lambda' \epsilon'$	$+ \lambda' \zeta'$
				$+ \lambda' \alpha'$	$+ \lambda' \beta'$	$+ \lambda' \gamma'$	$+ \lambda'' \delta''$	$+ \lambda'' \epsilon''$	$+ \lambda'' \zeta''$
				$+ \lambda'' \alpha''$	$+ \lambda'' \beta''$	$+ \lambda'' \gamma''$	$+ \mu \alpha$	$+ \mu \beta$	$+ \mu \gamma$
				$+ \mu$	$+ \mu'$	$+ \mu''$	$+ \mu' \alpha'$	$+ \mu' \beta'$	$+ \mu' \gamma'$
							$+ \mu'' \alpha''$	$+ \mu'' \beta''$	$+ \mu'' \gamma''$
							$+ \nu$	$+ \nu'$	$+ \nu''$

ddx	ddy	ddz	dx	dy	dz	x	y	z
$+ \mu \delta$	$+ \mu \epsilon$	$+ \mu \zeta$	$+ \nu \delta$	$+ \nu \epsilon$	$+ \nu \zeta$	$+ \varrho \delta$	$+ \varrho \epsilon$	$+ \varrho \zeta$
$+ \mu' \delta'$	$+ \mu' \epsilon'$	$+ \mu' \zeta'$	$+ \nu' \delta'$	$+ \nu' \epsilon'$	$+ \nu' \zeta'$	$+ \varrho' \delta'$	$+ \varrho' \epsilon'$	$+ \varrho' \zeta'$
$+ \mu'' \delta''$	$+ \mu'' \epsilon''$	$+ \mu'' \zeta''$	$+ \nu'' \delta''$	$+ \nu'' \epsilon''$	$+ \nu'' \zeta''$	$+ \varrho'' \delta''$	$+ \varrho'' \epsilon''$	$+ \varrho'' \zeta''$
$+ \nu \alpha$	$+ \nu \beta$	$+ \nu \gamma$	$+ \varrho \alpha$	$+ \varrho \beta$	$+ \varrho \gamma$			
$+ \nu' \alpha'$	$+ \nu' \beta'$	$+ \nu' \gamma'$	$+ \varrho' \alpha'$	$+ \varrho' \beta'$	$+ \varrho' \gamma'$			
$+ \nu'' \alpha''$	$+ \nu'' \beta''$	$+ \nu'' \gamma''$	$+ \varrho'' \alpha''$	$+ \varrho'' \beta''$	$+ \varrho'' \gamma''$			
$+ \varrho$	$+ \varrho'$	$+ \varrho''$						

Vbi si coefficients differentialium ipsius y et z nihilo aequales statuuntur, sequentes prodibunt aequationes:

$$\begin{aligned}
 \beta + \lambda' &= 0; \quad \epsilon + \lambda \beta + \lambda' \beta' + \lambda'' \beta'' + \mu' = 0 \\
 \gamma + \lambda'' &= 0; \quad \zeta + \lambda \gamma + \lambda' \gamma' + \lambda'' \gamma'' + \mu'' = 0 \\
 \lambda \epsilon + \lambda' \epsilon' + \lambda'' \epsilon'' + \mu \beta + \mu' \beta' + \mu'' \beta'' + \nu &= 0 \\
 \lambda \zeta + \lambda' \zeta' + \lambda'' \zeta'' + \mu \gamma + \mu' \gamma' + \mu'' \gamma'' + \nu'' &= 0 \\
 \mu \epsilon + \mu' \epsilon' + \mu'' \epsilon'' + \nu \beta + \nu' \beta' + \nu'' \beta'' + \varrho' &= 0 \\
 \mu \zeta + \mu' \zeta' + \mu'' \zeta'' + \nu \gamma + \nu' \gamma' + \nu'' \gamma'' + \varrho'' &= 0 \\
 \nu \epsilon + \nu' \epsilon' + \nu'' \epsilon'' + \varrho \beta + \varrho' \beta' + \varrho'' \beta'' &= 0 \\
 \nu \zeta + \nu' \zeta' + \nu'' \zeta'' + \varrho \gamma + \varrho' \gamma' + \varrho'' \gamma'' &= 0 \\
 \varrho \epsilon + \varrho' \epsilon' + \varrho'' \epsilon'' &= 0 \\
 \varrho \zeta + \varrho' \zeta' + \varrho'' \zeta'' &= 0.
 \end{aligned}$$

Quae si recte tractentur, hos dabunt valores:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \beta' + \gamma''; \quad \lambda' = -\beta; \quad \lambda'' = -\gamma \\
 \mu &= \beta' \gamma'' - \beta'' \gamma' + \epsilon' + \zeta''; \quad \mu' = \beta'' \gamma - \beta \gamma'' - \epsilon; \quad \mu'' = \beta \gamma' - \beta' \gamma - \zeta; \\
 \nu &= \gamma'' \epsilon' - \gamma' \epsilon'' + \beta' \zeta'' - \beta'' \zeta'; \\
 \nu' &= \gamma \epsilon'' - \gamma'' \epsilon + \beta'' \zeta - \beta \zeta''; \\
 \nu'' &= \gamma' \epsilon - \gamma \epsilon' + \beta \zeta' - \beta' \zeta; \\
 \varrho &= \epsilon' \zeta'' - \epsilon'' \zeta'; \quad \varrho' = \epsilon'' \zeta - \epsilon \zeta''; \quad \varrho'' = \epsilon \zeta' - \epsilon' \zeta.
 \end{aligned}$$

§. 14. Iam igitur si aequatio nostra sola differentialia ipsius x continens, supponatur esse:

$d^5 x$

$$d'x + A d'x + B d'x + C d'x + D ddx + E dx + F x = 0,$$

pro coefficientibus A, B, C etc. hae prodibunt expressiones :

$$A = \alpha + \lambda = \alpha + \beta' + \gamma'';$$

$$B = \delta + \mu + \lambda\alpha + \lambda'\alpha' + \lambda''\alpha'' = \delta + \varepsilon' + \zeta'' + \alpha\beta' - \alpha'\beta + \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma';$$

$$C = \lambda\delta + \lambda'\delta' + \lambda''\delta'' + \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'' + \nu, \text{ siue}$$

$$C = \alpha\varepsilon' - \alpha'\varepsilon + \alpha\zeta'' - \alpha''\zeta + \beta'\delta - \beta\delta' + \beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \gamma''\delta - \gamma\delta'' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'' + \alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' - \alpha\beta''\gamma' - \alpha'\beta\gamma'' - \alpha''\beta'\gamma$$

$$D = \mu\delta + \mu'\delta' + \mu''\delta'' + \nu\alpha + \nu'\alpha' + \nu''\alpha'' + \varrho =$$

$$\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon + \delta\zeta'' - \delta''\zeta + \varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta' + \alpha(\beta'\zeta'' - \beta''\zeta' + \gamma''\varepsilon' - \gamma'\varepsilon'') + \beta(\gamma'\delta'' - \gamma''\delta') + \alpha'(\beta''\zeta - \beta\zeta'' + \gamma\varepsilon'' - \gamma''\varepsilon) + \beta'(\gamma''\delta - \gamma\delta'') + \alpha''(\beta\zeta' - \beta'\zeta + \gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon') + \beta''(\gamma\delta' - \gamma'\delta)$$

$$E = \nu\delta + \nu'\delta' + \nu''\delta'' + \varrho\alpha + \varrho'\alpha' + \varrho''\alpha'' =$$

$$+ \alpha(\varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta') + \beta(\delta''\zeta' - \delta'\zeta'') + \gamma(\delta'\varepsilon'' - \delta''\varepsilon') + \alpha'(\varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta'') + \beta'(\delta\zeta'' - \delta''\zeta) + \gamma'(\delta''\varepsilon - \delta\varepsilon'') + \alpha''(\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta) + \beta''(\delta'\zeta - \delta\zeta') + \gamma''(\delta\varepsilon' - \delta'\varepsilon)$$

$$F = \varrho\delta + \varrho'\delta' + \varrho''\delta'' =$$

$$+ \delta(\varepsilon'\zeta'' - \varepsilon''\zeta') + \delta'(\varepsilon''\zeta - \varepsilon\zeta'') + \delta''(\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta'').$$

§. 15. Vti pro superioribus aequationibus, quas differentialia binarum variabilium x et y ingrediebantur, aequatio finalis quae differentialia vel solius x , vel solius y continet, tanti erat ordinis, quanta est summa ordinum ex binis aequationibus, quarum ope formatur; ita quoque pro aequationibus differentialibus quas trium variabilium x, y, z differentialia ingrediuntur, ordo aequationis finalis, quae ex solis differentialibus vnus harum variabilium componitur, aequalis erit summae ordinum pro aequationibus differentialibus propositis. Pro nostro igitur casu, quia tres aequationes differentiales secundi gradus proponebantur, aequatio finalis quoque sexti erit ordinis. Et si ponatur in vltima aequatione $\delta'', \varepsilon'', \zeta'' = 0$, seu si sit $dz + \alpha''x + \beta''y = 0$; facile patebit in aequatione

finali ultimum coefficientem F prorsus evanescere, quo ipso haec aequatio ad quintum ordinem sponte deprimetur. Deinde si fuerit quoque $\delta', \epsilon', \zeta' = 0$, etiam coefficientens penultimus E evanescit, quare hoc casu, aequatio finalis ad quartum deprimetur ordinem.

§. 16. Quemadmodum evolutio aequationum differentialium in §. 13. propositarum, iam satis operosum requirit laborem; ita si aequationes altiorum ordinum proponantur, adhuc operosiori labore illae reductiones peragentur, quibus ad aequationem peruenitur, quae sola differentialia ipsius x contineat. Quod si itaque propositae intelligantur hae aequationes:

$$\begin{aligned} d^3x + \alpha ddx + \beta ddy + \gamma ddz + \delta dx + \epsilon dy + \zeta dz + \eta x + \theta y + \iota z &= 0 \\ d^3y + \alpha' ddx + \beta' ddy + \gamma' ddz + \delta' dx + \epsilon' dy + \zeta' dz + \eta' x + \theta' y + \iota' z &= 0 \\ d^3z + \alpha'' ddx + \beta'' ddy + \gamma'' ddz + \delta'' dx + \epsilon'' dy + \zeta'' dz + \eta'' x + \theta'' y + \iota'' z &= 0, \end{aligned}$$

in genere quidem constat, ex his aequationibus quas breuitatis gratia litteris P, P', P'' indigitemus, aequationem inueniri sola differentialia ipsius x continentem, si capiantur differentialia

$$dP \dots d^5P; dP' \dots d^5P' \text{ et } dP'' \dots d^5P'',$$

tumque fiat huiusmodi combinatio:

$$\begin{aligned} d^6P + \lambda d^5P + \mu d^4P + \nu d^3P + \xi d dP + \sigma dP + \tau P \\ + \lambda' d^5P' + \mu' d^4P' + \nu' d^3P' + \xi' d dP' + \sigma' dP' + \tau' P' \\ + \lambda'' d^5P'' + \mu'' d^4P'' + \nu'' d^3P'' + \xi'' d dP'' + \sigma'' dP'' + \tau'' P'' = 0 \end{aligned}$$

vbi quidem $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu, \mu', \mu''$ etc. ita capi debent, vt coefficientes differentialium ex y et z ortorum, plane evanescant. Hac autem conditione praescripta, isti coefficientes λ, μ, ν etc. per sequentes aequationes determinabuntur:

$$\lambda' + \beta = 0; \epsilon + \lambda\beta + \lambda'\beta' + \lambda''\beta'' + \mu' = 0;$$

$$\lambda'' + \gamma = 0; \zeta + \lambda\gamma + \lambda'\gamma' + \lambda''\gamma'' + \mu'' = 0;$$

$$\theta + \lambda\epsilon \dots + \mu\beta \dots + \nu' = 0; \lambda\theta \dots + \mu\epsilon \dots + \nu\beta \dots + \xi' = 0;$$

$$\begin{aligned} & \lambda + \lambda' \zeta' + \mu \gamma' + \nu'' = 0; \lambda \iota + \mu \zeta' + \nu \gamma' + \zeta'' = 0; \\ & \mu \theta + \nu \epsilon + \zeta \beta + \sigma' = 0; \nu \theta + \zeta \epsilon + \sigma \beta + \tau' = 0; \\ & \mu \iota + \nu \zeta' + \zeta \gamma + \sigma' = 0; \nu \iota + \zeta \zeta' + \sigma \gamma + \tau'' = 0; \\ & \zeta \theta + \sigma \epsilon + \tau \beta = 0; \sigma \theta + \tau \epsilon = 0; \tau \theta + \tau' \theta' + \tau'' \theta'' = 0; \\ & \zeta \iota + \sigma \zeta' + \tau \gamma = 0; \sigma \iota + \tau \zeta' = 0; \tau \iota + \tau' \iota' + \tau'' \iota'' = 0; \end{aligned}$$

scilicet puncta illa, quae productum quodpiam uti $\lambda \theta$ subsequuntur, indigentant occurrere praeter $\lambda \theta$, quoque $\lambda' \theta'$ et $\lambda'' \theta''$, seu similia producta ex quantitibus commate notatis conflata. Ex his vero octodecim aequationibus, nunc pro nostris incognitis sequentes elicientur valores :

$$\begin{aligned} \lambda &= \beta' + \gamma''; \mu = \beta' \gamma'' - \beta'' \gamma' + \epsilon' + \zeta'' \\ \lambda' &= -\beta; \mu' = \beta'' \gamma - \beta \gamma'' - \epsilon \\ \lambda'' &= -\gamma; \mu'' = \beta \gamma' - \beta' \gamma - \zeta \\ \nu &= \beta' \zeta'' - \beta'' \zeta' + \gamma'' \epsilon' - \gamma' \epsilon'' + \theta' + \iota'' \\ \nu' &= \beta'' \zeta - \beta \zeta'' + \gamma \epsilon'' - \gamma'' \epsilon - \theta \\ \nu'' &= \beta \zeta' - \beta' \zeta + \gamma' \epsilon - \gamma \epsilon' - \iota \\ \zeta &= \beta' \iota'' - \beta'' \iota' + \gamma'' \theta' - \gamma' \theta'' + \epsilon' \zeta'' - \epsilon'' \zeta' \\ \zeta' &= \beta'' \iota - \beta \iota'' + \gamma \theta'' - \gamma'' \theta + \epsilon'' \zeta - \epsilon' \zeta'' \\ \zeta'' &= \beta \iota' - \beta' \iota + \gamma' \theta - \gamma \theta' + \epsilon \zeta' - \epsilon' \zeta \\ \sigma &= \epsilon' \iota'' - \epsilon'' \iota' + \zeta'' \theta' - \zeta' \theta''; \tau = \theta' \iota'' - \theta'' \iota' \\ \sigma' &= \epsilon'' \iota - \epsilon' \iota'' + \zeta \theta'' - \zeta'' \theta; \tau' = \theta'' \iota - \theta \iota'' \\ \sigma'' &= \epsilon \iota' - \epsilon' \iota + \zeta' \theta - \zeta \theta'; \tau'' = \theta \iota' - \theta' \iota. \end{aligned}$$

§. 17. Si denique aequatio nostra finalis sola differentialia ipsius x continens, supponatur esse :

$$d^2 x + A d' x + B d' x + C d' x + D d' x + E d' x + F d' x + G d d x + H d x + I x = 0$$

coefficientes, A, B, C etc. sequenti ratione exprimentur :

$$A = \alpha + \beta' + \gamma''; B = \delta + \epsilon' + \zeta'' + \alpha \beta' - \alpha' \beta + \alpha \gamma'' - \alpha'' \gamma + \beta' \gamma'' - \beta'' \gamma';$$

$$\begin{aligned} C = & \eta + \theta' + \iota'' + \alpha \epsilon' - \alpha' \epsilon + \alpha \zeta'' - \alpha'' \zeta + \beta' \delta - \beta \delta' + \beta' \zeta'' - \beta'' \zeta' \\ & + \gamma'' \delta - \gamma \delta'' + \gamma'' \epsilon' - \gamma' \epsilon'' + \alpha (\beta' \gamma'' - \beta'' \gamma') \\ & + \alpha' (\beta'' \gamma - \beta \gamma'') \\ & + \alpha'' (\beta \gamma' - \beta' \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = & \alpha \theta' - \alpha' \theta + \alpha \iota'' - \alpha'' \iota + \beta' \eta - \beta \eta' + \beta' \iota'' - \beta'' \iota' \\ & + \gamma'' \eta - \gamma \eta'' + \gamma'' \theta' - \gamma' \theta'' + \delta \epsilon' - \delta' \epsilon + \delta \zeta'' - \delta'' \zeta + \epsilon' \zeta'' - \epsilon'' \zeta' \\ & + \alpha (\beta' \zeta'' - \beta'' \zeta' + \gamma'' \epsilon' - \gamma' \epsilon'') + \beta (\gamma' \delta'' - \gamma'' \delta') \\ & + \alpha' (\beta'' \zeta - \beta \zeta'' + \gamma \epsilon'' - \gamma'' \epsilon) + \beta' (\gamma'' \delta - \gamma \delta'') \\ & + \alpha'' (\beta \zeta' - \beta' \zeta + \gamma' \epsilon - \gamma \epsilon') + \beta'' (\gamma \delta' - \gamma' \delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = & \delta \theta' - \delta' \theta + \delta \iota'' - \delta'' \iota + \epsilon' \eta - \epsilon \eta' + \epsilon' \iota'' - \epsilon'' \iota' \\ & + \zeta'' \eta - \zeta \eta'' + \zeta'' \theta' - \zeta' \theta'' \\ & + \alpha (\beta' \iota'' - \beta'' \iota' + \gamma'' \theta' - \gamma' \theta'' + \epsilon' \zeta'' - \epsilon'' \zeta') \\ & + \alpha' (\beta'' \iota - \beta \iota'' + \gamma \theta'' - \gamma'' \theta + \epsilon'' \zeta - \epsilon \zeta'') \\ & + \alpha'' (\beta \iota' - \beta' \iota + \gamma' \theta - \gamma \theta' + \epsilon \zeta' - \epsilon' \zeta) \\ & + \beta (\gamma' \eta'' - \gamma'' \eta' + \delta'' \zeta' - \delta' \zeta'') + \gamma (\delta' \epsilon'' - \delta'' \epsilon') \\ & + \beta' (\gamma'' \eta - \gamma \eta'' + \delta \zeta'' - \delta'' \zeta) + \gamma' (\delta'' \epsilon - \delta \epsilon'') \\ & + \beta'' (\gamma \eta' - \gamma' \eta + \delta' \zeta - \delta \zeta') + \gamma'' (\delta \epsilon' - \delta' \epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = & \eta \theta' - \eta' \theta + \eta \iota' - \eta'' \iota + \theta' \iota'' - \theta'' \iota' \\ & + \alpha (\epsilon' \iota'' - \epsilon'' \iota' + \zeta'' \theta' - \zeta' \theta'') + \beta (\zeta' \eta'' - \zeta'' \eta' + \delta'' \iota' - \delta' \iota'') \\ & + \alpha' (\epsilon'' \iota - \epsilon \iota'' + \zeta \theta'' - \zeta'' \theta) + \beta' (\zeta'' \eta - \zeta' \eta'' + \delta \iota'' - \delta'' \iota) \\ & + \alpha'' (\epsilon \iota' - \epsilon' \iota + \zeta' \theta - \zeta \theta') + \beta'' (\zeta \eta' - \zeta' \eta + \delta' \iota - \delta \iota') \\ & + \gamma (\epsilon'' \eta' - \epsilon' \eta'' + \theta'' \delta' - \theta' \delta'') + \delta (\epsilon' \zeta'' - \epsilon'' \zeta') \\ & + \gamma' (\epsilon \eta'' - \epsilon'' \eta + \theta \delta'' - \theta'' \delta) + \delta' (\epsilon'' \zeta - \epsilon \zeta'') \\ & + \gamma'' (\epsilon' \eta - \epsilon \eta' + \theta' \delta - \theta \delta') + \delta'' (\epsilon \zeta' - \epsilon' \zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = & \alpha (\theta' \iota'' - \theta'' \iota') + \beta (\eta'' \iota' - \eta' \iota'') + \gamma (\eta' \theta'' - \eta'' \theta') \\ & + \alpha' (\theta'' \iota - \theta \iota'') + \beta' (\eta \iota'' - \eta'' \iota) + \gamma' (\eta'' \theta - \eta \theta'') \\ & + \alpha'' (\theta \iota' - \theta' \iota) + \beta'' (\eta' \iota - \eta \iota') + \gamma'' (\eta \theta' - \eta' \theta) \\ & + \delta (\epsilon' \iota'' - \epsilon'' \iota' + \zeta'' \theta' - \zeta' \theta'') + \epsilon (\zeta' \eta'' - \zeta'' \eta') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta'(\varepsilon''_1-\varepsilon'_1+\zeta'\theta''-\zeta''\theta)+\varepsilon'(\zeta''\eta-\zeta'\eta'') \\
 & +\delta''(\varepsilon'_1-\varepsilon''_1+\zeta'\theta-\zeta''\theta')+ \varepsilon''(\zeta'\eta'-\zeta''\eta) \\
 \text{H} & =\delta(\theta''_1-\theta'_1)+\varepsilon(\eta''_1-\eta'_1)+\zeta(\eta'\theta''-\eta''\theta') \\
 & +\delta'(\theta''_1-\theta'_1)+\varepsilon'(\eta''_1-\eta'_1)+\zeta'(\eta''\theta-\eta'\theta'') \\
 & +\delta''(\theta'_1-\theta''_1)+\varepsilon''(\eta'_1-\eta''_1)+\zeta''(\eta\theta'-\eta'\theta) \\
 \text{I} & =\eta(\theta''_1-\theta'_1)+\eta'(\theta''_1-\theta'_1)+\eta''(\theta'_1-\theta''_1).
 \end{aligned}$$

§. 18. Quum valores coefficientium pro A, B, C etc. iam inuenti tam sint complicati; facile perspicitur eosdem multo perplexiores euadere, si ad aequationes altiora differentialia inuoluentes, progredi, vel si aequationes contemplari vellemus, quae differentialia quatuor vel plurium variabilium inuoluunt, quare ea quae iam allata sunt, abunde sufficere poterunt, ad Methodum heic propositam illustrandam; praecipuis quum ex superioribus quoque colligi possit, quomodo coefficientes differentialium in aequatione finali, ex coefficientibus differentialium in aequationibus propositis formentur. Quaecunque autem difficultas in hisce coefficientibus formandis occurrit, illa in omni alia Methodo aequae locum habet, vti ex infra dicendis colligi poterit.

§. 19. Methodus quam nunc proposituri sumus, pro integrandis aequationibus differentialibus linearibus, in eo potissimum consistit, vt inueniantur multiplicatores, in quos hae aequationes ductae, si producta inuicem addantur, prodeat aequatio integrabilis. Si igitur proposita fuerit aequatio quaecunque differentialis, quae praeter differentiale quodpiam conflans du , contineat differentialia quaecunque aliarum variabilium x, y, z etc., praeter functiones quascunque ex his quantitatibus, u, x, y, z etc. conflatas, tumque ponatur:

$$\begin{aligned}
 dx &= p du; & dp &= q du; & dq &= r du \text{ etc.} \\
 dy &= p' du; & dp' &= q' du; & dq' &= r' du \\
 dz &= p'' du; & dp'' &= q'' du; & dq'' &= r'' du \\
 \text{etc.} & & & & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

quo

quo facto aequatio illa proposita, semper sub hac forma repraesentari poterit $V du = 0$, vbi V designat functionem quandam quantitatum u, x, y, z, p, p' etc. q, q' etc. r, r' etc. etc. porro autem capto differentiali ipsius V , fit

$$\begin{aligned} dV &= M du + N dx + N' dy + N'' dz \text{ etc.} \\ &+ P dp + P' dp' + P'' dp'' \text{ etc.} \\ &+ Q dq + Q' dq' + Q'' dq'' \text{ etc. etc.} \end{aligned}$$

formula haec differentialis semper erit integrabilis, si fuerit

$$\begin{aligned} N - \frac{dP}{du} + \frac{dQ}{du^2} - \frac{d^3R}{du^3} \text{ etc.} &= 0 \\ N' - \frac{dP'}{du} + \frac{dQ'}{du^2} - \frac{d^3R'}{du^3} \text{ etc.} &= 0 \\ N'' - \frac{dP''}{du} + \frac{dQ''}{du^2} - \frac{d^3R''}{du^3} \text{ etc.} &= 0 \\ \text{etc.} & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

cuius proprietatis demonstrationem legere licet, in Dissertatione mea de criteriis integrabilitatis Tomo XV. Novor. Comm. inserta. Propositae nunc sint haec aequationes differentiales:

$$\begin{aligned} ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y &= 0 \\ ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y &= 0 \end{aligned}$$

in quibus maioris facilitatis causa, differentiale constans du non expressimus, posito autem ut supra $dx = p du$; $dy = p' du$; $ddx = dp du = q du$ et $ddy = q' du$, habebimus has aequationes:

$$q + \alpha p + \beta p' + \gamma x + \delta y = 0; \quad q' + \alpha' p + \beta' p' + \gamma' x + \delta' y = 0.$$

Pro priori supponamus multiplicatorem esse Φ , pro posteriori autem Ψ , tumque esse

$\Phi du(q + \alpha p + \beta p' + \gamma x + \delta y) + \Psi du(q' + \alpha' p + \beta' p' + \gamma' x + \delta' y) = 0$, quantitatem integrabilem. Simplicissima autem forma multiplicatorum Φ et Ψ sine dubio erit ea, qua supponuntur tantum variabilem u continere, hac igitur suppositione facta, ob

$$\begin{aligned} V &= \Phi(q + \alpha p + \beta p' + \gamma x + \delta y) + \Psi(q' + \alpha' p + \beta' p' + \gamma' x + \delta' y) \\ V &= \Phi \end{aligned}$$

consequemur

$$N = \gamma \Phi + \gamma' \Psi; N' = \delta \Phi + \delta' \Psi;$$

$$P = \alpha \Phi + \alpha' \Psi; P' = \beta \Phi + \beta' \Psi;$$

$$Q = \Phi; Q' = \Psi.$$

Criterium igitur integrabilitatis propositum, requirit ut sit:

$$dd\Phi - \alpha d\Phi - \alpha' d\Psi + \gamma \Phi + \gamma' \Psi = 0$$

$$dd\Psi - \beta d\Phi - \beta' d\Psi + \delta \Phi + \delta' \Psi = 0,$$

ex quibus aequationibus iam valores multiplicatorum Φ et Ψ investigari oportet.

§. 20. Aequationes illae pro Φ et Ψ inuentae, quum eiusdem sint formae ac illae pro x et y primo propositae, videtur hinc nullum subsidium adferri pro integratione perficienda; verum pro multiplicatoribus Φ et Ψ non desideratur, ut valores eorum completi ex aequationibus differentio-differentialibus eruantur; valores enim particulares harum quantitatum, commodas horum multiplicatorum formas omnino suppeditabunt. Quum igitur in vtraque aequatione Φ et Ψ eiusdem sint dimensionum, statuere licebit $\Psi = m\Phi$, tumque aequationes nostrae differentiales erunt:

$$dd\Phi - \alpha d\Phi - m\alpha' d\Phi + \gamma \Phi + m\gamma' \Phi = 0$$

$$m d d\Phi - \beta d\Phi - m\beta' d\Phi + \delta \Phi + m\delta' \Phi = 0.$$

Ostenfum autem est, huiusmodi aequationibus satisfieri, si ponatur $\Phi = e^{nu}$, designante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, et n quantitatem constantem. Heic autem de absolutis valoribus ipsorum m et n , nondum disquirimus, sufficit quod iam nobis innotescat pro Φ et Ψ , has adhiberi posse formas: $\Phi = e^{nu}$, $\Psi = m e^{nu}$.

§. 21. Ut autem nunc valores quantitatum m, n innotescant, supponamus integratione facta, hoc prodiisse integrale

$$e^{nu} (dx + m dy + Ax + By) = C.$$

Tum vero differentiali sumto, elicietur haec aequatio:

$$d dx + m d dy + (A + n) dx + (B + m n) dy + n Ax + n By = 0$$

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I.

L

quae

quae nunc conferri debet , cum nostra aequatione proposita ,
quae erat

$$d d x + m d d y + (\alpha + m \alpha') d x + (\beta + m \beta') d y + (\gamma + m \gamma') x + (\delta + m \delta') y = 0,$$

vnde sequentes prodeunt quatuor aequalitates :

$$\begin{aligned} A + n &= \alpha + m \alpha'; & B + m n &= \beta + m \beta'; & n A &= \gamma + m \gamma'; \\ & & & & n B &= \delta + m \delta'; \end{aligned}$$

ex prima et secunda fiunt

$$n A = n \alpha + n m \alpha' - n^2; \quad n B = n \beta + m n \beta' - m n^2,$$

vnde consequimur

$$\gamma + m \gamma' = n \alpha + n m \alpha' - n^2; \quad \delta + m \delta' = n \beta + m n \beta' - m n^2;$$

ideoque

$$m = \frac{\gamma + n^2 - n \alpha}{n \alpha' - \gamma'} = \frac{\delta - n \beta}{n \beta' - n^2 - \delta'} ,$$

ex quo denuo conficitur haec aequatio quarti gradus :

$$\begin{aligned} n^4 - (\alpha + \beta') n^3 + (\gamma + \delta' + \alpha \beta' - \alpha' \beta) n^2 - (\alpha \delta' - \alpha' \delta + \beta' \gamma - \beta \gamma') n \\ + (\gamma \delta' - \gamma' \delta) = 0. \end{aligned}$$

Intelligitur itaque hinc, n quadruplicem habere posse valorem ;
ideoque pro Φ quatuor diuersos multiplicatores formae pro-
positae adhiberi posse , nisi forsan si aequatio illa biquadratica,
binas vel plures radices habuerit aequales.

§. 22. Inuentis autem quatuor aequationibus differentia-
libus primi gradus huius formae :

$$e^{n u} (d x + m d y + A x + B y) = C ,$$

seu potius si placet istius :

$$d x + m d y + A x + B y = C e^{n u}$$

scribendo loco n , $-n$, inde facillimum erit valores quantitatum
 x et y eruere , eliminando scilicet $d x$, $d y$, tumque vel x ,
vel y .

Sint nimirum hae quatuor aequationes :

$$d x + m d y + A x + B y = C e^{n u}$$

$$d x + m' d y + A' x + B' y = C' e^{n' u}$$

$$d x + m'' d y + A'' x + B'' y = C'' e^{n'' u}$$

$$d x + m''' d y + A''' x + B''' y = C''' e^{n''' u}$$

fietque

fietque primo :

$$\begin{aligned} dy + \frac{(A-A')}{m-m'} x + \frac{B-B'}{m-m'} y &= \frac{C e^{n'u} - C' e^{n'u}}{m-m'} \\ dy + \frac{(A-A'')}{m-m''} x + \frac{B-B''}{m-m''} y &= \frac{C e^{n'u} - C' e^{n'u}}{m-m''} \\ dy + \frac{A-A'''}{m-m'''} x + \frac{B-B'''}{m-m'''} y &= \frac{C e^{n'u} - C' e^{n'u}}{m-m'''} \end{aligned}$$

Tum vero eliminando dy , binas consequemur aequationes, quae x et y continent, ex quibus denique siue x , siue y determinari potest. Patet autem eliminatione peracta, x huiusmodi habiturum esse formam :

$$x = D e^{n'u} + E e^{n''u} + F e^{n'''u} + G e^{n''''u},$$

quin etiam minime necessarium est, hanc eliminationem suscipere, nam ob constantes C, C' etc. prorsus arbitrarias, statim supponere licebit

$$x = D e^{n'u} + E e^{n''u} + F e^{n'''u} + G e^{n''''u},$$

acceptis pro D, E, F, G constantibus quibuscunque arbitrariis. Assumpta autem forma ipsius x , illa pro y minime nostro arbitrio relinquatur, sed ex valore pro x iam sponte determinatur, vti supra §. 4. ostendimus.

§. 23. Caeterum obseruari quoque conuenit, aequationem illam biquadraticam pro n , statim ex aequationibus nostris differentio - differentialibus pro Φ deduci, scilicet ex priori esse debet :

$$n^2 - (\alpha + m \alpha') n + \gamma + m \gamma' = 0$$

et ex posteriori

$$m n^2 - (\beta + m \beta') n + \delta + m \delta' = 0,$$

vnde colligitur

$$m = \frac{n^2 - \alpha \alpha' - \gamma}{n \alpha' - \gamma'} = \frac{n \beta - \delta}{n^2 - n \beta' + \delta'},$$

vti supra inuenimus. Valores autem pro A et B ex inuento n , sic satis concinne exprimuntur :

$$A = \frac{\alpha \gamma' - \alpha' \gamma + n \gamma'}{n \alpha' - \gamma'}, \quad B = \frac{n' \delta - \beta \delta' - n \delta}{n \beta' - n^2 - \delta'} = \frac{n \delta + \beta \delta' - \beta' \delta}{n^2 - n \beta' + \delta'}.$$

Aequatio biquadratica quam hic pro n inuenimus, insignem habet affinitatem, cum aequatione differentiali pro x §. 3. inuenta; scilicet si loco n^4, n^3, n^2, n respectiue scribantur $d^4x, -d^3x, +ddx, -dx$, ex aequatione pro n , orietur aequatio differentialis quarti gradus pro x ; et quum inuestigatio multiplicatorum pro integranda aequatione differentiali §. 3. ex resolutione huius aequationis biquadraticae dependeat, intelligitur iisdem multiplicatoribus quibus aequatio differentio-differentialis iam proposita redditur integrabilis, etiam aequationem differentialem sola differentialia ipsius x inuoluentem integrabilem reddi. Methodus igitur iam proposita illam priorem facilitate vix superare videtur, nam utroque in casu, totum negotium integrationis, ad inueniendam illam aequationem biquadraticam reducitur. Tum vero et posterior Methodus illo incommodo laborare videtur, quod minus pateat, quomodo integratio sit perficienda illis in casibus, ubi aequatio ista biquadratica plures habuerit radices aequales. Pro binis quidem radicibus aequalibus res est manifesta. Subsidio enim trium aequationum §. 21. propositarum, eliminando dx et dy , inueniri potest aequatio inter x, y et functiones cognitae ipsius u , tum vero eliminando x et y , habebitur aequatio differentialia dx et dy implicans, quae quum sponte sit integrabilis, integratione peracta, nouam habebimus aequationem, quam x et y ingrediuntur, ex qua si cum prius inuenta conferatur, siue x , seu y elici poterit.

§. 24. At vero si aequatio ista biquadratica, vel tres habuerit radices aequales, vel bina radicum aequalium paria, ita ut aequationum §. 2. propositarum, binas tantum habeamus, inuestigatio ipsarum x et y ita perfici debet, ut noua instituantur integratio harum aequationum. Supponamus nimirum combinatione harum aequationum facta, eriri hanc aequationem integram: $e^{xu}(x+\lambda y)=V$, designante V summam quantitatum

titatum huius formae De^u , differentiatione autem instituta prodeat :

$$dx + \lambda dy + \nu x + \nu \lambda y = R,$$

multiplicetur haec aequatio in $(1 + \mu)$, ita ut sit

$$(1 + \mu)dx + \lambda(1 + \mu)dy + \nu(1 + \mu)x + \nu\lambda(1 + \mu)y = (1 + \mu)R:$$

Concipiamus hanc aequationem prodiiſſe eo modo, quod ad aequationem nostram I. §. 22. addita sit II. in μ ducta, singulis igitur terminis inter se aequatis, haec prodibunt aequalitates :

$$\lambda(1 + \mu) = m + \mu m'; \nu(1 + \mu) = A + \mu A'; \nu\lambda(1 + \mu) = B + \mu B';$$

$$\text{vnde colligimus } \nu(m + \mu m') = B + \mu B'; \text{ et } \mu = \frac{m\nu - B}{B' - m'\nu} \text{ ex se-$$

cunda vero $\mu = \frac{\nu - A}{A' - \nu}$, his igitur valoribus aequatis, prodit sequens aequatio secundi gradus :

$$(m + m')\nu^2 + (mA' - m'A + B' - B)\nu + AB' - A'B = 0,$$

ex qua aequatione valores ipsius ν elici oportet, quibus inuentis erit

$$\mu = \frac{\nu - A}{A' - \nu} \text{ et } \lambda = \frac{m + \mu m'}{1 + \mu} = \frac{mA' - m'A + m' - m\nu}{A' - A}.$$

Quum aequatio inueniendo ipsi ν inferuiens sit quadratica, binas hinc obtinebimus aequationes huius formae :

$$x + \lambda y = V; \quad x + \lambda' y = V',$$

quarum ope iam x et y facile determinantur; verum heic merito desideratur ut dilucide ostendi posset, quomodo hi valores pro ν , ex valoribus pro n ope aequationis biquadraticae inuentis, dependeant, quod quidem vix absque calculis admodum prolixis, perfici posse videtur.

§. 25. Supra quidem iam ostendimus, quomodo y per valorem ipsius x iam inuentum determinetur, at si forma pro x inuenta attentius consideretur, facile liquet adhuc simpliciori ratione y exprimi posse. Scilicet quum sit

$$x = D e^{nu} + E e^{n'u} + F e^{n''u} + G e^{n'''u}$$

facile liquet esse debere

$$y = \lambda D e^{nu} + \lambda' E e^{n'u} + \lambda'' F e^{n''u} + \lambda''' G e^{n'''u}.$$

Iam igitur quaeritur quomodo hi coefficientes λ, λ' etc. investigari debeant? Per aequationem vero nostram primam, quum sit

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0,$$

si ponatur

$$x = D e^{nu} \text{ et } y = \lambda D e^{nu},$$

esse debeat

$$n^2 + n\alpha + n\lambda\beta + \gamma + \lambda\delta = 0, \text{ siue } \lambda = -\frac{(n^2 + n\alpha + \gamma)}{n\beta + \delta}.$$

Haec autem expressio pro λ , licet primo intuitu cum illa quae ex §. 4. deducitur, vix coincidere videtur, tamen facta euolutione plenus se patefaciet consensus. Ex §. enim 4. fit

$$n^3 D + n^2 D (\alpha + \beta' - \frac{\delta}{\beta}) + n D (\gamma + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \frac{\alpha\delta}{\beta}) + D (\beta'\gamma - \beta\gamma' - \frac{\delta\gamma}{\beta}) + (\beta'\delta - \beta\delta' - \frac{\delta^2}{\beta^2}) y = 0,$$

posito nunc $y = -\frac{(n^2 + n\alpha + \gamma)}{n\beta + \delta} D$ et multiplicatione facta per $n\beta + \delta$, siue per $n + \frac{\delta}{\beta}$, haec prodit aequatio:

$$\begin{aligned} 0 = & n^4 + n^3 (\frac{\delta}{\beta} + \alpha + \beta' - \frac{\delta}{\beta}) + n^2 (\frac{\delta}{\beta} (\alpha + \beta' - \frac{\delta}{\beta}) + \gamma + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \frac{\alpha\delta}{\beta}) \\ & - n^2 (\frac{\beta'}{\beta} \delta - \delta' - \frac{\delta^2}{\beta^2}) \\ & + n (\frac{\delta}{\beta} (\gamma + \alpha\beta' - \alpha'\beta - \frac{\alpha\delta}{\beta}) + \beta'\gamma - \beta\gamma' - \frac{\delta\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} (\beta'\delta - \beta\delta' - \frac{\delta^2}{\beta^2})) \\ & + \frac{\delta^2}{\beta^2} (\beta'\gamma - \beta\gamma' - \frac{\delta\gamma}{\beta}) - \frac{\gamma}{\beta} (\beta'\delta - \beta\delta' - \frac{\delta^2}{\beta^2}). \end{aligned}$$

Ex ea vero deletis terminis se mutuo tollentibus, consequimur

$$0 = n^4 + n^3 (\alpha + \beta') + n^2 (\gamma + \delta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta) + n (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta'\gamma - \beta\gamma') + \gamma\delta' - \gamma'\delta$$

sicque plene euictum est, utroque modo pro λ eundem prodire valorem.

§. 26. In aequationibus differentialibus, quas hucusque contemplati sumus, quantitas variabilis cuius differentiale suppositum fuit constans, plane non ingredi supponitur; verum tamen si eiusmodi expressiones:

$$\begin{aligned} & ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y \\ & ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y \end{aligned}$$

suppo-

supponantur non esse aequales nihilo, sed functionibus quibusdam datis U et U' , quantitatis variabilis u , cuius differentiale assumitur constans, integratio nihilo minus aequè bene succedet. Nam si ponatur

$$\begin{aligned} ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y &= U \\ ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y &= U', \end{aligned}$$

haeque aequationes tractentur iuxta Methodum §. 3. praescriptam, emerget tandem haec aequatio:

$$\begin{aligned} d^4x + (x + \beta')d^3x + \dots + (\delta'\gamma - \delta\gamma')x &= ddU + \lambda dU' + \mu dU + \nu U' + \xi U \\ &= ddU - \beta dU' + \beta' dU - \delta U' + \delta' U. \end{aligned}$$

Quare forma differentialis pro x §. 3. inuenta, aequabitur functioni datae ipsius u , haecque aequatio differentialis, aequè facile resoluetur, ac si haec functio plane abesset. Paradoxum autem merito videri posset, quod hic differentia functionum U et U' adeo secundi ordinis sint introducta, quae tamen in valoribus ipsorum x et y minime reperiri debere videntur. Tenendum igitur est, haec differentia per integrationem iterum eliminari; supponamus enim primum integrale aequationis propositae, hanc habere formam:

$$e^{-nu}(d^3x + A ddx + B dx + Cx) = D + V,$$

et facta differentiatione prodire

$$d^4x + (\alpha + \beta')d^3x + \dots + (\gamma\delta' - \gamma'\delta)x = dV \cdot e^{nu},$$

quum ergo esse debeat

$$dV \cdot e^{nu} = ddU + \beta' dU + \delta' U - \beta dU' - \delta U', \text{ erit}$$

$$dV = e^{-nu}(ddU + \beta' dU + \delta' U - \beta dU' - \delta U').$$

Est vero $\int e^{-nu} ddU = e^{-nu} dU + n \int e^{-nu} dU \cdot du$, hinc

$$\int e^{-nu}(ddU + \beta' dU) = e^{-nu} dU + (n + \beta') \int e^{-nu} dU du;$$

porro ob $\int e^{-nu} dU = e^{-nu} U + n \int e^{-nu} U du$, fiet

$$\begin{aligned} \int e^{-nu}(ddU + \beta' dU) &= +e^{-nu} dU + (n + \beta') e^{-nu} U du \\ &\quad + n(n + \beta') \int e^{-nu} U du; \end{aligned}$$

Nunc

Nunc igitur si aequatio nostra integralis repraesentetur sub hac forma: $d^2x + A dx + B dx + Cx = D e^{nu} + V. e^{nu}$, fiet

$$V. e^{nu} = dU + (n + \beta') U du + (n(n + \beta') + \delta') e^{nu} f e^{-nu} U du^2 - \beta U' du - (n\beta - \delta) e^{nu} f e^{-nu} U' du^2,$$

ideoque si cum hac aequatione alia eiusdem generis:

$$d^2x + A' dx + B' dx + C'x = E e^{n'u} + dU + (n' + \beta') U du \text{ etc.}$$

conferatur, patet hinc oriri aequationem quam dU prorsus non ingreditur, quin etiam quantitas U in expressione pro x exulabit ob $A - A' = n - n'$, quod facile demonstrari poterit. Sicque tandem pro x huiusmodi consequemur expressionem:

$$\begin{aligned} x = & D e^{nu} + E e^{n'u} + F e^{n''u} + G e^{n'''u} + \lambda e^{nu} f e^{-nu} U du^2 \\ & + \mu e^{n'u} f e^{-n'u} U' du^2 + \lambda' e^{n'u} f e^{-n'u} U du^2 \\ & + \mu' e^{n''u} f e^{-n''u} U' du^2 + \lambda'' e^{n''u} f e^{-n''u} U du^2 \\ & + \mu'' e^{n'''u} f e^{-n'''u} U' du^2 + \lambda''' e^{n'''u} f e^{-n'''u} U du^2 \\ & + \mu''' e^{n''''u} f e^{-n''''u} U' du^2, \end{aligned}$$

vbi n, n', n'' etc. designant radices aequationis biquadraticae §. 24. allatae, et λ, λ' etc. μ, μ' etc. sunt coefficientes constantes.

§. 27. Posteriori nostra Methodo adhibita, fiet vti ex §. 21. constat:

$$\begin{aligned} dx + m dy + Ax + By = & C e^{nu} + e^{nu} f e^{-nu} U du \\ & + m e^{nu} f e^{-nu} U' du \\ dx + m' dy + A'x + B'y = & C' e^{n'u} + e^{n'u} f e^{-n'u} U du \\ & + m' e^{n'u} f e^{-n'u} U' du \\ \text{etc.} & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

vbi quidem statim apparet in expressionibus pro x vel y praeter quantitates huius formae $C e^{nu}$, etiam huiusmodi reperiri $\lambda e^{nu} f e^{-nu} U du^2$ et $\mu e^{n'u} f e^{-n'u} U' du^2$, praeterea autem nec U , nec differentia ipsius U , his expressionibus inesse. Caeterum probe observari convenit, formam modo pro x allatam, tunc

tunc solummodo veritati esse consentaneam, quando omnes valores ipsius u inter se sunt inaequales, nam pro binis vel pluribus valoribus ipsius u aequalibus, haec forma aliquantum immutabitur, prouti ex iis, quae alibi de integratione huiusmodi formularum integralium iam demonstrata sunt, facile patet.

§. 28. Praeter Methodos in superioribus allatas, adhuc quidem alia mihi se obtulit, sed prioribus aliquanto magis perplexa et difficilior, quare eius ideam heic breviter explicasse suffecerit. Consideremus igitur denuo has binas aequationes:

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0$$

$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y = 0,$$

et supponamus per integrationem hinc binas ortas esse aequationes primi ordinis:

$$dx + Ax + By = P; \quad dy + A'x + B'y = Q$$

existentibus A, A', B, B' quantitibus constantibus, P vero et Q functionibus quantitatis variabilis u , cuius differentiale ponitur constans. Ponamus autem hinc prodire aequationes nostras differentiales propositas, si sequentes fiant combinationes:

$$\begin{aligned} dP + \lambda P + \mu Q \text{ et } dQ + \lambda' Q + \mu' P, \text{ unde colligimus} \\ ddx + (\lambda + A) dx + (\mu + B) dy + (\lambda A + \mu A') x + (\lambda B + \mu B') y = \\ ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y, \text{ et} \\ ddy + (\mu' + A') dx + (\lambda' + B') dy + (\lambda' A' + \mu' A) x + (\lambda' B' + \mu' B) y = \\ ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y. \text{ Hinc vero prodit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda + A &= \alpha & \mu' + A' &= \alpha' \\ \mu + B &= \beta & \lambda' + B' &= \beta' \\ \lambda A + \mu A' &= \gamma & \lambda' A' + \mu' A &= \gamma' \\ \lambda B + \mu B' &= \delta & \lambda' B' + \mu' B &= \delta' \end{aligned}$$

unde eliminatis A, B, A', B' , sequentes prodeunt aequationes:

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha - \lambda) + \mu(\alpha' - \mu') &= \gamma; & \lambda(\beta - \mu) + \mu(\beta' - \lambda') &= \delta \\ \lambda'(\alpha' - \mu') + \mu'(\alpha - \lambda) &= \gamma'; & \lambda'(\beta' - \lambda') + \mu'(\beta - \mu) &= \delta', \end{aligned}$$

tum vero eliminatis successiue ex his quatuor aequationibus, μ, μ', λ' , prodibit aequatio quarti gradus pro λ , cuius aliquo valore assumpto, reliquae incognitae $\lambda', \mu, \mu', A, A'$ etc. sponte determinabuntur. Tum vero ex his duabus aequationibus:

$$dP + \lambda P + \mu Q = 0; \quad dQ + \lambda' Q + \mu' P = 0,$$

vbi $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ iam supponuntur cognitae, definiri debent valores incognitarum P et Q , quibus inuentis integratio demum institui debet harum aequationum:

$$dx + Ax + By = P \quad \text{et} \quad dy + A'x + B'y = Q;$$

sicque binae habebuntur aequationes x et y inuoluentes, ex quibus alterutram eliminando, alterius valor facile reperietur.

MEDITATIONES CIRCA RESOLUTIONEM FRACTIONIS

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(\text{etc.})}$$

IN FRACTIONES SIMPLICES.

VBI SIMVL DEMONSTRATIO INSIGNIS THEORE-
MATIS ARITHMETICI OCCVRRIT.

A u c t o r e
NICOLAO FVSS.

§. 1.

Cum speculationes Analyticas , quas Illustrissimus *Eulerus* non ita pridem cum Academia communicavit, perscrutarer, maxime praeter alia insignia inuenta attentionem meam incitavit Theorema nonum , in cuius fine vir celeberrimus ad omnia, quae de integratione formularum quaecunque potestatem logarithmi x in denominatore habentium docuerat , vberius illustranda obseruat: se iam olim demonstrationem Theorematis cuiusdam Arithmetici dedisse circa fractiones $\frac{1}{\mathfrak{A}}, \frac{1}{\mathfrak{B}}, \frac{1}{\mathfrak{C}}$, etc. quarum numerus sit n , denotantibus $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ huiusmodi producta :

$$\mathfrak{A} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)(\text{etc.})$$

$$\mathfrak{B} = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\beta - \varepsilon)(\text{etc.})$$

$$\mathfrak{C} = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta)(\gamma - \varepsilon)(\text{etc.})$$

$$\mathfrak{D} = (\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)(\delta - \varepsilon)(\text{etc.})$$

et ostendisse , omnes sequentes formulas nihilo aequari :

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^2}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta^2}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^3}{\mathfrak{B}} + \frac{\gamma^3}{\mathfrak{C}} + \frac{\delta^3}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} = 0,$$

M 2

donec

donec perveniatur ad potestatem $n-1$, pro qua semper fore

$$\frac{a^{n-1}}{A} + \frac{\beta^{n-1}}{B} + \frac{\gamma^{n-1}}{C} + \frac{\delta^{n-1}}{D} + \text{etc.} = 1.$$

Statim enim eximius usus, quem hoc Theorema tam in Arithmetica vulgaris quam in sublimiore Analysis allaturum videtur, cupidissimum me fecit eius veritatem perscrutandi; unde haud mediocrem cepi voluptatem, dum nuper, forte fortuna, problema quoddam circa resolutionem fractionis genuinae in fractiones simplices tractans, perspexi, huius Theorematis demonstrationem inde elici posse. Etiam si igitur, uti deinceps animaduerti, in Institutionibus calculi integralis elegantissima huius Theorematis demonstratio ab Illustr. *Eulero* sit tradita: tamen, quia modus procedendi ab hic adhibito aliquantum differt, ibique tantum in transitu observatur, cum ex sequentibus profundioribus Analysis penetralibus repetendam esse, rei dignitatem consulens haud inutile fore arbitror, si etiam meam demonstrationem, ex consideratione valoris infiniti ipsius x petitam, caeteraque omnia, quae se mihi super hoc argumento obtulerunt hic dato Studio exposuero,

§. 2. Sint fractiones simplices, in quas fractio

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(\text{etc.})}$$

resolui debeat istae: $\frac{\alpha}{x-a}, \frac{\beta}{x-b}, \frac{\gamma}{x-c}, \text{etc.}$ quarum summa igitur aequalis esse debet fractioni propositae, unde habemus istam aequationem:

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(\text{etc.})} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} + \frac{\delta}{x-d} + \text{etc.}$$

quam per $x-a$ multiplicemus, ut prodeat haec:

$$\frac{x^m}{(x-b)(x-c)(x-d)(\text{etc.})} = \alpha + (x-a)\left(\frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} + \frac{\delta}{x-d} + \text{etc.}\right)$$

quae

quae aequalitas cum subsistere debeat , quidquid pro x assumatur , statuatur $x = a$; vnde statim colligitur

$$\alpha = \frac{a^m}{(a-b)(a-c)(a-d)(\text{etc.})}$$

Deinde pro inueniendo valore litterae β multiplicetur aequatio illa per $x - b$, vt fiat

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-c)(x-d)(\text{etc.})} = \beta + (x-b) \left(\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\gamma}{x-c} + \frac{\delta}{x-d} + \text{etc.} \right)$$

quae iterum subsistere debet, quicunque valor litterae x tribuatur, vnde ponendo $x = b$ fiet

$$\beta = \frac{b^m}{(b-a)(b-c)(b-d)(\text{etc.})}$$

Eodemque modo ducendo eandem aequationem successive in $(x - c)$, $(x - d)$, etc. et statuendo $x = c$, $x = d$, etc. habebitur

$$\gamma = \frac{c^m}{(c-a)(c-b)(c-d)(\text{etc.})} \text{ et } \delta = \frac{d^m}{(d-a)(d-b)(d-c)(\text{etc.})}$$

et ita porro ; quibus valoribus inuentis erit

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(\text{etc.})} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} + \frac{\delta}{x-d} + \text{etc.}$$

si modo exponens m minor fuerit numero factorum , qui sit n ; si enim esset aequalis vel maior quam n , tum praeter fractiones simplices insuper accederent termini integri.

§. 3. Quod si ergo hanc aequationem vtrinque multiplicemus per x , habebimus

$$\frac{x^{m+1}}{(x-a)(x-b)(x-c)(\text{etc.})} = \frac{\alpha x}{x-a} + \frac{\beta x}{x-b} + \frac{\gamma x}{x-c} + \frac{\delta x}{x-d} + \text{etc.}$$

quae aequatio vera erit , quicunque valores litterae x tribuantur : etiam igitur valebit sumendo $x = \infty$; vbi duo casus sunt perpendendi , prouti exponens numeratoris aequalis vel minor fuerit numero factorum in denominatore , hoc est prouti fuerit $m + 1 = n$ vel $m + 1 < n$. Priori casu quo $m + 1 = n$

sive $m = n - 1$ habebimus $1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$ sive loco $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}$ eorum valores substituendo

$$\frac{a^{n-1}}{(a-b)(a-c)(a-d)(\text{etc.})} + \frac{b^{n-1}}{(b-a)(b-c)(b-d)(\text{etc.})} + \frac{c^{n-1}}{(c-a)(c-b)(c-d)(\text{etc.})} + \text{etc.} = 1.$$

Altero vero casu, quo $m + 1 < n$ sive $m < n - 1$ posito $x = \infty$ erit $0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$ Quia igitur m debet esse numerus integer, haec posterior aequalitas subsistet casibus his omnibus :

$$m = 0, m = 1, m = 2, m = 3, \dots m = n - 2.$$

§. 4. Ponamus nunc breuitatis gratia

$$\begin{aligned} (a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(\text{etc.}) &= \mathfrak{A} \\ (b-a)(b-c)(b-d)(b-e)(\text{etc.}) &= \mathfrak{B} \\ (c-a)(c-b)(c-d)(c-e)(\text{etc.}) &= \mathfrak{C} \\ (d-a)(d-b)(d-c)(d-e)(\text{etc.}) &= \mathfrak{D} \\ &\text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

t habeamus

$$\alpha = \frac{a^m}{\mathfrak{A}}, \beta = \frac{b^m}{\mathfrak{B}}, \gamma = \frac{c^m}{\mathfrak{C}}, \delta = \frac{d^m}{\mathfrak{D}}, \text{etc.}$$

quarum igitur fractionum summa casibus, quibus $m < n - 1$ cyphrae aequetur, casu vero quo $m = n - 1$, unitati; quocirca, loco m successiue scribendo $0, 1, 2, 3, 4, \dots n - 2$. erit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{a}{\mathfrak{A}} + \frac{b}{\mathfrak{B}} + \frac{c}{\mathfrak{C}} + \frac{d}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{a^2}{\mathfrak{A}} + \frac{b^2}{\mathfrak{B}} + \frac{c^2}{\mathfrak{C}} + \frac{d^2}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} &= 0 \\ \frac{a^3}{\mathfrak{A}} + \frac{b^3}{\mathfrak{B}} + \frac{c^3}{\mathfrak{C}} + \frac{d^3}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} &= 0 \\ - &- &- &- &- &= 0 \\ - &- &- &- &- &= 0 \\ - &- &- &- &- &= 0 \\ \frac{a^{n-2}}{\mathfrak{A}} + \frac{b^{n-2}}{\mathfrak{B}} + \frac{c^{n-2}}{\mathfrak{C}} + \frac{d^{n-2}}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} &= 0 \text{ at vero} \\ \frac{a^{n-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{b^{n-1}}{\mathfrak{B}} + \frac{c^{n-1}}{\mathfrak{C}} + \frac{d^{n-1}}{\mathfrak{D}} + \text{etc.} &= 1 \quad \text{vnde} \end{aligned}$$

vnde iam veritas illius Theorematis est manifestissima.

§. 5. Iam cum fit

$$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)\text{etc.}} = \frac{a^m}{\mathfrak{A}(x-a)} + \frac{b^m}{\mathfrak{B}(x-b)} + \frac{c^m}{\mathfrak{C}(x-c)} + \text{etc.}$$

hanc aequationem etiam valere obseruamus, si ponatur $x=0$, quo autem casu aequatio prodit in praecedentibus iam contenta; obtinetur enim, posito $x=0$ et $m > 0$, haec aequatio:

$$0 = \frac{a^{m-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{b^{m-1}}{\mathfrak{B}} + \frac{c^{m-1}}{\mathfrak{C}} + \frac{d^{m-1}}{\mathfrak{D}} + \text{etc.}$$

quae manifesto in praecedentibus inest. At si in superiore aequatione fit $m=0$, posito $x=0$ erit

$$\frac{+1}{a b c d e \text{ etc.}} = -\frac{1}{a \mathfrak{A}} - \frac{1}{b \mathfrak{B}} - \frac{1}{c \mathfrak{C}} - \frac{1}{d \mathfrak{D}} - \text{etc.}$$

vbi signum superius valet, si factorum numerus fuerit par, inferius vero si impar; siue mutatis signis erit

$$\frac{1}{a \mathfrak{A}} + \frac{1}{b \mathfrak{B}} + \frac{1}{c \mathfrak{C}} + \frac{1}{d \mathfrak{D}} + \text{etc.} = \frac{+1}{a b c d e \text{ etc.}}$$

§. 6. Si omnes superiores formulae, quarum summa nihilo aequatur, quomocunque inter se coniungantur, obtinebitur sequens expressio generalis:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{+p+qa+raa+sa^2+ta^3+\text{etc.}}{\mathfrak{A}} - - - - - +za^{n-2} \\ \frac{+p+qb+rbb+sb^2+tb^3+\text{etc.}}{\mathfrak{B}} - - - - - +zb^{n-2} \\ \frac{+p+qc+rcc+sc^2+tc^3+\text{etc.}}{\mathfrak{C}} - - - - - +zc^{n-2} \\ \frac{+p+qd+rdd+sd^2+td^3+\text{etc.}}{\mathfrak{D}} - - - - - +zd^{n-2} \\ + \text{etc.} \qquad \qquad \qquad + \text{etc.} \end{array} \right\} = 0$$

quarum formularum summa semper nihilo aequabitur, quicunque valores litteris p, q, r, s , etc. tribuantur.

§. 7.

§. 7. Quod si ergo breuitatis gratia ponamus

$$A = p + qa + ra^2 + sa^3 + \text{etc.} - - - + za^{n-1}$$

$$B = p + qb + rb^2 + sb^3 + \text{etc.} - - - + zb^{n-1}$$

$$C = p + qc + rc^2 + sc^3 + \text{etc.} - - - + zc^{n-1}$$

$$D = p + qd + rd^2 + sd^3 + \text{etc.} - - - + zd^{n-1}$$

$$\text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.}$$

quarum aequationum numerus sit n , pariter ac litterarum a, b, c, d , etc. atque ex his aequationibus quantitates p, q, r, s eliminare oporteat, id per praecedentia iam facillime expeditur: prodibit enim sequens aequatio a litteris p, q, r, s , etc. immunis:

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} + \frac{D}{d} + \text{etc.} = 0.$$

Vbi notandum, quouis casu numerum litterarum p, q, r, s esse $n-1$; sicque ad singulas determinandas sufficerent $n-1$ aequationes: at vero ad eas penitus eliminandas opus est aequationum numero n .

§. 8. At si per methodum communem hanc eliminationem expedire velimus, sumamus tantum casum trium litterarum p, q, r , pro quibus igitur eliminandis habentur sequentes quatuor aequationes:

$$A = p + qa + raa$$

$$B = p + qb + rbb$$

$$C = p + qc + rcc$$

$$D = p + qd + rdd$$

vnde primo litteram p eliminando oriuntur hae aequationes:

$$A - B = q(a - b) + r(aa - bb)$$

$$B - C = q(b - c) + r(bb - cc)$$

$$C - D = q(c - d) + r(cc - dd)$$

sive per $a-b$, $b-c$, $c-d$ diuidendo

$$\frac{A-B}{a-b} = q + r(a+b)$$

$$\frac{B-C}{b-c} = q + r(b+c)$$

$$\frac{C-D}{c-d} = q + r(c+d)$$

vnde porro, litteram q eliminando, erit

$$\frac{A-B}{a-b} - \frac{B-C}{b-c} = r(a-c) \text{ et}$$

$$\frac{B-C}{b-c} - \frac{C-D}{c-d} = r(b-d) \text{ ideoque}$$

$$\frac{A-B}{(a-b)(a-c)} - \frac{B-C}{(a-c)(b-c)} = r \text{ et}$$

$$\frac{B-C}{(b-c)(b-d)} - \frac{C-D}{(b-d)(c-d)} = r$$

quibus posterioribus aequationibus a se inuicem subtractis colligitur

$$\frac{A-B}{(a-b)(c-c)} - \frac{B-C}{(a-c)(b-c)} - \frac{B-C}{(b-c)(b-d)} + \frac{C-D}{(b-d)(c-d)} = 0$$

quae aequatio in ordinem redacta ita se habebit :

$$\frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B(a-b)}{(b-c)(c-d)} + \frac{C(a-b)}{(c-d)(c-b)(c-d)} - \frac{D}{(b-d)(c-d)} = 0$$

sive per $(a-d)$ diuidendo ita :

$$\frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(c-d)(c-b)(b-c)} + \frac{C}{(c-d)(c-b)(c-d)} + \frac{D}{(a-d)(d-b)(d-c)} = 0$$

quae est ea ipsa forma, quam per regulam nostram inuenimus.

§. 9. Quo nunc veritas ac vsus formularum §. 4. exhibitarum melius in oculos incidat, percurramus aliquot casus speciales ex numero litterarum a, b, c, d , desumptos. Habeantur igitur duo tantum numeri a et b , vt sit $n=2$, eritque $\mathfrak{A}=a-b$ et $\mathfrak{B}=b-a$, hincque colligitur $\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} = 0$ et $\frac{a}{\mathfrak{A}} + \frac{b}{\mathfrak{B}} = 1$, vti Theorematis conditio postulat.

§. 10. Habeantur tres litterae a, b, c , vt sit $n=3$, eritque $\mathfrak{A}=(a-b)(a-c)$; $\mathfrak{B}=(b-a)(b-c)$; $\mathfrak{C}=(c-a)(c-b)$ hinc tres sequentes aequationes :

I. $\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} = 0$. II. $\frac{a}{\mathfrak{A}} + \frac{b}{\mathfrak{B}} + \frac{c}{\mathfrak{C}} = 0$. III. $\frac{aa}{\mathfrak{A}} + \frac{bb}{\mathfrak{B}} + \frac{cc}{\mathfrak{C}} = 1$.

Sit $a=5$, $b=4$, $c=2$, eritque $\mathfrak{A}=3$, $\mathfrak{B}=-2$, $\mathfrak{C}=6$, vnde
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. N fiet

fiet

$$\text{I. } \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0. \quad \text{II. } \frac{5}{3} - \frac{4}{2} + \frac{2}{6} = 0. \quad \text{III. } \frac{25}{3} - \frac{16}{2} + \frac{4}{6} = 1.$$

Sit porro $a = 11$, $b = 7$, $c = 5$, vt fiat $\mathfrak{A} = 24$, $\mathfrak{B} = -8$, $\mathfrak{C} = 12$ hincque erit

$$\text{I. } \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = 0. \quad \text{II. } \frac{11}{24} - \frac{7}{8} + \frac{5}{12} = 0. \quad \text{III. } \frac{121}{24} - \frac{49}{8} + \frac{25}{12} = 1.$$

§. 11. Habeantur quatuor numeri a, b, c, d , vt sit $n = 4$ et

$$\mathfrak{A} = (a-b)(a-c)(a-d); \quad \mathfrak{C} = (c-a)(c-b)(c-d)$$

$$\mathfrak{B} = (b-a)(b-c)(b-d); \quad \mathfrak{D} = (d-a)(d-b)(d-c)$$

et quatuor aequationes hinc erunt :

$$\text{I. } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$$

$$\text{II. } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 0$$

$$\text{III. } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} = 0$$

$$\text{IV. } \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{d} + \frac{d^3}{a} = 1$$

Sit nunc $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, vt fiat $\mathfrak{A} = -6$, $\mathfrak{B} = 2$, $\mathfrak{C} = -2$, $\mathfrak{D} = 6$, eritque

$$\text{I. } -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{II. } -\frac{1}{6} + \frac{2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{4}{6} = 0$$

$$\text{III. } -\frac{1}{6} + \frac{4}{2} - \frac{9}{2} + \frac{16}{6} = 0$$

$$\text{IV. } -\frac{1}{6} + \frac{8}{2} - \frac{27}{2} + \frac{64}{6} = 1$$

Sit porro $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$, $d = 9$, vt habeatur

$$\mathfrak{A} = -3 \cdot 5 \cdot 7, \quad \mathfrak{B} = +3 \cdot 2 \cdot 4, \quad \mathfrak{C} = -5 \cdot 2 \cdot 2, \quad \mathfrak{D} = +7 \cdot 4 \cdot 2$$

vnde sequentes prodibunt aequalitates :

$$\text{I. } -\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{7 \cdot 4 \cdot 2} = 0$$

$$\text{II. } -\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{5}{3 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{7}{5 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{9}{7 \cdot 4 \cdot 2} = 0$$

$$\text{III. } -\frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{25}{3 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{49}{5 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{81}{7 \cdot 4 \cdot 2} = 0$$

$$\text{IV. } -\frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{125}{3 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{343}{5 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{729}{7 \cdot 4 \cdot 2} = 1.$$

§. 12. In aequationibus generalibus numeri a, b, c, d , etc. manifesto inter se inaequales supponuntur, quia alioquin valorum \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} ,

\mathfrak{B} , \mathfrak{C} , etc. vnus alterue euanesceret, vnde fractiones prodirent infinitae. Interim tamen nihilo minus nostrae formulae veritati debent esse consentaneae. Ad hoc ostendendum sumatur $a=b$: at quo hinc aliquid concludi queat, statuatur $a=b+\omega$, denotante ω quantitatem infinite paruam; vnde pro casu primi exempli erit $\mathfrak{A}=+\omega$ et $\mathfrak{B}=-\omega$, hincque $\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega}=0$ et $\frac{b+\omega}{\omega}-\frac{b}{\omega}=1$, vti requiritur.

§. 13. Iam pro secundo casu speciali supra §. 10. considerato, posito $a=b+\omega$ erit

$\mathfrak{A}=\omega(b-c+\omega)$, $\mathfrak{B}=-\omega(b-c)$ et $\mathfrak{C}=(c-b-\omega)(c-b)$ vnde fit

$$I. \frac{1}{\omega(c-c+\omega)} - \frac{1}{\omega(b-c)} + \frac{1}{(c-b-\omega)(c-b)} = 0$$

sive partibus prima et secunda coniunctis

$$-\frac{1}{(b-c+\omega)(b-c)} + \frac{1}{(c-b-\omega)(c-b)} = 0.$$

vnde posito $\omega=0$ manifesto est $\frac{1}{(c-b)^2} - \frac{1}{(b-c)^2} = 0$. Secunda vero aequatio erit

$$\frac{b+\omega}{\omega(b-c+\omega)} - \frac{b}{\omega(b-c)} + \frac{c}{(c-b-\omega)(c-b)} = 0$$

sive prioribus duobus terminis coniunctis

$$\frac{-c}{(b-c+\omega)(b-c)} + \frac{c}{(c-b-\omega)(c-b)} = 0 \text{ et posito } \omega=0$$

$$\frac{c}{(c-b)^2} - \frac{c}{(b-c)^2} = 0.$$

Tertia denique aequatio est

$$\frac{bb+2b\omega}{\omega(b-c+\omega)} - \frac{bb}{\omega(b-c)} + \frac{cc}{(c-b-\omega)(c-b)} = 1,$$

vbi iterum priora duo membra in vnum colligantur, vt fiat

$$\frac{bb+2bc}{(b-c+\omega)(b-c)} + \frac{cc}{(c-b-\omega)(c-b)} = 1, \text{ et facto } \omega=0 \text{ erit}$$

$$\frac{bb+2bc}{(b-c)^2} + \frac{cc}{(c-b)^2} = 1.$$

§. 14. Pro casu tertio §. 11. exhibito praestabit primo tantum valores \mathfrak{A} et \mathfrak{B} considerasse. Cum igitur posito $a=b+\omega$ fit

$\mathfrak{A}=\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)$ et $\mathfrak{B}=-\omega(b-c)(b-d)$, erit

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)} - \frac{1}{\omega(b-c)(b-d)},$$

qui termini ad eundem denominatorem reducti, omisso scilicet termino ω^2 , ita se habebunt $\frac{(b-c)(b-d) - (b-c+\omega)(b-d+\omega)}{\omega(b-c)^2(b-d)^2}$. Pro huius autem fractionis numeratore obseruasse iuuabit hanc quantatem:

$$(b-c+\omega)(b-d+\omega) - (b-c)(b-d)$$

sumpta littera b variabili, positoque $db = \omega$, aequari differentiali producti $(b-c)(b-d)$, siue esse $= d(b-c)(b-d)$. At vero actu differentiando sumpta b variabili et $db = \omega$ erit

$$d(b-c)(b-d) = \omega(b-d) + \omega(b-c) = \omega(2b-c-d), \text{ ita vt sit } (b-c)(b-d) - (b-c+\omega)(b-d+\omega) = -\omega(2b-c-d).$$

Vi huius obseruationis erit

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} = -\frac{(2b-c-d)}{(b-c)^2(b-d)^2}. \text{ Porro erit}$$

$$\frac{a}{\mathfrak{A}} + \frac{b}{\mathfrak{B}} = \frac{b+\omega}{\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)} - \frac{b}{\omega(b-c)(b-d)} = \frac{(b+\omega)(b-c)(b-d) - b(b-c+\omega)(b-d+\omega)}{\omega(b-c)^2(b-d)^2}.$$

Cum igitur ex praecedentibus nouerimus esse

$$(b-c+\omega)(b-d+\omega) - (b-c)(b-d) = d(b-c)(b-d) \text{ erit}$$

$$\frac{a}{\mathfrak{A}} + \frac{b}{\mathfrak{B}} = -\frac{b(2b-c-d) + (b-c)(b-d)}{(b-c)^2(b-d)^2} = \frac{cd-bb}{(b-c)^2(b-d)^2}.$$

Praeterea fiet $\frac{a^2}{\mathfrak{A}} + \frac{b^2}{\mathfrak{B}} = \frac{(b+\omega)^2}{\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)} - \frac{b^2}{\omega(b-c)(b-d)} = \frac{(b+\omega)^2(b-c)(b-d) - b^2(b-c+\omega)(b-d+\omega)}{\omega(b-c)^2(b-d)^2} = \frac{2bcd-bb(c+d)}{(b-c)^2(b-d)^2}$

Denique habebimus $\frac{a^3}{\mathfrak{A}} + \frac{b^3}{\mathfrak{B}} = \frac{(b+\omega)^3}{\omega(b-c+\omega)(b-d+\omega)} - \frac{b^3}{\omega(b-c)(b-d)} = \frac{(b+\omega)^3(b-c)(b-d) - b^3(b-c+\omega)(b-d+\omega)}{(b-c)^2(b-d)^2}$ siue $\frac{a^3}{\mathfrak{A}} + \frac{b^3}{\mathfrak{B}} = \frac{bb(bb-2bc-2bd+3cd)}{(b-c)^2(b-d)^2}.$

§. 15. Considerentur nunc etiam litterae \mathfrak{C} et \mathfrak{D} , in quibus statim ponere licet $a = b$, et cum idcirco sint

$$\mathfrak{C} = (c-b)^2(c-d) \text{ et } \mathfrak{D} = (d-b)^2(d-c),$$

prior illarum quatuor aequationum erit

$$-\frac{(2b-c-d)}{(b-c)^2(b-d)^2} + \frac{1}{(c-b)^2(c-d)} + \frac{1}{(d-b)^2(d-c)} = 0$$

cuius veritas statim manifesta erit, si in primo membro loco $2b-$

$\pm b - c - d$ scribatur $b - c + b - d$, idque in has duas partes discerpatur:

$$- \frac{1}{(b-c)(b-d)^2} - \frac{1}{(b-c)^2(b-d)}, \text{ vt fit}$$

$\frac{1}{(c-b)^2(c-d)} + \frac{1}{(d-b)^2(d-c)} - \frac{1}{(b-c)(b-d)^2} - \frac{1}{(b-c)^2(b-d)} = 0$;
tum enim hae fractiones ad eundem denominatorem $(b-c)^2(b-d)^2(c-d)$ reductae et iunctim sumtae utique erunt $= 0$, quemadmodum rem tentanti mox patebit. Secunda aequatio fiet

$$- \frac{bb+cd}{(b-c)^2(b-d)^2} + \frac{c}{(c-b)^2(c-d)} + \frac{d}{(d-b)^2(d-c)} = 0$$

quae ad communem denominatorem $(b-c)^2(b-d)^2(c-d)$ reducta est

$$\frac{(cd-bb)(c-d)+c(b-d)^2-d(b-c)^2}{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)} = 0$$

cuius numerator euolutus manifesto in nihilum abit, quemadmodum rei natura postulat. Tertia porro aequatio, omnibus membris ad communem denominatorem reductis, ita se habet:

$$\frac{(2bcd-bbc-bbd)(c-d)+cc(b-d)^2-dd(b-c)^2}{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)} = 0,$$

cuius veritas iterum facta evolutione in oculos incurret. Quarta denique aequatio, quia est

$$\frac{bb(bb-2bc-2bd+3cd)}{(b-c)^2(b-d)^2} + \frac{c^3}{(c-b)^2(c-d)} + \frac{d^3}{(d-b)^2(d-c)} = 1,$$

si ea eodem modo tractetur, abibit in hanc:

$$\frac{(b^4-2b^3c-2b^3d+3bbcd)(c-d)+c^3(b-d)^2-d^3(b-c)^2}{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)} = 1.$$

Quod si autem huius fractionis tam numerator quam denominator actu euoluantur, reperietur esse

$$(b^4-2b^3c-2b^3d+3bbcd)(c-d)+c^3(b-d)^2-d^3(b-c)^2 = (b-c)^2(b-d)^2(c-d),$$

vti requiritur.

§. 16. Quoniam autem istae evolutiones continuo fiunt molestiores, praestabit tales casus ex formula principali

$\frac{x^m}{(x-a)(x-b)(x-c)(etc.)}$, unde omnia haecenus sunt deducta, deriuare. In ea igitur statim ponamus $a = b$ et statuamus

$$\frac{x^m}{(x-b)^2(x-c)(x-d)(etc.)} = \frac{\alpha}{(x-b)^2} + \frac{\beta}{x-b} + R,$$

denotante R omnia reliqua membra; haecque aequatio per $(x-b)^2$ multiplicata praebet

$$\frac{x^m}{(x-c)(x-d)(x-e)(etc.)} = \alpha + \beta(x-b) + R(x-b)^2$$

Fiat nunc $x = b$ eritque $\alpha = \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)(etc.)}$, quo valore ad sinistram translato fiet

$$\frac{x^m}{(x-c)(x-d)(x-e)(etc.)} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)(etc.)} = \beta(x-b) + R(x-b)^2$$

Ponatur nunc breuitatis gratia $\frac{x^m}{(x-c)(x-d)(x-e)(etc.)} = X$ ut habeatur $X - \alpha = \beta(x-b) + R(x-b)^2$, siue per $x-b$ diuidendo $\frac{X-\alpha}{x-b} = \beta + R(x-b)$; huius vero fractionis $\frac{X-\alpha}{x-b}$ tam numerator quam denominator euanesceat posito $x = b$, unde nihil concludi posset. Quo igitur valorem ipsius β obtineamus, tam loco numeratoris quam denominatoris sumamus eorum differentialia, orieturque ista fractio: $\frac{dX}{dx}$, cuius valor per x expressus sequenti modo elicitur.

§. 17. Cum sit $X = \frac{x^m}{(x-c)(x-d)(x-e)(etc.)}$ erit
 $lX = m l x - l(x-c) - l(x-d) - l(x-e) - etc.,$
hinc-

hincque differentiendo

$$\frac{dX}{X} = \frac{m dx}{x} - \frac{dx}{x-c} - \frac{dx}{x-d} - \frac{dx}{x-e} - \text{etc.}$$

siue multiplicando per X et per dx diuidendo

$$\frac{dX}{X} = \frac{mX}{x} - \frac{X}{x-c} - \frac{X}{x-d} - \frac{X}{x-e} - \text{etc. seu}$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{mX^{m-1}}{(x-c)(x-d)(x-e)(\text{etc.})} - \frac{X^m}{(x-c)^2(x-d)(x-e)(\text{etc.})} \\ - \frac{X^m}{(x-c)(x-d)^2(x-e)(\text{etc.})} - \text{etc.}$$

quocirca posito $x = b$ habebitur

$$\beta = \frac{mb^{m-1}}{(b-c)(b-d)(b-e)(\text{etc.})} - \frac{b^m}{(b-c)^2(b-d)(b-e)(\text{etc.})} \\ - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)^2(b-e)(\text{etc.})} - \text{etc.}$$

pro reliquis autem erit

$$\gamma = \frac{c^m}{(c-b)^2(c-d)(c-e)(\text{etc.})}, \delta = \frac{d^m}{(d-b)^2(d-c)(d-e)(\text{etc.})} \text{ etc.}$$

§. 18. His in genere obseruatis haud difficile erit, quemvis casum specialem expedire. Vt res exemplo illustretur, coronidis loco consideremus adhuc casum supra §. 11. tractatum, vbi erat $n = 4$; ideoque et numerus litterarum $a, b, c, \text{etc.} = 4$, pro quo igitur casu erit

$$\alpha = \frac{b^m}{(b-c)(b-d)} \\ \beta = \frac{mb^{m-1}}{(b-c)(b-d)} - \frac{b^m}{(b-c)^2(b-d)} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)^2} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)} \\ \gamma = \frac{c^m}{(c-b)^2(c-d)}, \text{ et } \delta = \frac{d^m}{(d-b)^2(d-c)}$$

tam

Iam quicunque valores litteris a, b, c, d , tribuantur,

fi	semp̄er erit
$m = 0$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$
$m = 1$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$
$m = 2$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$
$m = 3$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$

§. 19. At si habeantur quinque litterae a, b, c, d, e , ita ut $n = 5$, tum pro hoc casu erit.

$$\alpha = \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e) \text{ etc.}}$$

$$\beta = \frac{mb^{m-1}}{(b-c)(b-d)(b-e)} - \frac{b^m}{(b-c)^2(b-d)(b-e)} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)^2(b-e)} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)^2} - \frac{b^m}{(b-c)(b-d)(b-e)}$$

$$\gamma = \frac{c^m}{(c-b)^2(c-d)(c-e)}, \quad \delta = \frac{d^m}{(d-b)^2(d-c)(d-e)},$$

$$\varepsilon = \frac{e^m}{(e-b)^2(e-c)(e-d)},$$

ac tum	erit
casu $m = 0$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$
$m = 1$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$
$m = 2$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$
$m = 3$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0$
$m = 4$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 1$

PHYSICO- MATHEMATICA.

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I.

O

DE

PHYSICO-MATHEMATICA



DE
REPRÆSENTATIONE
SVPERFICIEI SPHAERICAE
SVPER PLANO.

Auctore
L. EVLERO.

§. I.

Hic non tantum proiectiones opticas confidero, quibus diuerfa puncta superficiei sphaericae in plano ita repræsentantur, quemadmodum a spectatore in certo loco constituto cernuntur, dum singula puncta ab eo visa secundum leges Perspectivæ in planum proiiciuntur: Sed hic vocabulum Repræsentationis in latissimo sensu accipio, ita ut singula superficiei sphaericae puncta secundum legem quamcunque in superficie plana exhibeantur, sicque singulis punctis in Sphaera certa puncta in plano respondeant, ac vicissim, nisi forte eueniat, ut quorundam punctorum Sphaerae repræsentatio fiat imaginaria.

§. 2. Referat igitur figura *abc* portionem superficiei Sphaericae, cuius polus sit in puncto *b* et circulus *alc* Aequator; primus autem Meridianus sit *ab*, a quo longitudines singulorum punctorum Sphaerae computentur, more in Geographia recepto. Consideretur nunc punctum quodcunque *p* in Meridiano *bpl* sito, qui a primo Meridiano *ba* distet angulo *abl*, siue arcu Aequatoris $al = t$; latitudo vero istius loci sit arcus $lp = u$, dum radium Sphaerae unitate expressum assumimus. Nunc in tertia figura referat planum tabulae id planum, in

Tab. I.
Fig. 2.

Fig. 3.

quo repraesentationem fieri oportet sitque P punctum illi loco p respondens, vnde ad axem vtcunque pro lubitu assumtum EF demittatur perpendiculum PX, et constituto abscissarum initio in puncto E vocetur abscissa $EX = x$ et applicata $XP = y$; et quia punctum P secundum legem quamcunque ex situ puncti p in Sphaera determinari assumimus, situs autem puncti p per binas variables t et u determinatur, praesentes coordinatae x et y tanquam Functiones quaecunque binarum illarum variabilium t et u spectari debebunt; vnde patet, hanc inuestigationem ad eam Analyseos partem esse referendam, in qua Functiones binarum variabilium tractantur.

Tab. I.
Fig. 2.

§. 3. Iam variabilitatem binarum quantitatum t et u in computum inducamus, sitque in Sphaera punctum q , cuius longitudo $= t$, at latitudo $= u + du$; r vero sit punctum, cuius longitudo sit $t + dt$, latitudo vero $l'r = u$, vnde completo parallelogrammo $pqrs$ loci s longitudo erit $t + dt$ et latitudo $= u + du$. Tum vero erunt quantitates elementares in Sphaera $pq = du$ et $ll' = dt$, vnde ex figura sphaerica fit elementum $pr = dt \cos. u$, at vero parallelogrammum $pqrs$ erit rectangulum, hincque diagonalis $ps = du^2 + dt^2 \cos. u^2$.

Fig. 3.

§. 4. Nunc sphaerae punctis illis p, q, r, s respondeant in plano puncta P, Q, R, S, vnde ad axem EF demittantur perpendiculara PX, QU, RV et SW, et quia punctum Q ex P oritur, dum sola variabilis u elemento suo du augetur, coordinatae pro hoc puncto Q erunt

$$EU = x + du \left(\frac{dx}{du} \right) \text{ et } UQ = y + du \left(\frac{dy}{u} \right).$$

Simili modo quia punctum R ex P per variabilitatem solum t nascitur, pro hoc puncto erit abscissa $EV = x + dt \left(\frac{dx}{dt} \right)$ et applicata $VR = y + dt \left(\frac{dy}{dt} \right)$. Denique vero pro puncto S, quod ex variabilitate vtriusque t et u nascitur, erit abscissa

$$EW = x + du \left(\frac{dx}{du} \right) + dt \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

et

et applicata

$$WS = y + du \left(\frac{dy}{du} \right) + dt \left(\frac{dy}{dt} \right).$$

Vnde patet fore $XU = du \left(\frac{dx}{du} \right)$, cui ergo aequale est interuallum $VW = du \left(\frac{dx}{du} \right)$. Simili modo erit

$$WS - VR = UQ - XP = du \left(\frac{dy}{du} \right).$$

Ex quo sequitur fore elementum $RS =$ elemento PQ , simili modo $PR = QS$, ideoque quadrilaterum $PQRS$ parallelogrammum.

§. 5. Cum igitur rectangulum elementare in Sphaera $pqrs$ in plano per parallelogrammum $PQRS$ repraesentetur, comparemus primo latera inter se, et cum sit $pq = du$ et $pr = dt \cos. u$ in plano habebimus

$$PQ = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2} \text{ et } PR = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}.$$

Tum vero in plano elementum PQ exhibebit directionem Meridiani eiusque particulam incremento du respondentem: At elementum PR referet directionem Paralleli eiusque particulam incremento $dt \cos. u$ respondentem. Quod si ergo functiones x et y ita essent comparatae, vt foret

$$du = du \sqrt{\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2} \text{ et } dt \cos. u = dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$

tum tam Meridiani quam Paralleli in plano eandem obtinerent quantitatem quam habent in Sphaera. Interim tamen eo magis discrimen intercederet, quo magis anguli in plano ab angulis rectis essent discrepaturi.

§ 6. Quaecramus igitur primo positionem, quam directio Meridiani PQ et Paralleli PR respectu coordinatarum x et y tenet. Ac primo quidem secundum figuram elementum Meridiani PQ ad axem nostrum EF sub angulo inclinatur, cuius tangens est $\left(\frac{dy}{du} \right) : \left(\frac{dx}{du} \right)$. Simili modo directio Paralleli PR ad axem nostrum EF inclinatur sub angulo cuius tangens est $\left(\frac{dy}{dt} \right) : \left(\frac{dx}{dt} \right)$. Horum ergo angulorum differentia dabit angulum

QPR, sub quo Parallelus ad Meridianum inclinatur, cuius ergo tangens crit

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right) - \left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}$$

Quamobrem si hic angulus debeat esse rectus, quemadmodum in Sphaera, necesse est ut fiat

$$\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) \text{ siue } \left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = -\left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right).$$

§. 7. Quod si ergo desideraretur, ut figura in plano PQRS perfecte similis et aequalis fieret figurae in Sphaera *p q r s*, tribus sequentibus conditionibus satisfieri oporteret. Primo scilicet ut fieret $PQ = pq$, 2°) $PR = pr$ ac 3°) angulus $QPR = qpr = 90^\circ$. Ad hoc ergo postularentur tres sequentes aequationes:

I. $\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = 1$ siue $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1$

II, $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \cos. u$ siue $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \cos. u^2$

III. $\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = -\left(\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{dy}{dt}\right).$

Vnde si statuamus $\left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right) = \tan. \Phi$, per tertiam conditionem esse deberet $\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = -\cot. \Phi$, ideoque

$$\left(\frac{dy}{du}\right) = \left(\frac{dx}{du}\right) \tan. \Phi \text{ et } \left(\frac{dy}{dt}\right) = -\left(\frac{dx}{dt}\right) \cot. \Phi,$$

qui valores in binis aequationibus praecedentibus substituti praeberent

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \cos. \Phi^2 \text{ et } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin. \Phi^2 \cdot \cos. u^2.$$

Manifestum autem est, his tribus conditionibus iunctim sumtis nullo modo satisfieri posse; quandoquidem certum est, superficiem sphaericam nequaquam accurate in plano repraesentari posse.

§. 8. Quo autem formulas differentiales ex calculo expellamus, faciamus sequentes substitutiones

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = p, \left(\frac{dx}{dt}\right) = q, \left(\frac{dy}{du}\right) = r \text{ et } \left(\frac{dy}{dt}\right) = s$$

ac primo quidem hinc fiet

$$dx = p du + q dt \text{ et } dy = r du + s dt$$

hic-

hicque ante omnia requiritur vt istae binae formulae integrabiles euadant, id quod eueniet, si p, q, r, s tales fuerint functiones binarum variabilium t et u , vt fit

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right) \text{ et } \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right).$$

Praeterea vero valores supra inuenti ita exprimentur, vt fit

$$PQ = du \sqrt{pp + rr} \text{ et } PR = dt \sqrt{qq + ss}.$$

Tum vero anguli, quo elementum PQ ad axem inclinatur, tangens erit $= \frac{r}{p}$: at vero anguli, sub quo elementum PR ad axem inclinatur, tangens $= \frac{s}{q}$; denique anguli QPR tangens erit $\frac{qr - ps}{p^2 + r^2}$.

§. 9. His igitur denominationibus introductis ad repraesentationem perfectam requirerentur tres sequentes conditiones:

$$\text{I. } pp + rr = 1 : \text{II. } qq + ss = \cos^2 u; \text{III. } \frac{r}{p} = -\frac{q}{s}.$$

Hinc ergo, si fiat $\frac{r}{p} = \tan \Phi$, erit $\frac{s}{q} = -\cot \Phi$, ita vt fit

$$r = p \tan \Phi \text{ et } s = -q \cot \Phi,$$

vnde binae priores conditiones dant

$$pp = \cos^2 \Phi \text{ et } qq = \sin^2 \Phi \cos^2 u.$$

atque hinc deducimus

$$p = \cos \Phi \text{ et } q = -\sin \Phi \cos u$$

hincque porro

$$r = \sin \Phi \text{ et } s = \cos \Phi \cos u.$$

His igitur valoribus substitutis integrabiles reddi debent hae duae formulae:

$$dx = du \cos \Phi - dt \sin \Phi \cos u \text{ et}$$

$$dy = du \sin \Phi + dt \cos \Phi \cos u$$

ad quod cum requiratur vt fit

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{du} \text{ et } \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{du},$$

orientur hae duae aequationes

$$\text{I. } -\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) \sin \Phi = \sin u \sin \Phi - \left(\frac{d\Phi}{du}\right) \cos u \cos \Phi$$

$$\text{II. } \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) \cos \Phi = -\sin u \cos \Phi - \left(\frac{d\Phi}{du}\right) \cos u \sin \Phi.$$

Hinc

Hinc igitur I. $\sin. \Phi + \text{II. } \cos. \Phi$ praebet $0 = \left(\frac{d\Phi}{du}\right) \cos. u$, unde $\left(\frac{d\Phi}{du}\right) = 0$, sicque angulus Φ tantum a variabili t pendere deberet: at vero haec combinatio: II. $\cos. \Phi - \text{I. } \sin. \Phi$ dat $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right) = -\sin. u$, ideoque pendere deberet ab u , quod cum praecedenti conclusioni contradicat, etiam per calculum euictum est, talem repraesentationem perfectam locum habere non posse.

§. 10. Cum igitur repraesentatio perfecta penitus excludatur, utique disparitatem in repraesentatione admittere cogimur, qua figura in plano descripta a figura sphaerica aberret. Prouti igitur talem aberrationem a veritate concedere voluerimus, repraesentationem ad scopum quouis casu propositum accommodare licebit; quare cum conditiones, quibus satisfacere desideramus, infinitis modis variari queant, casus nonnullos praecipuos in sequentibus euoluamus. Ante omnia autem assumemus, angulum, quem Meridiani cum Parallelis constituunt, ubique rectum esse debere; quandoquidem, si angulos obliquos admittere vellemus, repraesentatio maxime inepta esset proditura, quocirca in sequentibus perpetuo assumemus angulum QPR esse rectum ideoque $\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}$.

§. 11. Hanc igitur proprietatem, qua in repraesentatione omnes Paralleli Meridianos normaliter traicere debent, in genere accuratius euoluamus. Hunc infinem iterum introducamus angulum Φ , ut sit $r = p \tan. \Phi$ ideoque $s = -q \cot. \Phi$. Quibus valoribus loco r et s substitutis sequentes duae formulae differentiales integrabiles reddi debebunt

$$dx = p du + q dt \text{ et } dy = p du \tan. \Phi - q dt \cot. \Phi.$$

§. 12. Quo iam has formulas ad maiorem uniformitatem perducamus, loco p et q binas novas variables m et n introducamus, ponendo $p = m \cos. \Phi$ et $q = n \sin. \Phi$, unde euadet $r = m \sin. \Phi$ et $s = -n \cos. \Phi$ atque ambae formulae integrabi-

les

les reddendae erunt

$$dx = m du \cos. \Phi + n dt \sin. \Phi \text{ et } dy = m du \sin. \Phi - n dt \cos. \Phi.$$

Sicque totum negotium huc reducitur, vt inquiratur, cuiusmodi functiones m et n accipi debeant, vt istae duae formulae integrabiles reddantur; vbi imprimis respiciendum erit ad eam conditionem, quam insuper quouis casu adimplere voluerimus.

Hypothesis I.

Qua omnes Meridiani ad nostrum axem EF normales, Paralleli vero EI paralleli statuuntur.

§. 13. Cum angulus Φ metiatur inclinationem elementi PQ ad axem EF , quoniam assumimus $\tan. \Phi = \frac{r}{p}$, elementum vero PQ directionem Meridiani indicat, angulus iste Φ pro hac Hypothesi erit rectus, vnde ambae formulae differentiales erunt $dx = n dt$ et $dy = m du$, quae cum esse debeant integrabiles, id infinitis modis effici poterit, dummodo pro m functio quaecunque ipsius u , pro n vero functio ipsius t accipiat; quamobrem insuper pluribus conditionibus, quae desiderari possunt, satisfieri poterit.

§. 14. Primum igitur effici poterit, vt omnes gradus longitudinis inter se fiant aequales, quandoquidem nulla ratio suadet, vt in his gradibus inaequalitas statuatur. Quod si ergo noster axis EF Aequatorem referat, ita vt abscissa EX repraesentet, arcum Aequatoris $al = t$, statui oportebit $x = t$, ideoque n unitati vel alii quantitati constanti pro lubitu accipiendae aequale, tum vero pro applicata quaecunque functio ipsius u accipi poterit.

§. 15. In hac ergo Hypothesi quadrilaterum $PQRS$ non solum erit parallelogrammum rectangulum, vti in Sphaera, sed etiam punctum Q in ipsa applicata XP producta erit situm, ita vt futurum sit $PQ = dy$ et $PR = dx = dt$. Quod si ergo sumeremus $y = u$, quoniam u denotat latitudinem loci, si $dx = dt$ referat gradum longitudinis, et $dy = du$ gradum lati-

Tab. I.
Fig. 4

tudinis, hoc casu foret $dy = dx$. Verum talis repraesentatio omni vsu caritura et regiones Terrae vehementer distortas esset exhibitura.

§. 16. Pro applicata autem y talem functionem latitudinis u assumi conueniet, vt scopo cuiquam, quem nobis proponimus satisfiat. Ac primo quidem hic occurrit ista conditio, vt parallelogrammum in plano P Q R S simile reddatur parallelogrammo in Sphaera $p q r s$, quandoquidem hoc modo omnes saltem portiunculae minimae in superficie sphaerica similimodo in plano exhibebuntur. Atque haec est ipsa illa conditio, quae in Mappis Hydrographicis ab inuentore *Mercatoris* dictis, obseruari solet, quoniam talis repraesentatio nauigantibus maxima commoda suppeditat, quem ergo repraesentandi modum breuiter accuratius euoluamus.

I. De Mappis Hydrographicis Mercatoris.

§. 16. Quoniam igitur hic requiritur, vt rectangulum P Q R S simile fiat rectangulo $p q r s$, vbi est $PQ = du$ et $PR = dt \cos. u$, ob $dx = dt$ fieri dedet $dy : dt = du : dt \cos. u$, vnde colligitur $dy = \frac{du}{\cos. u}$, hincque integrando erit $y = \text{tag.}(45^\circ + \frac{1}{2}u)$, Latitudini scilicet quae in sphaera angulo denotatur, in hac repraesentatione respondebit applicata y , logarithmo hyperbolico tangentis anguli $45^\circ + \frac{1}{2}u$ aequalis; ex qua formula pro singulis latitudinibus u valores ipsius y computari et in tabula referri solent.

§. 17. Scilicet cum hic omnes Paralleli Aequatori aequales referantur, qui tamen in Sphaera continuo fiunt minores, gradus cuiusque Meridiani, qui in Sphaera sunt aequales in hac repraesentatione tanto maiores accipi oportet, quanto maiores hic gradus cuiusque Paralleli sunt quam super Sphaera. Hocque modo in Meridianis gradus latitudinis continuo magis augentur, quo maior fuerit latitudo, idque in eadem ratione, qua cosinus latitudinis diminuitur. Ita si du denotet gradum

in

in Meridiano super Sphaera, in his Mappis quantitas huius gradus est $\frac{du}{\cos. u}$: vnde sub latitudine 60° gradus Meridiani duplo maior est quam in superficie sphaerica ; at sub polo adeo crescit in infinitum, quam ob causam istas mappas non vsque ad polos extendere licet.

§. 18. Maximum autem commodum , quod istae Mappae nauigantibus praestant , in eo consistit , quod curuae Loxodromicae , quae in Sphaera omnes Meridianos sub eodem angulo traiciunt, in hac repraesentatione per lineas rectas exhibentur, quae scilicet omnes Meridianos, qui hic inter se sunt paralleli, sub eodem angulo interfecant.

§. 19. Ita si in Sphaera linea ap referat curuam Loxodromicam , quae Meridianos traiciat sub angulo $=\zeta$, eiusque longitudo vocetur $ap=z$ erit $du:dz=\cos.\zeta:1$ ideoque $dz=\frac{du}{\cos.\zeta}$ hincque $z=\frac{u}{\cos.\zeta}$. Quod si iam isti lineae ap in plano respondeat linea EP , quoniam angulus EPX itidem est $=\zeta$, euidens est hanc lineam EP fore rectam , eiusque longitudinem $\frac{y}{\cos.\zeta}$; vnde ex cognita quantitate lineae EP vicissim vera longitudo viae a naue percurssae, scilicet linea ap , concludi poterit , cum sit $ap:EP=u:y$: haec autem ratio $u:y$ vt cognita spectari potest.

§. 20. Quem ad modum autem curuae Loxodromicae hoc modo in plano simplicissime per lineas rectas exhibentur, ita e contrario circuli maximi in Sphaera ducti hic per lineas maxime transcendentes repraesentabuntur. Sit enim ap arcus circuli maximi ad Aequatorem in a inclinati sub angulo $lap=\theta$, erit vt constat $\tan.g.u=\tan.g.\theta \sin.t$, vnde naturam curuae EP illi arcui respondentis definiri poterit per formulas $x=t$ et $y=l \tan.g.(45^\circ + \frac{1}{2}u)$.

§. 21. Ad naturam igitur huius curuae EP inuestigandam denotet e numerum , cuius logarithmus hyperbolicus $=1$,

eritque $e^y = \text{tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} u) = \frac{1 + \text{tang.} \frac{1}{2} u}{1 - \text{tang.} \frac{1}{2} u}$, hincque
 $\text{tang.} \frac{1}{2} u = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$, ex quo porro colligitur $\text{tang.} u = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}$, qui
 valor in aequatione superiore substitutus ob $t = x$ praebebit
 hanc aequationem inter x et y : $\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang.} \theta \text{ fin. } x$, qua
 natura huius curvae EP exprimitur; vnde patet, si longitudo
 x fuerit quam minima, tum fore etiam y minimum, ideoque
 $e^y = 1 + y$ et $e^{2y} = 1 + 2y$; vnde ob $\text{fin. } x = x$ erit $\frac{y}{1+y} = x \text{ tang.} \theta$
 ideoque $\frac{y}{x} = \text{tang.} \theta$; vnde patet curuam in E ad Aequatorem
 etiam sub angulo θ inclinari. Tum vero sumto $x = 90^\circ$, ap-
 plicata y fiet maxima atque $\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang.} \theta$ vnde deducitur

$$e^y = \text{tang.} \theta + \sqrt{\text{tang.}^2 \theta + 1} = \frac{\sin. \theta + 1}{\cos. \theta} = \sqrt{\frac{1 + \sin. \theta}{1 - \sin. \theta}}$$

quae expressio porro reducitur ad $\cot. (45^\circ - \frac{1}{2} \theta)$, sicque erit
 $e^y = \cot. (45^\circ - \frac{1}{2} \theta)$ hincque

$$y = l \cot. (45^\circ - \frac{1}{2} \theta) = l \text{ tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} \theta).$$

Ex quo intelligitur, hanc curuam maxime esse transcen-
 dentem.

2°.) De Mappis veram quantitatem cuiusque regionis exhibentibus.

§. 22. Maneant, vti in hac Hypothesi assumimus, omnes
 Meridiani inter se paralleli, gradus autem in Aequatore omnes
 inter se aequales, quibus igitur etiam gradus in omnibus Paral-
 lelis aequabuntur, ita vt sit $x = t$; et nunc requiritur, vt area
 rectanguli PQRS = $dx dy$ aequalis reddatur areae rectanguli
 $pqrs$ in Sphaera = $du dt \cos. u$. Fiat igitur $dy = du \cos. u$ erit-
 que integrando $y = \sin. u$, vnde constructio huiusmodi reprae-
 sentationis erit facillima, quia singulae applicatae aequales sumi
 debent

debent sinibus latitudinum quibus respondent. Gradus autem in quolibet Meridiano ab Aequatore discedendo continuo dimi-
nuerentur et sub polo plane euanescent; polus autem referetur
per lineam rectam Aequatori EF parallelam ab eoque distan-
tem interuallo sin. $u = 1$, hoc est radio Sphaerae aequali.

§. 23. Quod si ergo tota superficies Terrae hoc modo
repraesentetur, mappa referet parallelogramum, cuius longi-
tudo erit peripheriae totius Aequatoris $= 2\pi$ aequalis; latitudo
autem vtrunque ab Aequatore ad distantiam $= 1$ extenditur,
vnde area totius rectanguli erit $= 4\pi$, quae aequatur areae
totius superficiei sphaericae. In talibus igitur mappis omnes
Terrae regiones vera quantitate exhibebuntur, quanquam ea-
rum figura plurimum a veritate aberret. Semper enim area
cuiusque regionis hoc modo in plano repraesentatae aequalis
erit areae eiusdem regionis in superficie Terrae; vnde tales
mappae inseruiunt diuersis Terrae regionibus secundum veram
quantitatem inter se comparandis, quod commodissime prae-
stabitur per gradus vel milliaria quadrata, dum singulis gradi-
bus Aequatoris quindecim miliaria germanica tribuuntur.

Hypothesis II.

Qua regiones minimae in Terra per similes figuras
in plano exhibentur.

§. 24. Quo similitudo ista obseruetur ante omnia necesse est, ut ubique Meridiani ad Parallelos normales statuatur, quam ob rem ambae formulae differentiales, quas integrabiles reddi oportet, erunt vti iam supra §. 12. sunt inuentae

$$dx = m du \cos. \Phi + n dt \sin. \Phi \text{ et}$$

$$dy = m du \sin. \Phi - n dt \cos. \Phi$$

hinc autem fiunt elementa

$PQ = du \sqrt{pp + rr} = m du$ et $PR = dt \sqrt{qq + ss} = n dt$
angulus vero QPR has formulas iam redditus est rectus.

§. 25. Cum igitur rectangulum $PQRS$ simile esse debeat rectangulo $pqrs$, necesse est vt fiat $PQ:PR = pq:pr$ hoc est $m:n = 1:\cos. u$, ideoque $n = m \cos. u$, quare binae nostrae formulae differentiales erunt :

$$\begin{aligned} dx &= m du \cos. \Phi + m dt \cos. u \sin. \Phi \text{ et} \\ dy &= m du \sin. \Phi - m dt \cos. u \cos. \Phi. \end{aligned}$$

§. 26. Totum ergo negotium huc reducitur, vt indicetur, quales functiones ipsarum t et u pro m et Φ assumi debeant, vt ambae istae formulae integrabiles reddantur. Quoniam autem supra posuimus $p = m \cos. \Phi$ et $r = m \sin. \Phi$, breuitatis gratia has litteras p et r introducamus, vt habeamus has duas aequationes :

$$\begin{aligned} dx &= p du + r dt \cos. u \text{ et} \\ dy &= r du - p dt \cos. u \end{aligned}$$

et iam quaeritur, quales functiones ipsarum t et u pro litteris p et r accipi debeant, vt ambae istae formulae integrabiles euadant, vbi quidem statim casus Mapparum Hydrographicarum se offert, quippe quo sumi debet $p = 0$ et $r = \frac{1}{\cos. u}$. Alios autem casus hic diuinando non tam facile elicere licet.

§. 27. Ex notis autem integrabilitatis conditionibus requiritur vt sit

$$\begin{aligned} \left(\frac{dp}{dt} \right) &= d. \left(\frac{r \cos. u}{du} \right) = -r \sin. u + \cos. u \frac{dr}{du} \text{ et} \\ \left(\frac{dr}{dt} \right) &= -d. \left(\frac{p \cos. u}{du} \right) = p \sin. u - \cos. u \frac{dp}{du}, \end{aligned}$$

ex quarum posteriore fit $\frac{dp}{du} = p \tan. u - \frac{dr}{dt \cos. u}$. Quare cum sit $dp = du \left(\frac{dp}{du} \right) + dt \left(\frac{dp}{dt} \right)$, hinc nascitur ista noua conditio :

$$dp = p du \tan. u - \frac{dr}{dt} \cdot \frac{du}{\cos. u} - r dt \sin. u + \frac{dr}{du} dt \cos. u$$

quae per $\cos. u$ multiplicata, et termino p ad alteram partem partem translato fit

$$dp \cos. u - p du \sin. u = -r dt \sin. u \cos. u + \left(\frac{r}{u} \right) dt \cos. u^2 - \left(\frac{r}{dt} \right) du$$

vbi, quia membrum sinistrum sponte est integrabile, etiam dextrum

dextrum ad integrabilitatem perducere debet, quaerendo scilicet pro r idoneam functionem ipsarum t et u .

§. 28. Hanc ob rem etiam viam inire oportet has formulas resolvendi. Postquam autem difficultates probe perpensissem, duplex se mihi obtulit methodus hoc negotium conficiendi, quarum altera suppeditat innumerabiles solutiones particulares, altera vero me ad solutionem generalissimam perduxit. Has igitur ambas methodos, quibus Analysis circa functiones duarum variabilium versanti insignia incrementa afferi videntur, hic accuratius euoluam.

Methodus particularis resolvendi aequationes differentiales

$$dx = p du + r dt \cos. u, \quad dy = r du - p dt \cos. u.$$

§. 29. Quoniam ambae functiones p et r utramque variabilem u et t inuoluunt, utramque producto ex functione ipsius u in functionem ipsius t aequalem statuamus. Sit igitur $p = UT$ et $r = V\Theta$, existentibus U et V functionibus solius u , T vero et Θ functionibus solius t , sicque habebimus has duas formulas differentiales integrabiles reddendas :

$$\text{I. } dx = UT du + V\Theta dt \cos. u$$

$$\text{II. } dy = V\Theta du - UT dt \cos. u.$$

§. 30. Hinc iam duplici modo tam valor ipsius x quam ipsius y per formulas integrales exhiberi poterit. Si enim quantitas t ut constans spectatur, ideoque posteriora membra evanescent, ex prioribus colligetur

$$x = T \int U du \quad \text{et} \quad y = \Theta \int V du$$

sin autem quantitas u pro constante habeatur, ex posterioribus membris fiet

$$x = V \cos. u \int \Theta dt \quad \text{et} \quad y = -U \cos. u \int T dt$$

atque

atque hi gemini vtriusque valores inter se aequales esse debent, unde pro x hanc adipiscimur aequationem :

$$T \int U du = V \cos. u \int \Theta dt \text{ siue } \int \frac{U du}{V \cos. u} = \int \frac{\Theta dt}{T}$$

pro y autem erit

$$\Theta \int V du = -U \cos. u \int T dt \text{ siue } \int \frac{V du}{U \cos. u} = -\int \frac{T dt}{\Theta}.$$

Ex quibus duabus conditionibus indolem functionum U et V T et Θ elici oportet.

§. 31. Cum igitur esse debeat $\int \frac{U du}{V \cos. u} = \int \frac{\Theta dt}{T}$, manifestum est, has duas fractiones quantitati constanti esse debere aequales, quandoquidem ambae variables t et u neutiquam a se inuicem pendent. Sit igitur α ista quantitas constans, eritque

$$\int U du = \alpha V \cos. u \text{ et } \int \Theta dt = \alpha T.$$

Simili modo cum sit $\int \frac{V du}{U \cos. u} = -\int \frac{T dt}{\Theta}$, vtraque fractio aequetur quantitati constanti β , indeque fiet

$$\int V du = \beta U \cos. u \text{ et } \int T dt = -\beta \Theta.$$

Hocque modo formulae integrales ad quantitates absolutas reducuntur, unde valores ipsarum x et y ita sine signo summatorio exprimentur :

$$x = \alpha T V \cos. u \text{ et } y = \beta \Theta U \cos. u.$$

§. 32. Statuamus breuitatis gratia $U \cos. u = P$ et $V \cos. u = Q$, ita vt sit $U = \frac{P}{\cos. u}$ et $V = \frac{Q}{\cos. u}$, unde quatuor nostrae formulae erunt

$$\int \Theta dt = \alpha T \text{ et } \int T dt = -\beta \Theta$$

$$\int \frac{P du}{\cos. u} = \alpha Q \text{ et } \int \frac{Q du}{\cos. u} = \beta P.$$

Iam priores formulae vtriusque ordinis differentiatiae dant $\Theta = \frac{\alpha dT}{dt}$, $P = \frac{\alpha dQ \cos. u}{du}$, qui valores in posterioribus substituti praebent

$$\int T dt = -\frac{\alpha \beta dT}{du} \text{ et } \int \frac{Q du}{\cos. u} = \frac{\alpha \beta dQ \cos. u}{du}.$$

Quae

Quae aequationes denuo differentiatæ fumendis elementis dt et du constantibus præbent sequentes aequationes :

$$T = -\frac{\alpha\beta dT}{du^2} \text{ et } Q = \frac{\alpha\beta dQ \cos. u^2}{du^2} - \frac{\alpha\beta dQ \sin. u \cos. u}{du}$$

sicque ad binas aequationes differentiales secundi gradus fumus deducti, a quarum integratione tota solutio pendet.

§. 34. Incipiamus a priore aequatione $T = -\frac{\alpha\beta dT}{du^2}$ quæ ducta in $2 dT$ et integrata præbet $TT = -\frac{\alpha\beta dT^2}{du^2} + A$ vnde colligitur $dt^2 = \frac{\alpha\beta dT^2}{A - TT}$. Simili modo altera aequatio

$$Q = \frac{\alpha\beta dQ \cos. u^2}{du^2} - \frac{\alpha\beta dQ \sin. u \cos. u}{du}$$

ducta in $2 dQ$ et integrata præbet $QQ = \frac{\alpha\beta dQ^2 \cos. u^2}{du^2} + B$, vnde colligitur $\frac{du^2}{\cos. u^2} = \frac{\alpha\beta dQ^2}{QQ - B}$. Pro harum autem integratione vltiori duos casus distinguere oportet, prouti quantitas $\alpha\beta$ fuerit vel positiua vel negatiua.

Casus prior

quo est $\alpha\beta = +\lambda\lambda$

ideoque $\beta = \frac{\lambda\lambda}{\alpha}$.

§. 35. Hoc ergo casu habebimus $dt^2 = \frac{\lambda\lambda dT^2}{A - TT}$, vbi, cum A debeat esse quantitas positiua, ponamus $A = aa$ eritque $dt = \frac{\lambda dT}{\sqrt{(aa - TT)}}$, cuius integrale manifestum est $t + \delta = \lambda A \sin. \frac{T}{a}$; vicissim ergo colligitur $T = a \sin. (\frac{t + \delta}{\lambda})$; vnde cum sit

$$dT = \frac{a dt}{\lambda} \cos. (\frac{t + \delta}{\lambda}) \text{ ob } \Theta = \frac{a dT}{dt} \text{ erit nunc}$$

$$\Theta = \frac{a^2}{\lambda} \cos. (\frac{t + \delta}{\lambda}).$$

§. 36. Altera vero aequatio integranda, ob $\alpha\beta = \lambda\lambda$ erit $\frac{du}{\cos. u} = \frac{\lambda dQ}{\sqrt{(QQ - B)}}$, quæ integrata dat

$$l \tan. (45^\circ + \frac{1}{2}u) + \lambda l \varepsilon = \lambda l (Q + \sqrt{QQ - B}).$$

Quo autem hanc formulam commodius euoluere queamus, vocemus $\tan. (45^\circ + \frac{1}{2}u) = s$, et cum sit $ls = \int \frac{du}{\cos. u}$ erit $\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos. u}$

ideoque $ds = \frac{s du}{\cos u}$. Cum igitur fit

$$I\epsilon^\lambda s = \lambda I(Q + \sqrt{QQ - B}) \text{ erit } \epsilon^\lambda s = (Q + \sqrt{QQ - B})^\lambda$$

ideoque $Q + \sqrt{QQ - B} = \epsilon s^{\frac{1}{\lambda}}$, vbi breuitatis gratia faciamus

$$\frac{1}{\lambda} = \nu, \text{ et facta evolutione prodibit } Q = \frac{1}{2}\epsilon s^\nu + \frac{B s^{-\nu}}{2\epsilon}, \text{ hincque}$$

fit $dQ = \frac{1}{2}\nu\epsilon s^{\nu-1} ds - \frac{\nu B}{2\epsilon} s^{-\nu-1} ds$, quae aequatio ob $ds = \frac{s du}{\cos u}$ abit in hanc

$$dQ = \frac{\frac{1}{2}\nu\epsilon s^\nu du}{\cos u} - \frac{\nu B}{2\epsilon} s^{-\nu} \frac{du}{\cos u}.$$

Quia igitur erat $P = \frac{\alpha dQ \cos u}{du}$ erit

$$P = \frac{1}{2}\alpha\nu\epsilon s^\nu - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\epsilon}.$$

§. 37. His igitur valoribus inuentis erit

$$U = \frac{\alpha\nu\epsilon s^\nu}{2\cos u} - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\epsilon\cos u} \text{ et } V = \frac{\epsilon s^\nu}{2\cos u} + \frac{B s^{-\nu}}{2\epsilon\cos u}$$

ex quibus denique colligimus ambas nostras coordinatas x et y : scilicet

$$x = \frac{1}{2}\alpha a \sin. \left(\frac{1+\delta}{\lambda} \right) \left(\epsilon s^\nu + \frac{B}{\epsilon} s^{-\nu} \right) \text{ et}$$

$$y = \frac{1}{2}\alpha\nu\lambda a \cos. \left(\frac{1+\delta}{\lambda} \right) \left(\epsilon s^\nu - \frac{B}{\epsilon} s^{-\nu} \right)$$

vbi meminisse oportet esse $\nu = \frac{1}{\lambda}$ et $s = \tan. (45^\circ + \frac{1}{2}u)$; vnde ad has formulas concinniores reddendas, ponamus $B = \epsilon\epsilon b$, quibus notatis obtinebimus

$$x = \frac{1}{2}\alpha\epsilon a \sin. \left(\frac{1+\delta}{\lambda} \right) (s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}})$$

$$y = \frac{1}{2}\alpha\epsilon a \cos. \left(\frac{1+\delta}{\lambda} \right) (s^{\frac{1}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}}).$$

Casus posterior

$$\text{quo } \alpha\beta = -\mu\mu \text{ ideoque } \beta = -\frac{\mu\mu}{\alpha}.$$

§. 38. Hoc ergo casu habebimus $d\tau^2 = -\frac{\mu\mu dT^2}{\Lambda - T^2}$ hincque
 $d\tau =$

$dt = \frac{\mu dT}{\sqrt{TT-A}}$, vnde integrando fit

$$t + \delta = \mu l (T + \sqrt{TT-A})$$

vnde si e denotet numerum, cuius logarithmus hyperbolicus = t

erit $e^{\frac{t+\delta}{\mu}} = T + \sqrt{TT-A}$. Sit breuitatis gratia $\frac{t+\delta}{\mu} = \theta$

ita vt fit $d\theta = \frac{dt}{\mu}$ eritque $e^\theta - T = \sqrt{TT-A}$, vnde fit

$$T = \frac{e^{2\theta} + A}{2e^\theta} = \frac{1}{2}e^\theta + \frac{1}{2}Ae^{-\theta}. \text{ Hinc autem fit}$$

$$dT = \frac{dt}{2\mu}e^\theta - \frac{Adt}{2\mu}e^{-\theta}, \text{ ex quo fit}$$

$$\Theta = \frac{a}{2\mu} (e^\theta - Ae^{-\theta}).$$

§. 39. Hoc autem casu porro erit

$$\frac{du^2}{\cos. u^2} = -\frac{\mu \mu dQ^2}{QQ-B} = \frac{\mu \mu dQ^2}{B-QQ}.$$

Quia igitur B necessario est positium, ponamus $B = bb$, vt

fiat $\frac{du}{\cos. u} = \frac{\mu dQ}{\sqrt{(bb-QQ)}}$ et integrando

$$l \text{ tang. } (45^\circ + \frac{1}{2}u) + l\epsilon = \mu A \sin. \frac{Q}{b},$$

vbi si iterum fit $\text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2}u) = s$, erit $\frac{l\epsilon s}{\mu} = A \sin. \frac{Q}{b}$, vnde

vicissim deducimus $Q = b \sin. \frac{l\epsilon s}{\mu}$, hincque

$$dQ = \frac{b}{\mu} \cdot \frac{ds}{s} \cos. \frac{l\epsilon s}{\mu} = \frac{b}{\mu} \frac{du}{\cos. u} \cos. \frac{l\epsilon s}{\mu}, \text{ vnde fit}$$

$$P = \frac{\alpha b}{\mu} \cos. \frac{l\epsilon s}{\mu}.$$

§. 40. Cum igitur ex superioribus fit

$$x = \alpha TV \cos. u = \alpha TQ \text{ et } y = \beta \Theta P = -\frac{\mu \mu}{\alpha} \Theta P$$

erit valoribus modo erutis substituendis

$$x = \frac{1}{2} \alpha b \sin. \frac{l\epsilon s}{\mu} (e^\theta + Ae^{-\theta}) \text{ et}$$

$$y = -\frac{1}{2} \alpha b \cos. \frac{l\epsilon s}{\mu} (e^\theta - Ae^{-\theta}).$$

Vbi meminisse oportet esse

$$\theta = \frac{t+\delta}{\mu} \text{ et } s = \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2}u).$$

§. 41. Quoniam in his formulis nonnullae quantitates arbitrio nostro penitus sunt relictæ, hae solutiones iam satis late patent, et innumerabiles casus speciales in se complectuntur. Verum multo adeo latius haec solutio extendi potest dum binae pluresue quacuis solutiones inuentae inter se coniungi possunt. Scilicet: si inuenti fuerint primo hi valores: $x=M$ et $y=N$; deinde vero $x=M'$ et $y=N'$; praeterea etiam $x=M''$ et $y=N''$ etc., tum ex his solutionibus ista multo generalior formari poterit:

$$x = \mathfrak{A}M + \mathfrak{B}M' + \mathfrak{C}M'' + \mathfrak{D}M''' \text{ etc. et}$$

$$y = \mathfrak{A}N + \mathfrak{B}N' + \mathfrak{C}N'' + \mathfrak{D}N''' \text{ etc.}$$

quae solutio utique tam generalis videtur, ut omnes solutiones possibiles in se complectatur.

Methodus generalis resoluendi aequationes differentiales

$$dx = p du + r dt \cos. u \text{ et } dy = r du - p dt \cos. u.$$

§. 42. Quaeratur eiusmodi combinatio harum duarum formularum, quae resolutionem in duos factores admittat. Hunc in finem prior ducatur in α , posterior vero in β et aggregatum ambarum erit

$$\alpha dx + \beta dy = p(\alpha du - \beta dt \cos. u) + r(\beta du + \alpha dt \cos. u)$$

cuius factores differentiales, ut ad similitudinem perducantur, ita disponantur:

$$\alpha dx + \beta dy = \alpha p \left(du - \frac{\beta}{\alpha} dt \cos. u \right) + \beta r \left(du + \frac{\alpha}{\beta} dt \cos. u \right).$$

Iam fiat $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$, siue $\alpha\alpha + \beta\beta = 0$ siue $\beta = \alpha\sqrt{-1}$, et ista combinatio dabit

$$dx + dy\sqrt{-1} = (p + r\sqrt{-1})(du - \sqrt{-1} dt \cos. u)$$

quae forma, ut factor differentialis integrabilis reddatur, ita repraesentetur

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos. u (p + r\sqrt{-1}) \left(\frac{du}{\cos. u} - \sqrt{-1} dt \right).$$

§. 43. Ponamus nunc $\frac{du}{\cos u} - dt\sqrt{-1} = dz$, vt sit

$$z = l \operatorname{tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}u) - t\sqrt{-1} \text{ eritque}$$

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u (p + r\sqrt{-1}) dz$$

quae aequatio manifesto integrabilis esse nequit, nisi factor finitus $\cos u (p + r\sqrt{-1})$ sit functio ipsius z ; quaecunque autem fuerit functio, integratio semper locum habebit. Vnde patet, etiam integrale futurum esse functionem ipsius z , ita vt formula $x + y\sqrt{-1}$ acquetur functioni cuicunque ipsius z hoc est quantitatis

$$l \operatorname{tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}.$$

§. 44. Vt autem haec formula concinnior reddatur statnamus vt haecenus $\operatorname{tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}u) = s$, vt sit

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u} \text{ et } z = ls - t\sqrt{-1}.$$

Nunc more solito denotet character Γ functionem quamcunque quantitatis suffixae, eritque

$$x + y\sqrt{-1} = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1})$$

sive etiam, quod eodem redit,

$$x + y\sqrt{-1} = 2\Gamma : (ls - t\sqrt{-1}).$$

Cum autem formula $\sqrt{-1}$ natura sua signum ambiguum \pm inuoluat, erit quoque

$$x - y\sqrt{-1} = 2\Gamma : (ls + t\sqrt{-1}).$$

Hinc autem colligimus fore

$$x = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1}) + \Gamma : (ls + t\sqrt{-1}) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Gamma : (ls - t\sqrt{-1}) - \Gamma : (ls + t\sqrt{-1}).$$

Constat autem has expressiones pro x et y semper reduci ad valores reales.

§. 45. Ita si Γ designet potestatem quamcunque formulae suffixae, vel etiam multipulum quodcunque, cuius exponens sit λ , facta evolutione et posito v. g. $ls = v$ fiet

Q 3

$$x = v^\lambda$$

$$x = v^{\lambda} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2} v^{\lambda-2} t^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^{\lambda-4} t^4 - \frac{\lambda \dots (\lambda-5)}{1 \cdot 2 \dots 6} v^{\lambda-6} t^6 + \text{etc. et}$$

$$y = \frac{\lambda}{1} v^{\lambda-1} t - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^{\lambda-3} t^3 + \frac{\lambda \dots (\lambda-4)}{1 \cdot 2 \dots 5} v^{\lambda-5} t^5 - \frac{\lambda \dots (\lambda-6)}{1 \cdot 2 \dots 7} v^{\lambda-7} t^7.$$

Ex quibus formulis valor quidem ipsius y prodiisset mutatis signis: verum ex rei natura intelligitur, ambas coordinatas x et y tam negative quam positive accipi posse.

§. 46. Evidens autem est hos valores plurimum discrepare ab iis quos solutio particularis nobis suppeditavit. Hinc autem casus Mapparum Hydrographicarum, qui in superioribus formulis non continebatur, sponte se prodit sumendo $\lambda=1$; tum enim erit $x=ls=t \operatorname{tang}.(45^{\circ}+\frac{1}{2}u)$ et $y=t$. Supra quidem isti valores pro x et y erant permutati: verum perspicuum est coordinatas x et y semper inter se commutari posse.

§. 47. Interim tamen certum est, omnes valores supra inuentos etiam in his formulis contineri debere, quoniam ista solutio manifesto maxime est generalis, quod ostendisse operae erit pretium. Notetur igitur si formulo $\Gamma:z$ denotet functiones quaecunque ipsius z , tum eius loco semper scribi posse $\Delta:Z$, existente Z functione quacunque ipsius z . Hoc notato cum sit $z=ls-t\sqrt{-1}$, pro Z sumamus $e^{\alpha z}$, ideoque loco $\Gamma:(ls-t\sqrt{-1})$ scribere licebit $\Delta:e^{\alpha ls-\alpha t\sqrt{-1}}$. Est vero $e^{\alpha ls}=s^{\alpha}$; tum vero est

$$e^{\alpha t\sqrt{-1}} = \cos. \alpha t + \sqrt{-1} \sin. \alpha t, \text{ unde fiet}$$

$$e^{\alpha ls-\alpha t\sqrt{-1}} = s^{\alpha} (\cos. \alpha t - \sqrt{-1} \sin. \alpha t).$$

Quo circa binis huiusmodi formulis coniungendis erit
 $x=\Delta:s^{\alpha}(\cos. \alpha t - \sqrt{-1} \sin. \alpha t) + \Delta:s^{\alpha}(\cos. \alpha t + \sqrt{-1} \sin. \alpha t)$
 $y\sqrt{-1}=\Delta:s^{\alpha}(\cos. \alpha t - \sqrt{-1} \sin. \alpha t) - \Delta:s^{\alpha}(\cos. \alpha t + \sqrt{-1} \sin. \alpha t)$
 ubi observasse iuvabit, hos binos valores non solum per constantem quaecunque multiplicari sed etiam inter se permutari posse.

§. 48.

§. 48. Consideremus hic casum quo $\Delta : Z = Z$ eritque

$$x = 2s^a \cos. at \text{ et } y = 2s^a \sin. at.$$

Quod si hic a negative capiamus, valores satisfaciētes erunt quoque

$$x = 2s^{-a} \cos. at \text{ et } y = -2s^{-a} \sin. at.$$

Supra autem iam notauimus, binas solutiones semper ita inter se combinari posse, vt ambae per quantitates constantes quas-cunque multiplicentur; vnde ex his duabus solutionibus formari poterit ista multo latius patens:

$$x = (As^a + Bs^{-a}) \cos. at \text{ et } y = (As^a - Bs^{-a}) \sin. at$$

in quibus formalis solutio ante §. 37. data continetur. Euidens autem est formulas hic per functionem Δ exhibitas infinites esse generaliores.

§. 49. Vt hinc etiam solutionem particularem posteriorem eruamus, fumamus

$$Z = \cos. az = \cos. (als - at\sqrt{-1}) = \cos. als \cos. at\sqrt{-1} + \sin. als \sin. at\sqrt{-1};$$

constat autem esse

$$\cos. at\sqrt{-1} = \frac{e^{-at} + e^{+at}}{2} \text{ et}$$

$$\sin. at\sqrt{-1} = \frac{e^{-at} - e^{+at}}{2\sqrt{-1}} \text{ vnde fit}$$

$$Z = \left(\frac{e^{-at} + e^{+at}}{2} \cos. als + \left(\frac{e^{-at} - e^{+at}}{2\sqrt{-1}} \right) \sin. als \right)$$

Nunc igitur characterem Δ praefigendo erit

$$x = \Delta : \left(\frac{\cos. als (e^{-at} + e^{+at})}{2} + \frac{(e^{-at} - e^{+at}) \sin. als}{2\sqrt{-1}} \right)$$

$$+ \Delta : \left(\frac{\cos. als (e^{-at} + e^{+at})}{2} - \frac{\sin. als (e^{-at} - e^{+at})}{2\sqrt{-1}} \right) \text{ et}$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta : \left(\frac{\cos. als (e^{-at} + e^{+at})}{2} + \frac{\sin. als (e^{-at} - e^{+at})}{2\sqrt{-1}} \right)$$

$$- \Delta : \left(\frac{\cos. als (e^{-at} + e^{+at})}{2} - \frac{\sin. als (e^{-at} - e^{+at})}{2\sqrt{-1}} \right).$$

Quod

Quod si ergo pro $\Delta: Z$ fumatur ipsum Z erit

$$x = \frac{\cos. \alpha \operatorname{Is}(e^{-\alpha t} + e^{\alpha t})}{2} \text{ et } y \sqrt{-1} = \frac{\sin. \alpha \operatorname{Is}(e^{-\alpha t} - e^{\alpha t})}{\sqrt{-1}}$$

sumto autem α negatiuo erit

$$x = \cos. \alpha \operatorname{Is}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \text{ et } y \sqrt{-1} = \frac{\sin. \alpha \operatorname{Is}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})}{\sqrt{-1}}$$

quae formulae continent solutionem casus posterioris §. 40. allati.

§. 50. In his igitur formulis generalissimis, pro coordinatis x et y inuentis, continentur omnes plane repraesentationes possibiles superficiei sphaericae, quae in plano ita exhiberi possunt, vt Meridiani a Parallelis normaliter traiciantur et omnes figurae valde exiguae in Sphaera sumtae per similes figuras in plano exprimantur.

§. 51. In hac solutione generalissima continetur proiectio ordinaria, qua Hemisphaeria terrestria repraesentari solent per circulos, in quorum centro alteruter polus existit. Prodit enim ista proiectio, si in formulis

$$x = s^{\alpha} \cos. \alpha t \text{ et } y = s^{\alpha} \sin. \alpha t$$

fumatur $\alpha = -1$, vt fit

$$x = \frac{\cos. t}{\operatorname{tang.} (45^{\circ} + \frac{1}{2} u)} \text{ et } y = \frac{\sin. t}{\operatorname{tang.} (45^{\circ} + \frac{1}{2} u)},$$

tum enim pro Polo, vbi $u = 90^{\circ}$, tam x quam y euanescent. Pro Aequatore autem, vbi $u = 0$ et $s = 1$, fit $x = \cos. t$ et $y = \sin. t$ vnde fit $xx + yy = 1$. Sicque Aequator referetur circulo circa polum descripto cuius radius $= 1$. Tum vero longitudine t manente eadem erit $\frac{y}{x} = \operatorname{tang.} t$; vnde patet omnes Meridianos esse radios circuli. Pro quavis autem latitudine u Paralleli erunt circuli Aequatori concentrici, quorum radii erunt

$$= \frac{1}{\operatorname{tang.} (45^{\circ} + \frac{1}{2} u)} = \operatorname{tang.} (45^{\circ} - \frac{1}{2} u),$$

hoc est $=$ tangenti semissis distantiae a polo. Secundum has condiciones etiam Hemisphaeria talia exhiberi solent.

Hypo-

Hypothesis III.

Qua omnes Terrae regiones vera quantitate in plano repraesentatur.

§. 58. Constitutis in genere binis formulis pro dx et dy , quae sint

$$dx = p du + q dt \text{ et } dy = r du + s dt$$

primum efficiatur, vt omnes meridiani a parallelis normaliter traiciantur, id quod euenit si fuerit $\frac{s}{q} = -\frac{p}{r}$. Statuatur igitur $s = -np$ et $q = +nr$ vt habeamus

$$dx = p du + nr dt \text{ et } dy = r du - np dt.$$

Nunc igitur erit elementum $PQ = du \sqrt{pp + rr}$ et elementum Paralleli $PR = ndt \sqrt{pp + rr}$. Hinc igitur area rectanguli $PQRS$ erit $ndudt(pp + rr)$; in Sphaera autem area respondens $pqrs$ est $dudt \cos. u$, quae ergo formulae aequales sunt reddendae, vnde fit $n(pp + rr) = \cos. u$ ideoque $n = \frac{\cos. u}{pp + rr}$, quamobrem pro nostra Hypothesi habebimus has formulas:

$$dx = p du + \frac{r dt \cos. u}{pp + rr} \text{ et } dy = r du - \frac{p dt \cos. u}{pp + rr}.$$

Quaeri ergo oportet functiones idoneas pro p et r , vt ambae istae formulae fiant integrabiles.

§. 53. Quo hoc facilius effici possit statuamus

$$p = m \cos. \Phi \text{ et } r = m \sin. \Phi$$

vt fit $pp + rr = mm$ et habebimus

$$dx = m du \cos. \Phi + \frac{dt \cos. u \sin. \Phi}{m} \text{ et}$$

$$dy = m du \sin. \Phi - \frac{dt \cos. u \cos. \Phi}{m}.$$

Fiat porro $m = k \cos. u$ vt consequamur

$$dx = k du \cos. u \cos. \Phi + \frac{dt \sin. \Phi}{k} \text{ et}$$

$$dy = k du \cos. u \sin. \Phi - \frac{dt \cos. \Phi}{k}.$$

Faciamus denique $du \cos. u = dv$ ut sit $v = \sin. u$ critque
 $dx = k dv \cos. \Phi + \frac{dt \sin. \Phi}{k}$ et $dy = k dv \sin. \Phi - \frac{dt \cos. \Phi}{k}$
 vbi ergo valores idoneos pro k et Φ inuestigari oportet.

§. 54. Quoniam nullo adhuc modo patet, quomodo resolutionem generalem harum formularum institui conueniat, quaeramus solutiones particulares. Ac primo quidem statim se offert ea solutio huius casus, quam supra iam inuenimus (vid. §. 22.) vbi erat $x = t$ et $y = \sin. u$, qui valores prodeunt ex nostris formulis, si sumatur $k = 1$ et $\Phi = 90^\circ$; hincque patet, etiam generalius sumi posse tam pro k quam Φ quantitates, quascunque constantes. Sit igitur $k = a$ et $\Phi = \alpha$, vnde reperietur

$$x = av \cos. \alpha + \frac{t \sin. \alpha}{a} \text{ et } y = av \sin. \alpha - \frac{t \cos. \alpha}{a}.$$

Haec autem solutio ab illa hoc tantum differt, quod Meridiani non amplius sint ad nostrum axem EF normales sed sub angulo obliquo inclinantur, qui aequatur ipsi angulo $= \alpha$; Paralleli autem istos Meridianos normaliter traicient eruntque id circo pariter lineae rectae.

§. 55. Alias autem solutiones elicere poterimus, si pro altera quantitatum k et Φ tantum functionem ipsius v , pro altera autem ipsius t tantum sumamus. Sit igitur $k = T$ et $\Phi = V$, ut habeamus

$$dx = T dv \cos. V + \frac{dt}{T} \sin. V \text{ et}$$

$$dy = T dv \sin. V - \frac{dt}{T} \cos. V.$$

eliciuntur scilicet

$$x = T \int dv \cos. V = \sin. V \int \frac{dt}{T}$$

$$y = T \int dv \sin. V = -\cos. V \int \frac{dt}{T}.$$

Hos igitur valores aequales inter se reddi oportet.

§. 56. Ex binis valoribus ipsius x deducimus

$$\int \frac{dv \cos. V}{\sin. V} = \int \frac{dt}{T} : T = \alpha \text{ et ex valoribus ipsius } y$$

$$\int \frac{dv \sin. V}{\cos. V} = -\int \frac{dt}{T} : T = \beta$$

vnde pro functione t istae aequalitates prodeunt

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T \text{ et } \int \frac{dt}{T} = -\beta T$$

vbi statim patet esse debere $\beta = -\alpha$; tum vero differentiendo fit $\frac{dt}{T} = \alpha dT$ ideoque $T = \sqrt{\frac{t}{\alpha}}$. Pro V autem habebimus $\int dv \cos. V = \alpha \sin. V$ et $\int dv \sin. V = -\alpha \cos. V$; quae ambae differentiatæ praebeant $dv = \alpha dV$, ita vt sit $V = \frac{v}{\alpha}$, siue constantem adiiciendo $V = \frac{v+c}{\alpha}$.

§. 57. His iam valoribus inuentis ob

$$\int dv \cos. V = \alpha \sin. V = \alpha \sin. \frac{v+c}{\alpha} \text{ et}$$

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T = \sqrt{2\alpha t}$$

ambae coordinatae ita reperiuntur expressæ :

$$x = \sin. \frac{v+c}{\alpha} \sqrt{2\alpha t} \text{ et } y = -\cos. \frac{v+c}{\alpha} \sqrt{2\alpha t}.$$

Hinc statim colligimus $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2\alpha t}$; ex quo manifestum est, pro locis, quibus eadem longitudo t conuenit, ea sita fore in peripheria circuli cuius radius $= \sqrt{2\alpha t}$; quam ob rem in hac repraesentatione omnes Meridiani exprimentur per circulos concentricos, atque adeo Meridianus primus, vbi $t=0$, totus in centro circulorum coalescit; ex quo iam manifestum est, omnes circulos parallelos hic per radios circuli referri. Talis autem repraesentatio sine dubio maxime foret absurda, etiamsi conditiones praescriptas adimpleat.

§. 58. Sumatur nunc pro k functio ipsius v , quae sit V ; angulus vero Φ statuatur aequalis functioni ipsius t , quae sit T , et habebimus

$$dx = V dv \cos. T + \frac{dt \sin. T}{V} \text{ et } dy = V dv \sin. T - \frac{dt \cos. T}{V}$$

R 2

vnde

vnde bini valores pro x et y resultantes fiunt

$$x = \cos. T \int V dv + \frac{1}{V} \int dt \sin. T \quad \text{et} \quad y = \sin. T \int V dv - \frac{1}{V} \int dt \cos. T.$$

Ex his igitur valoribus sequentes statuuntur aequalitates

$$V \int V dv = \int \frac{dt \sin. T}{\cos. T} = \alpha \quad \text{et} \quad -V \int V dv = \int \frac{dt \cos. T}{\sin. T}.$$

Ex valoribus ipsius V statim fit $\beta = \alpha$; tum vero differentiando fit $V dv = -\frac{\alpha dV}{V^2}$, vnde fit $dv = -\frac{\alpha dV}{V^3}$ et integrando $v + c = \frac{\alpha}{2V^2}$, hincque $V = \sqrt{\frac{\alpha}{2(v+c)}}$. Pro functione T autem erit

$$\int dt \sin. T = \alpha \cos. T \quad \text{et} \quad -\int dt \cos. T = \alpha \sin. T$$

ex quarum differentiatione sequitur $dT = -\frac{dt}{\alpha}$ ergo $T = -\frac{t}{\alpha}$.

§. 59. His valoribus inuentis ob $\int V dv = \sqrt{2\alpha(v+c)}$, erit $x = \sqrt{2\alpha(v+c)} \cos. \frac{t}{\alpha}$ et $y = -\sqrt{2\alpha(v+c)} \sin. \frac{t}{\alpha}$. Hinc fit primo $\frac{y}{x} = -\tan. \frac{t}{\alpha}$ et $xx + yy = 2\alpha(v+c)$. Ex prior formula patet, pro eadem longitudine t omnes Meridianos per rectas ex puncto fixo tanquam radios eductas repraesentari: ex altera autem patet, omnes Parallelos per circulos concentricos expressum iri. Hoc igitur modo hemisphaeria Terrae perquam apte per circulos repraesentari poterunt, dum polus in centro existit; ubi adeo figura cuiusque regionis non multum a veritate abludet, quam ob causam facile erit veram cuiusque regionis magnitudinem dimetiri.

§. 60. In his autem tribus Hypothesibus omnia continentur, quae circa repraesentationes tam geographicas quam hydrographicas desiderari solent; atque adeo secunda Hypothesis supra tractata omnes plane modos possibiles in se complectitur. Ob summam autem vniuersalitatem minus facile est methodos vsu receptas ex formulis nostris generalibus elicere. Neque vero institutum praesens permittit vt huic negotio immoremur, praecipue cum consuetae projectiones ab aliis iam abunde sint explicatae.

DE PROIECTIONE GEOGRAPHICA SUPERFICIEI SPHAERICAE.

Auctore
L. EVLERO.

§. I.

Cum in superiori dissertatione omnes plane modos possibiles expendissem, quibus superficies sphaerica in plano ita repraesentari potest, ut singulae portiones minimae per figuras similes exhibeantur: inde quidem statim mapparum hydrographicarum *Mercatoris* constructio pariter atque Hemisphaeriarum polarium se prodebat; quemadmodum autem ambo Hemisphaeria, superius scilicet et inferius, uti quidem hodie construuntur cum meis formulis cohaereant, vix patebat, cum tamen ista repraesentatio eadem proprietate sit praedita. Hanc obrem accuratius inquirere constitui, quomodo etiam hic repraesentandi modus cum formulis generalibus ibi datis egregie consentiat, ex iisque luculenter deriuari queat.

§. 2. Formulae autem generales, quas pro huiusmodi constructionibus erueram ita se habent, ut si loci cuiuspiam in Sphaera distantia a polo fuerit $=v$ eiusque longitudo a certo Meridiano fixe computata $=t$, id punctum in plano per binas coordinatas orthogonales x et y ita determinari debeat, ut sit

$$x = \Delta : (l(\cot. \frac{1}{2}v + tV - 1)) + \Delta : (l(\cot. \frac{1}{2}v - tV - 1))$$

$$yV - 1 = \Delta : (l(\cot. \frac{1}{2}v + tV - 1)) - \Delta : (l(\cot. \frac{1}{2}v - tV - 1))$$

quas formulas quoque ita exhibere licet, ut sit

$$x = \Delta (\cot. \frac{1}{2}v (\cos. t + V - 1 \sin. t) + \Delta (\cot. \frac{1}{2}v (\cos. t - V - 1 \sin. t))$$

et cum sit

$$\frac{1}{\cot. \frac{1}{2}v (\cos. t + V - 1 \sin. t)} = \tan. \frac{1}{2}v (\cos. t + V - 1 \sin. t)$$

haec formulae etiam ita exhiberi possunt:

$$x = \Delta : (\tan. \frac{1}{2}v (\cos. t + V - 1 \sin. t)) + \Delta : (\tan. \frac{1}{2}v (\cos. t - V - 1 \sin. t))$$

$$yV - 1 = \Delta : (\tan. \frac{1}{2}v (\cos. t + V - 1 \sin. t)) - \Delta : (\tan. \frac{1}{2}v (\cos. t - V - 1 \sin. t))$$

vbi manifestum est, ex prioribus formulis, si character indefinitus functionis Δ omittatur, priores formulas praeberet mapas hydrographicas, postremas vero constructionem Haemisphaerii siue borealis siue australis.

Tab. I.
Fig. 5.

§. 3. Quo nunc facilius appareat, quomodo etiam reliquae projectiones eidem principio innixae ex nostris formulis deduci queant, rationem istius projectionis, quae vulgo stereographica vocari solet hic accuratius euoluam. Hoc autem modo superficies Sphaerae in planum Sphaeram tangens ita proieci solet, quemadmodum a spectatore in puncto contactui opposito constituto secundum regulas Perspectivae cerneretur. Referat igitur circulus AMC Sphaeram, recta autem EF planum, quod Sphaeram in puncto C tangat; tum vero A sit punctum ipsi C oppositum in quo spectator sit constitutus. Iam sumto in Sphaera puncto quocunque M , si per id ex A producaturs recta AMS , rectae EF occurrens in puncto F , erit S projectio puncti M . Hinc si radius sphaerae ponatur $= 1$, ut sit diameter $AC = 2$, arcus vero CM statuatur $= z$, erit angulus $CAM = \frac{1}{2}z$, unde fit intervallum

$$CS = 2 \tan \frac{1}{2} z = \frac{2 \sin z}{1 + \cos z} = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos z}{1 - \cos z}}$$

§. 4. Si ad AC ex M ducatur normalis MP erit $MP = \sin z$, ac si circulus circa axem AC conuerti concipiaturs, punctum M describet circulum plano tangenti parallelum, cuius radius $= MP = \sin z$, qui ergo super plano itidem circulo referetur, cuius radius $= CS = \tan \frac{1}{2} z$, ita ut radius istius circuli in sphaera se habeat ad radium projectionis, ut PM ad CS , hoc est ut $AP:AC$ vel ut AM ad AS . Anguli autem in circulo sphaerae radio CM descripto aequales erunt angulis in projectione super plano.

§. 5. Nunc in sphaera concipiamus punctum m , ipsi M proximum, cui in projectione respondeat punctum s , ita ut
elemen-

elementum Mm exprimitur per spatium Ss , et quaeramus rationem inter haec duo elementa Mm et Ss . Ac primo quidem patet fore angulum $ASC = 90^\circ - \frac{1}{2}z = AsC$. At vero anguli AMm mensura est semissis arcus AM , unde erit angulus $AMm = 90^\circ - \frac{1}{2}z$ ideoque aequalis angulo AsC ; unde sequitur triangulum $AMm \sim$ triangulo AsS , unde erit $Mm:Ss = AM:AS$ hoc est $= AP:AC$; quae ergo ratio conuenit cum ea, quam inuenimus inter circulum in sphaera radio PM descriptum et circulum in plano radio CS descriptum; quamobrem haec ratio etiam aequalis erit ei, quam elementa similia in duobus his circulis inter se tenent. Atque hinc manifestum est, si in sphaera portio infinite parua circa elementum Mm descripta concipiatur, eius projectionem ipsi fore similem, ita ut haec projectio eidem legi sit adstricta, ex qua meas formulis generales elicueram.

§. 6. Referat ut ante circulus AGC sphaeram, cuius superficies proiicienda sit in planum EF , quod sphaeram in puncto C tangat, ac statuamus nunc alterum Terrae polum existere in puncto G . Vocemus arcum $CG = g$ et per praecedentia iste polum in plano exhibebitur in puncto H , ut sit $GH = 2 \text{ tag. } \frac{1}{2}g$. Iam vero consideremus punctum sphaerae quodcunque in M cuius distantia a polo sit $GM = v$, angulus vero $CGM = t$, qui ergo denotabit longitudinem loci M in Meridiano GC , atque ad triangulum sphaericum complendum ducatur arcus CM ; quo facto, si in projectione S sit punctum loco M respondens, erit $CS = 2 \text{ tag. } \frac{1}{2}CM$, angulus vero $ECS =$ angulo GCM . Ad locum igitur huius puncti S definiendum in triangulo sphaerico GCM quaeri oportet tam latus CM quam angulus GCM .

Tab. I.
Fig. 6.

§. 7. In triangulo autem sphaerico CGM dantur duo latera $CG = g$ et $GM = v$ cum angulo intercepto $CGM = t$, unde per regulas Trigonometriae sphaericae reperitur

$$\cos. CM = \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t$$

unde

unde cum sit

$$CS = 2 \operatorname{tag} \frac{1}{2} C M = \frac{2 \sin. C M}{1 + \cos. C M} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos. C M}{1 + \cos. C M}}$$

ex postrema formulâ statim habemus

$$CS = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos. g \cos. v - \sin. g \sin. v \cos. t}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t}}$$

Praeterea vero reperitur $\operatorname{tag} G C M = \frac{\sin. v \sin. t}{\cos. v \sin. g - \sin. v \cos. g \cos. t}$,
quae ergo formula simul exprimit in projectione tangentem
anguli E C S.

§. 8. Nunc in projectione ex puncto S ad rectam fixam
E F, quippe in quam cadit polus H, ducamus perpendicularum
S X, ac vocemus coordinatas $C X = x$ et $X S = y$; et cum sit

$$CS = \frac{2 \sin. C M}{1 + \cos. C M} \text{ erit } x = \frac{2 \sin. C M \cos. G C M}{1 + \cos. C M} \text{ et } y = \frac{2 \sin. C M \sin. G C M}{1 + \cos. C M},$$

unde patet fore

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tag} G C M = \frac{\sin. v \sin. t}{\cos. v \sin. g - \cos. g \sin. v \cos. t}$$

Praeterea vero ex iam inuentis erit

$$x x + y y = C S^2 = \frac{4 (1 - \cos. g \cos. v - \sin. g \sin. v \cos. t)}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t}$$

ex quibus duabus aequationibus ambas coordinatas x et y
seorsim definire licebit.

§. 9. Facilius autem earum valores directe sequenti
modo reperire licebit. Cum sit

$$\sin. t : \sin. C M = \sin. G C M : \sin. v \text{ erit}$$

$$\sin. C M \cdot \sin. G C M = \sin. t \sin. v,$$

quo valore introducto fiet

$$\operatorname{tag} G C M = \frac{\sin. C M \cdot \sin. G C M}{\sin. g \cos. v - \cos. g \sin. v \cos. t} = \frac{\sin. G C M}{\cos. G C M}$$

unde fit $\sin. C M \cos. G C M = \sin. g \cos. v - \cos. g \sin. v \cos. t$

ex quibus valoribus statim colligimus

$$x = \frac{2 (\sin. g \cos. v - \cos. g \sin. v \cos. t)}{1 + \cos. C M} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t \sin. v}{1 + \cos. C M}.$$

Quia igitur inuenimus $\cos. C M = \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t$
binas coordinatas x et y ita habebimus expressas

$$x = \frac{2 (\sin. g \cos. v - \cos. g \sin. v \cos. t)}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t \sin. v}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t}$$

§. 10.

§. 10. Quod si ergo hic ponamus $v = 0$, locus poli H in projectione prodire debet; tum autem reperietur

$$x = \frac{2 \sin. g}{1 + \cos. g} = 2 \operatorname{tag}. \frac{1}{2} g = CH.$$

At vero fit $y = 0$. Hinc igitur etiam locum alterius poli in projectione assignare poterimus, ponendo $v = 180^\circ$; tum autem reperietur $x = -\frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g}$ et $y = 0$. Vnde si ex altera parte alter polus statuatur in K, erit intervallum

$$CK = \frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g} = 2 \cot. \frac{1}{2} g.$$

Tum vero si capiamus $CE = CF = 2$, erit EF diameter circuli, quo referetur Hemisphaerium totum circa centrum C descriptum, cuius ergo diameter erit $EF = 4$, hoc est duplo maior quam diameter sphaerae.

§. 11. Ut nunc in hac projectione Aequatorem designemus, sumamus $v = 90^\circ$, atque x et y fient coordinatae Aequatoris in projectione; tum autem erit

$$x = -\frac{2 \cos. g}{1 + \sin. g \cos. t} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t}{1 + \sin. g \cos. t}.$$

Supra autem iam vidimus esse $xx + yy = \frac{4(1 - \sin. g \cos. t)}{1 + \sin. g \cos. t}$, hinc concludimus fore

$$\frac{x}{xx + yy} = -\frac{\cos. g \cos. t}{2(1 - \sin. g \cos. t)}, \text{ vnde fit } \cos. t = \frac{2x}{2x \sin. g - (xx + yy) \cos. g}$$

qui valor substitutus in aequatione pro x praebet

$$4x \sin. g - (xx + yy) \cos. g = -4 \cos. g$$

vnde fit $xx + yy = \frac{4(\sin. g + \cos. g)}{\cos. g}$, vnde colligimus hanc aequationem: $yy + (2 \operatorname{tag}. g - x)^2 = \frac{4}{\cos. g^2}$. Hinc patet, Aequatorem in projectione fore circulum radio $= \frac{2}{\cos. g}$ descriptum.

Ad centrum autem huius circuli inveniendum capiatur intervallum $CI = 2 \operatorname{tag}. g$, ut fiat $IX = 2 \operatorname{tag}. g - x$, et cum fieri debeat $XS^2 + IX^2 = \frac{4}{\cos. g^2}$, patet fore $IS = \frac{2}{\cos. g}$ hoc est quantitati constanti. Erit ergo hoc ipsum punctum I centrum circuli Aequatorem referentis, existente $CI = 2 \operatorname{tag}. g$. Quare ex

Tab. I.
Fig. 6.

C erigatur perpendicularum $CD = 2$, et cum hinc fiat recta $ID = \frac{2}{\cos g}$, patet Aequatorem descriptum iri, si ex centro I et radio ID circulus delineetur.

§. 12. Definiamus nunc quoque omnes circulos Aequatori parallelos in nostra projectione, atque ut calculos taediosos euitemus statuamus breuitatis gratia $a = 2 \sin. g \cos. \alpha$, $b = 2 \cos. g \sin. \alpha$, $c = 1 + \cos. g \cos. \alpha$ et $d = \sin. g \sin. \alpha$ et $e = 1 - 4 \cos. g \cos. \alpha$, ubi α scripsimus loco v , ut distantia Paralleli a polo sit $= \alpha$, quo facto nostrae aequationes ita se habebunt: $x = \frac{a - b \cos. t}{c + d \cos. t}$ et $xx + yy = \frac{e + 4 \cos. t}{c + d \cos. t}$, ex quarum priore colligitur $\cos. t = \frac{a - cx}{b + dx}$, qui valor in altera substitutus praebet $xx + yy = \frac{d(e + 4c)x + bc - 4ad}{bc + ad}$. Restitutis vero valoribus assumtis erit $xx + yy = \frac{4(\sin. g + \cos. g - \cos. \alpha)}{\cos. g + \cos. \alpha}$, quae aequatio reducta ad hanc formam

$$yy + \left(\frac{2 \sin. g}{\cos. g + \cos. \alpha} - x \right)^2 = \frac{4 \sin. \alpha^2}{(\cos. g + \cos. \alpha)^2}$$

monstrat, projectionem Paralleli propositi esse circulum, cuius radius $= \frac{2 \sin. \alpha}{\cos. g + \cos. \alpha}$, centrum autem in ipso axe EF esse situm puta in puncto L ita ut sit $CL = \frac{2 \sin. g}{\cos. g + \cos. \alpha}$.

§. 13. Inuestigemus nunc etiam projectionem omnium
 Tab. I. Meridianorum; ac primo quidem cum sumto $t = c$ ipsa recta
 Fig. 6. HK referet Meridianum principalem, a quo reliquos compute-
 mus, ponamus declinationem Meridiani quaesiti ab hoc prin-
 cipali esse $= \beta$, ut sit $t = \beta$, et aequationes nostrae erunt

$$x = \frac{2(\sin. g \cos. v - \cos. \beta \cos. g \sin. v)}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v}$$

$$y = \frac{2 \sin. \beta \sin. v}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v} \text{ et}$$

$$xx + yy = \frac{4(1 - \cos. g \cos. v - \cos. \beta \sin. g \sin. v)}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v}$$

ex quibus aequationibus quantitatem v eliminare oportet. Hunc in finem consideremus formulam

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin. \beta \sin. v}{\sin. g \cos. v - \cos. \beta \cos. g \sin. v} = \frac{\sin. \beta \tan. v}{\sin. g - \cos. \beta \cos. g \tan. v}$$

ex qua colligitur $\tan. v = \frac{y \sin. g}{y \cos. \beta \cos. g + x \tan. \beta}$.

§. 14. Quo nunc facilius hoc valore in reliquis aequationibus vti queamus, formemus hanc aequationem:

$$4 - x x - y y = \frac{4 \cos. g \cos. v + 4 \cos. \beta \sin. g \sin. v}{1 + \cos. g \cos. v + \cos. \beta \sin. g \sin. v}$$

quae per y diuifa praebet

$$\frac{4 - x x - y y}{y} = \frac{4 \cos. g \cos. v + 4 \cos. \beta \sin. g \sin. v}{\sin. \beta \sin. v} = \frac{4 \cos. g + 4 \cos. \beta \sin. g \tan. v}{\sin. \beta \tan. v}$$

in qua loco $\tan. v$ valorem ante inuentum scribamus, vnde fiet

$$\frac{4 - x x - y y}{y} = \frac{4 y \cos. \beta + 4 x \sin. \beta \cos. g}{y \sin. \beta \sin. g}$$

ex qua deducimus

$$x x + y y = 4 - \frac{4 y \cos. \beta + 4 x \sin. \beta \cos. g}{\sin. \beta \sin. g}$$

quae aequatio itidem est pro circulo; vnde tuto concludere possumus, omnes circulos maximos in sphaera ductos etiam per arcus circulares exprimi, vel adeo per lineas rectas.

§. 15. Quo nunc tam centrum quam radium cuiusque Meridiani pro nostra projectione assignemus, aequationem inuentam in hanc formam transfundamus:

Tab. I.
Fig. 8.

$$\left(\frac{2 \cos. g}{\sin. \beta} + x \right)^2 + \left(\frac{2 \cos. \beta}{\sin. \beta \sin. g} + y \right)^2 = \frac{4}{\sin. \beta^2 \sin. g^2}.$$

Sint igitur puncta H et K poli in projectione, ita vt fit

$$CH = 2 \tan. \frac{1}{2} g = \frac{2 \sin. g}{1 + \cos. g} \quad \text{et} \quad CK = 2 \cot. \frac{1}{2} g = \frac{2 \sin. g}{1 - \cos. g}$$

ideoque totum interuallum HK = $\frac{4}{\sin. g}$ eiusque semissis = $\frac{2}{\sin. g}$ quod medium in punctum O incidat, eritque CO = $\frac{2 \cos. g}{\sin. g}$; hinc sumto CX = x erit OX = $\frac{2 \cos. g}{\sin. g} + x$. Ex O erigatur perpendiculum = $\frac{2 \sin. \beta}{\sin. \beta \sin. g}$, sumtaque XL ipsi ON aequali erit LS = $\frac{2 \cos. \beta}{\sin. \beta \sin. g} + y$, quocirca esse oportet OX² (siue LN²) + LS² = NS² = $\frac{4}{\sin. \beta^2 \sin. g^2}$, ideoque NS = $\frac{2}{\sin. \beta \sin. g}$. Vnde patet, punctum N esse centrum Meridiani describendi, radium vero = $\frac{2}{\sin. \beta \sin. g}$, qui radius praecise aequalis erit rectae NH, quod egregie cum natura rei conuenit; quandoquidem omnes Meridiani etiam in projectione per polos N et H transire debent.

Comparatio huius projectionis cum formulis generalibus.

§. 16. Hic igitur quaeritur, cuius modi forma functioni Δ tribui debeat, ut projectio modo descripta inde sequatur. Ac primo patet, potestates prima altiores in ea occurrere non posse, quia alioquin multipla angulorum t et v ingrederentur; deinde vero haec functio debet esse fractio, quoniam formulae pro x et y inventae sunt fractiones. Hanc ob causam functioni Δ talem formam generalem tribuamus $\frac{a+bz}{c+dz}$: at vero pro z sumamus formam postremam supra expositam, quae erat $z = \tan \frac{1}{2} v (\cos t \pm \sqrt{V} - 1 \sin t)$ ita ut nostra functio euadat

$$\frac{a + b \tan \frac{1}{2} v (\cos t + \sqrt{V} - 1 \sin t)}{c + d \tan \frac{1}{2} v (\cos t + \sqrt{V} - 1 \sin t)}$$

quae, loco $\tan \frac{1}{2} v$ scribendo $\frac{\sin v}{1 + \cos v}$ inducet hanc formam:

$$\frac{a(1 + \cos v) + b \sin v (\cos t + \sqrt{V} - 1 \sin t)}{c(1 + \cos v) + d \sin v (\cos t + \sqrt{V} - 1 \sin t)}$$

§. 17. Pro calculi commodo loco huius formae utamur hac concinniore: $\frac{P + Q\sqrt{V} - 1}{R + S\sqrt{V} - 1}$ ut sit

$$P = a(1 + \cos v) + b \sin v \cos t; \quad Q = b \sin v \sin t$$

$$R = c(1 + \cos v) + d \sin v \cos t; \quad S = d \sin v \sin t$$

Hinc autem coordinatae x et y ita prodibunt determinatae:

$$x = \frac{P + Q\sqrt{V} - 1}{R + S\sqrt{V} - 1} + \frac{P - Q\sqrt{V} - 1}{R - S\sqrt{V} - 1} \quad \text{et}$$

$$y\sqrt{V} - 1 = \frac{P + Q\sqrt{V} - 1}{R + S\sqrt{V} - 1} - \frac{P - Q\sqrt{V} - 1}{R - S\sqrt{V} - 1}$$

vnde colligimus

$$x = \frac{2PR + 2QS}{RR + SS} \quad \text{et} \quad y = \frac{2OR - 2PS}{RR + SS}$$

§. 18. Quod si iam loco P, Q, R, S valores assumptos restituamus, pro denominatore communi reperiemus

$$\begin{aligned} RR + SS &= cc(1 + \cos v)^2 + 2cd(1 + \cos v) \sin v \cos t + dd \sin^2 v \\ &= (1 + \cos v)(cc(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + dd(1 - \cos v)). \end{aligned}$$

Tum

Tum vero pro numeratore ipsius x fiet

$$PR + QS = (1 + \cos. v)(ac(1 + \cos. v) + (bc + ad) \sin. v \cos. t + bd(1 - \cos. v)).$$

denique pro numeratore ipsius y

$$QR - PS = (1 + \cos. v)(bc - ad) \sin. v \sin. t$$

sicque pro coordinatis nanciscimur has expressiones :

$$x = \frac{2ac(1 + \cos. v) + 2(bc + ad) \sin. v \cos. t + bd(1 - \cos. v)}{cc(1 + \cos. v) + 2cd \sin. v \cos. t + da(1 - \cos. v)}$$

$$y = \frac{2(bc - ad) \sin. v \sin. t}{cc(1 + \cos. v) + 2cd \sin. v \cos. t + da(1 - \cos. v)}$$

§. 19. Quod si iam has formulas cum iis comparemus , quas supra inuenimus , quae erant

$$x = \frac{2 \sin. g \cos. v - 2 \cos. g \sin. v \cos. t}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t} \text{ et } y = \frac{2 \sin. t \sin. v}{1 + \cos. g \cos. v + \sin. g \sin. v \cos. t}$$

egregium iam consensum deprehendimus : at facile erit constantes a, b, c, d ita assumere, vt consensus fiat perfectus. Primo igitur vt denominatorem ad identitatem perducamus , requiritur , vt fit $cc + dd = 1$, $cc - dd = \cos. g$ et $2cd = \sin. g$. Ex duabus prioribus fit

$$cc = \frac{1 + \cos. g}{2} = \cos. \frac{1}{2} g^2 \text{ et } dd = \frac{1 - \cos. g}{2} = \sin. \frac{1}{2} g^2$$

vnde fit $c = \cos. \frac{1}{2} g$ et $d = \sin. \frac{1}{2} g$, quibus valoribus iam tertiae conditioni satisfit ; fiet enim

$$2cd = 2 \sin. \frac{1}{2} g \cos. \frac{1}{2} g = \sin. g.$$

Pro numeratore ipsius x perfectus consensus postulat, vt fiat

$$ac + bd = 0, \quad ac - bd = \sin. g, \quad bc + ad = -\cos. g$$

vbi si loco c et d valores modo inuentos scribamus, fiet

$$a \cos. \frac{1}{2} g + b \sin. \frac{1}{2} g = 0, \quad a \cos. \frac{1}{2} g - b \sin. \frac{1}{2} g = \sin. g, \\ b \cos. \frac{1}{2} g + a \sin. \frac{1}{2} g = -\cos. g.$$

Ex binis prioribus fit

$$a = \frac{\sin. g}{2 \cos. \frac{1}{2} g} = \sin. \frac{1}{2} g, \text{ porro } b = -\frac{2 \sin. g}{2 \sin. \frac{1}{2} g} = -\cos. \frac{1}{2} g$$

hisque valoribus etiam tertiae conditioni sponte satisfit. Tantum

igitur superest, vt etiam videamus, an isti valores cum nume-
ratore ipsius y conueniant, quo requiritur, vt sit $bc - ad = 1$;
est vero $bc = -\cos. \frac{1}{2}g^2$ et $ad = \sin. \frac{1}{2}g^2$ vnde fit $bc - ad = -1$.
Probe autem notandum est, ambas coordinatas tam positue
quam negatiue sumi posse, ita vt hic perfecta identitas agnosci
debeat.

§. 20. His valoribus inuentis manifestum est, formulas
nostras generales perducturas fuisse ad hanc proiectionem ste-
reographicam, si pro functione $\Delta : z$ assumissemus statim hanc
formam :

$$\frac{\sin. \frac{1}{2}g - z \cos. \frac{1}{2}g}{\cos. \frac{1}{2}g + z \sin. \frac{1}{2}g} \quad \text{siue} \quad \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}g - z}{1 + z \text{tang.} \frac{1}{2}g}.$$

Ceterum hic obseruari conueniet, istum casum ad vsus practi-
cos, quos in Geographia postulamus maxime esse accommoda-
tum, quandoquidem veram figuram regionum terrestrium non
admodum detorquet. Imprimis autem notari meretur, quod
in hac proiectione non solum omnes Meridiani et Paralleli
circulis vel adeo lineis rectis exhibeantur, sed etiam omnes cir-
culi maximi in Sphaera descripti etiam per arcus circulares vel
adeo lineas rectas exprimantur, dum e contrario aliae Hypo-
theses, quae pro functione Δ fingi possent, his commodis pe-
nitus essent cariturae.

DE

PROIECTIONE GEOGRAPHICA

DE LISLIANA

IN MAPPA GENERALI IMPERII RVSSICI VSITATA.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum olim deliberaretur, quam projectionis ratione in construenda mappa generali Imperii Russici esset utendum, primo quidem statim se obtulit projectio Stereographica, qua ambo Hemisphaeria terrestria, superius scilicet et inferius, repraesentari solent; quoniam hoc modo non solum omnes circuli parallali a Meridianis normaliter traicerentur, sed etiam omnes exiguae portiones ad similitudinem in superficie sphaerica exhiberentur. Atque hac projectionis ratione tum temporis etiam usus est Geographus praestantissimus et Professor Wittenbergensis *Hafius* in mappa generali huius Imperii exaranda.

§. 2. Verum in hac projectione mox duo insignia incommoda sunt observata, quae scopo proposito maxime aduersabantur. Primo enim in Meridiano medio gradus latitudinis nimis sunt inaequales, dum prope Aequatorem duplo sunt minores quam circa polos; unde hoc ingens incommodum nascebatur, ut pro regionibus circa oras huius mappae sitis scala milliarium multo maior euadat quam pro regionibus in medio mappae exhibitis, unde mappam aspicienti Prouincia verbi gratia Kamtschatka fere quadruplo maior esset apparitura, quam Prouincia eiusdem magnitudinis in medio eiusdem mappae reprae-

praesentata. In constructione autem talis mappae id ante omnia necessarium videbatur, ut regiones eiusdem magnitudinis etiam pari quantitate exprimerentur, in quocunque mappae loco fuerint collocandae.

§. 3. Alterum autem incommodum in eo deprehendebatur, quod in hac projectione Meridiani a medio versus oras progrediendo continuo magis incurvantur, atque adeo extremi per semicirculos referrentur. Ita v. gr. in Provincia Kamtschatka omnes Meridiani forent arcus circulares satis notabiliter incurvati; unde si quis hanc portionem ex mappa generali excinderet, aut delinearet, ut chartam specialem istius Provinciae adipisceretur, ea maxime incongrua, et legibus, quae in construendis chartis geographicis observari solent maximi foret contraria. Id autem potissimum erat propositum, ut ex mappa generali omnes mappae speciales sola delineatione sine ulla ulteriori reductione describi possent et formam usu receptam obtinerent.

§. 4. Repudiata igitur hac projectionis ratione examini subiiciebatur ea ratio, qua Hemisphaeria polaria vulgo repraesentari solent; verum, quanquam hic omnes Meridiani per lineas rectas in polo concurrentes exprimuntur, quo pacto alterum incommodum evitaretur: tamen, quia in omnibus Meridianis singuli gradus latitudinis nimis sunt inter se inaequales, dum circa polos duplo sunt minores quam prope Aequatorem, etiam haec projectio reiicienda est visa; quandoquidem hoc imprimis postulabatur, ut per totam mappam ubique eadem scala milliarium locum habere et vera magnitudo singularum Provinciarum ex aspectu chartae geographicae rite diiudicari posset.

§. 5. De alia igitur projectionis ratione erat cogitandum, quae primo omnes Meridianos per lineas rectas exhiberet, in quibus etiam omnes gradus latitudinis eandem quantitatem obtinerent; tum vero ut omnes Paralleli Meridianos ad angulos rectos traicerent. Quoniam vero hoc modo neutiquam fieri

feri potest, ut ubique gradus Parallelorum ad gradus Meridianorum iustam teneant rationem, quae scilicet in superficie sphaerica deprehenditur, consultum visum est, ab ista ratione potius aliquantillum aberrare, quam memoratis commodis renunciare. Hinc igitur sequens quaestio maximi momenti est nata: quomodo Meridiani cum Parallelis constitui debeant, ut a vera ratione, quam gradus longitudinis et latitudinis in Sphaera inter se tenent, per totam mappae extensionem quam minime aberraret? ita scilicet, ut errores vix percipi possent, quandoquidem talis aberratio facile condonari poterit, si modo memorata commoda obtineantur.

§. 6. Huic requisito celeberrimus tum temporis Astronomus et Geographus *Delisle*, cui cura talis mappae generalis primum erat demandata, ita satisfacere est annisus, ut pro duobus Parallelis notabilioribus iustam proportionem inter gradus longitudinis et latitudinis stabiliret, qui si paribus intervallis tam a Parallelo medio totius mappae quam ab extremis distarent, iudicavit, aberrationem nusquam notabilem esse posse. Hic igitur quaeritur, quinam bini paralleli in hunc finem eligi debeant, ut etiam maximi errores inde oriundi fiant omnium minimi.

§. 7. Sit igitur *AB* portio Meridiani cuiusque per Imperium Russicum transeuntis, cuius terminus maxime meridionalis sit in *A*, borealis vero in *B*, ac ponatur latitudo in *A* = *a*, in *B* vero = *b*, ita ut propemodum sit $a = 40^\circ$ et $b = 70^\circ$; tum vero designet δ quantitatem unius gradus in omnibus Meridianis. Sint porro puncta *P* et *Q* ea loca, ubi gradus longitudinis ad gradus latitudinis iustam tenere debeant rationem, ac ponatur pro puncto *P* latitudo = *p*, pro loco *Q* vero latitudo = *q*. Quoniam ergo gradus cuiusque Paralleli in sphaera se habent ad gradus Meridiani, ut cosinus latitudinis ad sinum totum, pro loco *P* sumi debet gradus longitudinis $Pp = \delta \cos. p$ et pro loco *Q* unus gradus longitudinis $Qq = \delta \cos. q$,
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. T quae

Tab. II.
Fig. 1.

quae lineolae Pp et Qq , etsi sunt arcus circulares, hic tanquam rectae ad Meridianum AB normales spectari poterunt.

§. 8. Ducatur nunc per puncta p et q recta pq O Meridiano principali AB producto occurrens in O , atque haec recta Oqp referet proximum Meridianum a principali vno gradu secundum longitudinem remotum: eodemque modo ex puncto O omnes reliqui Meridiani facile educi poterunt. Pro puncto autem concursus O inueniendo fiat $Pp - Qq : PQ = Pp : PO$; hoc est: $\delta(\cos.p - \cos.q) : q - p = \delta \cos.p : PO$, vnde fit $PO = \frac{(q-p) \cdot \cos.p}{\cos.p - \cos.q}$. Ita si sumatur $p = 50^\circ$ et $q = 60^\circ$, reperietur intervallum $PO = 45^\circ. 1'$. Quoniam igitur punctum P ab Aequatore distat 50° , puncti O distantia ab Aequatore erit $95^\circ. 1'$, ideoque ultra polum Terrae cadet ad distantiam $5^\circ. 1'$.

§. 9. Quoniam igitur istud punctum O , ex quo omnes Meridiani educuntur, diuersum prodiit a vero polo terrestri, vnde in Sphaera omnes Meridiani egrediuntur, hinc vtique in regionibus polo proximis maxime absurda repraesentatio nasceretur. Verum quia in mappa generali Imperii Russici nulla loca ultra 70^{um} . gradum latitudinis exhiberi assumuntur, dummodo pro hac latitudine error non prodeat enormis, illa aberratio facile tolerari poterit. Inuento autem hoc puncto O , primum ex eo describatur intervallo OP circulus, cuius peripheria diuidatur in partes $= \delta \cos.p$ vniquippe gradui huius paralleli aequalibus, et rectae ex illo puncto O per singula diuisionum puncta ductae dabunt omnes Meridianos in mappa duccendos. Atque hoc modo omnes circuli ex centro O per singulos gradus Meridiani descripti dabunt omnes circulos parallelos in mappa constituendos, qui ita erunt comparati, vt pro binis latitudinibus p et q eorum gradus longitudinis ad gradus latitudinis veram teneant rationem. Hoc igitur modo rete pro tali mappa generali facile constructur, quo facto inscriptio omnium Prouinciarum nulla amplius laborabit difficultate.

§. 10. Nunc ante omnia videamus, quantopere haec repraesentatio in terminis mappae extremis A et B a veritate sit recessura. Sit igitur Aa vnus gradus Paralleli pro termino A, et Bb talis gradus pro termino B, qui reuera esse deberent $\delta \cos. a$ et $\delta \cos. b$. Vt iam horum graduum quantitatem in mappa inuestigemus, quaeramus primo angulum POp vni gradui respondentem, qui erit

$$= \frac{Pp}{PO} = \frac{\delta (\cos. p - \cos. q)}{q - p} = \frac{\cos. p - \cos. q}{q - p} \text{ ob } \delta = 1^\circ.$$

Hunc igitur angulum breu. gr. ponamus $= \omega$, vt sit $\omega = \frac{\delta (\cos. p - \cos. q)}{q - p}$. Hinc igitur, si vt supra sumamus $p = 50^\circ$ et $q = 60^\circ$, iste angulus POp fiet $\omega = 49'.6''$. In hoc autem calculo probe obseruandum est, interuallum $q - p$ non in gradibus, sed partibus radii exprimi debere, vbi notetur, quantitatem vnus gradus esse 0,01745329. Hinc igitur patet, angulos ω , qui ad punctum O singulos gradus longitudinis referunt, aliquanto minores esse vno gradu,

§. 11. Hic autem, rem in genere spectantes, statuamus istum angulum vni gradui respondentem $= \omega$, vt sit $\omega = \frac{\delta (\cos. p - \cos. q)}{q - p}$, vbi notetur, quia hic litterae p et q in gradibus exprimuntur, interuallum $q - p$ multiplicari debere per 0,01745329, cuius loco breuitates gratia scribamus α , ita vt sit $\omega = \frac{\delta (\cos. p - \cos. q)}{\alpha (q - p)}$, vbi loco δ scribi potest 1° , siquidem angulum ω etiam in gradibus desideramus. Praeterea ponamus distantiam puncti O vltra polum $= z$ gradibus. Quoniam igitur loci P distantia a polo est $90^\circ - p$, eius distantia a puncto O erit $90^\circ - p + z$, cuius valor in partibus radii erit $\alpha (90^\circ - p + z)$. Hoc autem interuallum ante inuentum est $= PO = \frac{(q - p) \cos. p}{\cos. p - \cos. q}$, quod, quia in gradibus exprimitur, aequari debet angulo $90^\circ - p + z$, ita vt hinc fiat $z = \frac{(q - p) \cos. p}{\cos. p - \cos. q} - 90^\circ + p$.

§. 12. His positis quia distantia termini A a polo est $90^\circ - a$, erit interuallum AO $= 90^\circ - a + z$ et in partibus

radii $= a(90^\circ - a + z)$, quod per ω multiplicatum dabit gradum Aa , cuius ergo quantitas erit $\frac{\delta(90^\circ - a + z)(\cos p - \cos q)}{q - p}$, qui gradus cum reuera esse debebat $= \delta \cos a$, differentia inter hos valores monstrabit errorem huius projectionis in ipso termino A . Eodem modo pro altero termino B in hac projectione gradus Paralleli erit $\frac{\delta(90^\circ - b + z)(\cos p - \cos q)}{q - p}$, qui cum reuera sit $= \delta \cos b$, differentia inter hos valores ostendet errorem huius projectionis in ipso termino B .

§. 13. Primo igitur bina loca intermedia P et Q ita accipi conueniet, vt errores in ambobus terminis A et B euadant inter se aequales. vnde obtinetur ista aequatio:

$$\frac{(90^\circ - a + z)(\cos p - \cos q)}{q - p} - \cos a = \frac{(90^\circ - b + z)(\cos p - \cos q)}{q - p} - \cos b$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$(a - b)(\cos p - \cos q) + (q - p)(\cos a - \cos b) = 0.$$

§. 14. Quo autem nostram inuestigationem faciliorem reddamus, loco quantitatum p et q in calculum introducamus interuallum z in gradibus expressum, quo punctum O ultra polum remouetur; atque insuper angulum ω , qui singulis gradibus longitudinis circa punctum O respondet, aut sub quo bini Meridiani proximi vno gradu distantes inuicem inclinantur, huncque angulum ω per gradus seu partes gradus solitas dari assumamus, quo pacto pro littera δ unitatem scribere licebit. Hoc igitur modo vnus gradus paralleli in termino A erit

$$= a(90^\circ - a + z)\omega, \text{ in termino vero } B = a(90^\circ - b + z)\omega.$$

Quia igitur in his locis quantitas horum graduum reuera est $\cos a$ et $\cos b$, errores inter se aequati praebunt hanc aequationem;

$\alpha(90^\circ - a + z)\omega - \cos. a = \alpha(90^\circ - b + z)\omega - \cos. b$
 quae reducitur ad hanc: $\alpha(a - b)\omega = \cos. a - \cos. b$; vnde statim
 colligimus $\omega = \frac{\cos. a - \cos. b}{\alpha(b - a)}$, qui valor in partibus vnus gradus
 exprimetur.

§. 15. Postquam igitur errores projectionis in ambobus
 terminis A et B aequales reddidimus, eos insuper aequemus
 maximo errori qui vsquam intra interuallum AB locum habere
 potest, qui error cum incidat in medium X, cuius latitudo
 $= \frac{a+b}{2}$, error in hoc loco erit $\alpha(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z)\omega - \cos. \frac{a+b}{2}$,
 qui cum vergat in partem contrariam, ponendus erit

$$\cos. \frac{a+b}{2} - \alpha(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z)\omega;$$

hic igitur error aequalis statuatur erroribus pro a et b inuentis,
 et nascentur hae duae aequationes:

$$\alpha(90^\circ - a + z)\omega - \cos. a = \cos. \frac{a+b}{2} - \alpha(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z)\omega \text{ et}$$

$$\alpha(90^\circ - b + z)\omega - \cos. b = \cos. \frac{a+b}{2} - \alpha(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z)\omega.$$

§. 16. At vero aequalitas errorum in terminis A et B
 iam nobis suppeditauit hanc aequationem: $\omega = \frac{\cos. a - \cos. b}{\alpha(b - a)}$, qui
 valor in alterutra praecedentium aequationum substitutus sup-
 peditabit hanc aequationem:

$$\frac{(180^\circ - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + 2z)(\cos. a - \cos. b)}{b - a} = \cos. a + \cos. \frac{a+b}{2}$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$180^\circ - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + 2z = \frac{b - a}{\cos. a - \cos. b} (\cos. a + \cos. \frac{a+b}{2})$$

ex qua aequatione distantiam z facile definire licebit.

§. 17. Applicemus nunc haec ad casum mappae Imperii Russi-
 ci, vbi sit $a = 40^\circ$ et $b = 70^\circ$, hincque $\frac{a+b}{2} = 55^\circ$. Hinc igitur

primo pro angulo ω nanciscemur hanc aequationem:

$$\omega = \frac{\cos. 40^\circ - \cos. 70^\circ}{30 \alpha} = \frac{0,4240243}{0,5235987}$$

vnde reperitur $\omega = 48'. 44''$. Inuento igitur hoc valore prior aequatio, substitutis loco a et b valoribus, fit

$$\alpha (85^\circ + 2z) \omega = \cos. 40^\circ + \cos. 55^\circ = 1,33962$$

erat autem $\alpha \omega = \frac{0,42402}{30} = 0,0141$, sicque habebimus

$$85^\circ + 2z = \frac{1,33962}{0,0141} = 95^\circ. 0' \text{ ideoque } z = 5^\circ.$$

§. 18. Supposuimus hic errorem maximum circa medium interualli AB incidere; cum autem ab hoc loco discrepare possit, quaeramus hoc ipsum punctum X, vbi error fit maximus. Denotet igitur x latitudinem huius loci, et quia error ibi erit $\alpha (90^\circ - x + z) \omega - \cos. x$, eius differentiale nihilo aequemus. Hic autem cauendum est, ne pro $d. \cos. x$ more consueto scribatur $-d x \sin. x$; propterea quod hic x in gradibus exprimi assumitur, dum differentiale ipsius arcus, qui est αx per $\sin. x$ multiplicari debet. Cum igitur fit

$$d. \cos. x = -\alpha d x \sin. x,$$

differentiale nostrae formulae dabit

$$-\alpha \omega d x + \alpha d x \sin. x = 0 \text{ vnde fit } \sin. x = \omega$$

vbi ω est fractio supra inuenta $= \frac{\cos. a - \cos. b}{\alpha (b - a)}$, cuius valor nostro casu est $\frac{0,4240243}{0,5235987} = \sin. x$, vnde fit $x = 54^\circ. 4'$, qui ergo locus vix differt a puncto medio interualli AB.

§. 19. Hoc iam valore pro x inuento error in isto loco erit $\alpha (90^\circ - x + z) \omega - \cos. x$, cuius negatiuum errori in terminis A et B aequale positum dabit hanc aequationem:

$$\alpha (180 - a - x + 2z) \omega = \cos. a + \cos. x$$

ex qua valor ipsius z definiri debet, scilicet: quia est $x = 54^\circ. 4'$, aequatio erit $85^\circ. 14' + 2z = \frac{\cos. a + \cos. x}{\alpha \omega} = 95^\circ. 56'$, ideoque $2z = 10^\circ$ et $z = 5^\circ$ existente $\omega = 0,8098270$ in gradibus, siue $\omega = 48'. 44''$.

§. 20.

§. 20. Videamus igitur quantus iste error maximus in locis A, B et X sit futurus. Computemus hunc in finem errorem in A, qui cum sit $\alpha\omega(90^\circ - a + z) - \cos. a = 55\alpha\omega - 0,7660444$ ob $\alpha\omega = 0,01410$ euadet $0,00946$, scilicet, cum gradus Paralleli in latitudine A esse deberet $= 0,76604$, is in hac projectione est aliquanto maior: scilicet $0,77550$; et quoniam iste error in partibus vnus gradus Meridiani exprimitur, 15 miliaria tali gradui tribuendo, iste error valebit $0,14190$, hoc est circiter septimam partem vnus milliaris, siue vnā Verstam Ruthenicam. Iste igitur error in termino B seu latitudine 70° vbi vnus gradus Paralleli est $0,34202$, parti tantum trigesimae octauae aequatur, qui in ista regione facile tolerari potest.

§. 21. Pro construenda igitur mappa Imperii Russici aptissime punctum O in Meridiano medio BA ultra polum ad distantiam 5 graduum constituitur ex quo deinceps per singulos gradus latitudinis Meridiani AB facile describentur, in quibus gradus longitudinis ita designari debent, vt singulis circa punctum O conueniat angulus $48', 45''$; vnde cum interualum OA sit $= 55^\circ$, in parallelo per terminum A ducto vnus gradus longitudinis erit $= 55.\alpha\omega = 0,77550$, siue talis gradus se habebit ad gradum Meridiani vt $0,77550:1$ vnde haec diuisio fatis expedite absolui poterit.

§. 22. Quoniam in hac projectione omnes Meridiani per lineas rectas exhibentur, etiam alii circuli maximi, quos in mappa concipere licet, non multum a lineis rectis discrepabunt. Aequator quidem foret circulus centro O radio $= 95^\circ$ descriptus, in quo singuli gradus futuri essent $95^\circ.\alpha\omega = 1,33950$, qui tamen gradibus Meridiani aequales esse debebant; quoniam autem Aequator in nostra mappa non occurrit, iste error projectioni nihil nocet. Videamus igitur, quantum circuli maximi in ipsa mappa ducendi a lineis rectis sint discrepaturi.

§. 23.

Tab. II.
Fig. 2.

§. 23. Quo ista inuestigatio facilius institui possit, pro-
ducatur noster Meridianus medius AB tam sursum vsque in O
quam deorsum vsque ad Aequatorem in E, ita vt sit $EA = 40^\circ$,
 $AB = 30^\circ$ et $BO = 25^\circ$; polus autem sit in Π , existente $\Pi O = 5^\circ$
circulus autem centro O per E ductus referat Aequatorem, et si
eo in nostra mappa non indigemus, in quo capiatur arcus
EF 90 graduum quales modo definiuimus eritque angulus
 $EOF = 90^\circ$. $\omega = 72^\circ, 53'$, existente interuallo $OF = 95^\circ$.
Erit igitur hoc punctum F communis polus omnium circu-
lorum maximorum, qui ad nostrum Meridianum AG norma-
liter duci possunt.

§. 24. Quod si ergo intra interuallum accipiamus pun-
ctum quodcunque z, per quod circulus maximus ad Meridia-
num AB normalis duci debeat, is vtique in z ad AB erit per-
pendicularis et per punctum F transibit. Vera autem eius fi-
gura curua erit maxime transcendens, interim tamen vix sen-
sibiliter discrepabit ab arcu circulari, qui per puncta Z et F
normaliter ad rectam AB ducetur, qui sit arcus ZF, ad cuius
curuaturum inueniendam, ex F ad rectam OE ducatur per-
pendiculum eritque

$$OG = 95^\circ \cos. 72^\circ, 53' = 27,96024 \text{ et}$$

$$FG = 95^\circ \sin. 72^\circ, 53' = 90,79221.$$

Hinc igitur patet ipsam rectam FG referre quadrantem cir-
culi maximi ad Meridianum AB normalem, qui cum prope-
modum nonaginta gradus Meridiani contineat, a veritate vix
aberrabit. At vero, si per terminum A talis circulus maxi-
mus ad BA normalis ducatur, eius arcus AF aliquanto maior
erit quam recta FG; interim tamen error facile tolerari
poterit. Radius enim talis circuli foret $165^\circ, 9477$ qui
iam tantus est, vt eius curuatura in mappa vix perceptibilis
euadat

cuadat, ideoque omnes circuli maximi in projectione ducendi vix a lineis rectis sint discrepaturi.

§. 25. Quae hic de circulis maximis ad Meridianum medium AB normalibus sunt dicta, pari modo valent de omnibus circulis maximis, qui alios Meridianos normaliter traiciunt; vnde etiam hoc insigne commodum istius projectionis obtinetur, vt lineae rectae a quouis loco ad alium quemuis locum ductae respondeant satis exacte circulis maximis in ipsa superficie sphaerica ducendis, ac propterea distantiae quorumuis locorum in hac projectione ope circini sine notabili errore definiri queant; quamobrem ob istas egregias proprietates haec ratio projectionis pro mappa generali Imperii Russici merito omnibus aliis longe est praeferenda, etiamsi, summo rigore examinata, a veritate haud mediocriter recedat.



TENTAMEN THEORIAE ELECTROPHORI.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. I.

Noua electrica machina, cuius hic indolem sum inuestigaturus, a singulari et mirabili quadam electricitatis productione originem repetit, quae, cum iam olim fuerit a naturae scrutatoribus detecta et acutis experimentis explorata, nouissime merito in scenam reuocari coepit, cum hodiernum multa sint in ea abstrusa adhuc neque satis distincte explicata. Vis electrica, nullo frictionis auxilio, sola resinarum liquefactione producta et admodum diu in refrigerata resina superstes, aut leui attritu facile resuscitanda iam dudum in historia theoriae electricae haud parum est celebritatis adeptae. Ita, referente Cel. *Priestley*, in resinis quibusdam, nullo affricu, aëri libero expositis, a Greyio et Desaguliero spontaneae quasi vis electricae indicia sunt obseruata. Memorabilis quoque phaenomeni huius vberiore et experimentis stabilitam mentionem facit Cel. *Wilson* in transactionibus societatis Londinensis; qui cum lagenae Lugdunensi ceram hispanicam liquefactam infunderet, eam hoc modo iam tanta vi electrica imbutam deprehendit, vt viuidae commotionis Muschenbroekianae experimento sufficeret, ita tamen, vt in ratione diminuti caloris debilitaretur vis concussionis, tandemque, hoc extincto, penitus destrueretur. Penitiori adhuc indagine Cel. *Wilcke* singularem hanc vis electricae, quam vocat *spontaneam*, originem est profecutus, compluribus experimentis, tam materiarum quam confectariorum varietate insignibus; sulphure

v. c.

v. c. liquefacto vasis argillaceis, vitreis ligneisque probe ficcatis et suffultis infuso et post refrigerationem extracto; in vitroque viuidam satis, constanter posituam in vitro, in sulphure negatiuam, vim deprehendit electricam, in sulphure sulphuri infuso nullam; quae denique experimenta vasis metallicis instituit Cel. *Aepinus*; atque his quidem potissimum postremae classis observationibus originem suam debere merito videtur praesens, de qua agitur, machina. Aestatis praeteritae medio paruus huius machinae modulus Vienna Petropolin est transmissus et cum spontanea et inopina quasi vi sua peritiorum attentionem iure sibi vindicaret, pluries maiori mensura constructus. Multiplicibus experimentis, quae in eiusmodi machina, mediocris tamen moduli, eius veram indolem scrutaturus, institui, superuenit alia insignis magnitudinis et effectus, AUGUSTAE IMPERATRICIS, promotricis scientiarum clementissimae iussu a Dno. *Kulibin* artifice Russo dexterrimo constructa, quae optatissimam mihi, singularis huius vis electricae et phaenomenorum inde pendens naturam et causas curatius inuestigandi occasionem obtulit, sibi que Electrophori quasi perpetui, diuturna et pertinaci vis electricae semel excitatae conseruatione, nomen iure meritoque vindicat, cum post integros menses, siccos inprimis, viuide adhuc deprehendatur electricum, et nisi ad alia experimenta vigor eius leui attritu fuisset resuscitandus, sine dubio longe diutius pristinae virtutis, dudum excitatae, indicia, nullo accedente nouo attritu, fuisset conseruaturum.

§. 2. Constat hoc Electrophorum

I. Patina ABC ex laminis tenuibus ferreis stanno obductis parata, nouem pedes longa et quatuor cum dimidio lata; margine conuexo cincta et in vtraque longitudinis suae extremitate globis E et D, ex eadem materia paratis, instructa.

Tab. II.
Fig. 3.

II. Huic patinae infusae sunt centum sexaginta librae picis; octoginta librae cerae hispanicae et decem librae minii; superficie refrigerata plana et polita.

III. Superficie huic resinosa K lamina incumbit metallica, moduli aliquantum minoris, septem cum dimidio pedes longa et tres pedes lata; margine connexo et in vtraque longitudinis extremitate globis *m* et *n* prominentibus instructa. Annexi sunt huic patinae annuli *p*, *q*, *r*, *s*, insertis chordis fericis, quarum ope circa trochleas *t*, *u*, *v* et *w* elevari et ab inferiori debita celeritate diduci potest,

IV. Globo D patinae inferioris annexus est excitator metallicus incurvus DEF, circa axem in D mobilis, cuius altitudo verticalis DF duorum cum dimidio pedum, ita dispositus, ut globulus F, in quem terminatur, a laminae superioris globulo *m*, cum haec eleuatur, intervallo unius et dimidii circiter pedis distet, et inclinato reductione excitatore DEF, plus minusue appropinquari possit.

V. Ex vncinulis *f* et *g* pendet alius globulus metallicus K; ex una parte chorda serica *fk*; ex altera filo metallico *gk* suspensus, ad folia metallica *a*, *b*, *c* etc. pertingente, quibus interior sustentaculi lignei LMNO superficies est obiecta; hocque sustentaculo etiam sussulta est patina inferior, fulcris vitreis imponendo, si totum apparatus contactu corporum non per se electricorum excludere opus sit.

Machina haec, resina semel probe attrita, tum per diuturna temporis intervalla eminenti pollet vi electrica et experimentis electricis consuetis magno vigore instituendis par est. Hisce tamen hac vice recensendis supersedeo, cum ea tantum cum III. Academia communicare mihi propositum sit, quae, quae n egregie machinae huius phaenomena cum theoriae electricitatis a *Cel. Franklino* stabilitae principiis consentiant, aptissime demon-

demonstrare videntur, quatenus inprimis theoria ista, experientis electricis miro modo consentanea, ab *Ill. Aepino* summo ingenii acumine est exulta et in Tentamine theoriae electricitatis et magnetismi mathematicis calculis euoluta.

§. 3. Vt igitur, ad ductum huius theoriae, phaenomena in Electrophoro sese manifestatura, a priori definiamus; principio perpendatur, omnia repeti debere ex consideratione corporis per se electrici, vi electrica, quocunque id modo fuerit effectum, in biti, cui ex utroque latere contigua sint corpora non per se electrica, totusque apparatus cinctus corporibus per se electricis, quae, nisi difficulter, nec transmittant in apparatus hunc, nec ex eo quidquam fluidi electrici recipiant; ubi tantisper abstrahere licet a non perfecta aëris circumflui electricitate originaria. Sit igitur $ABCD$ corpus per se electricum, massa v. c. resinosa, cui in statu quoad electricitatem naturali constitutae competat fluidi electrici quantitas $= \mathfrak{N}$. Liquefactione autem et particularum contractione, refrigerationem comitante, factam eam esse *negatiue* electricam, experimentis conformiter assumo; sitque fluidi electrici hoc modo expulsi quantitas ad naturalem uti $\mathfrak{C} : 1$, adeoque fluidi electrici in corpore $ABCD$ superstitis quantitas $= \mathfrak{N} (1 - \mathfrak{C})$. Contiguum sit corpus hoc *negatiue* electricum $ABCD$ laminae metallica, adeoque corpori non per se electrico $CDEF$, pedi vitreo GH insistenti et aëre sicco vndique cincto; cui corpori in statu naturali competat fluidi electrici quantitas $= \mathfrak{N}$; atque iam ex primis *Cel. Franklini* theoriae principiis cognitum est, fluidum huius laminae electricum a superficie auersa EF ad superficiem corpori *negatiue* electrico contiguam CD attractum iri; ita, ut, fluido electrico versus CD ultra, quantitatem naturalem accumulato, versus EF infra eam depresso, planum in lamina horizontale concipi possit, ultra quod lan ina contrariam, ei corporis $ABCD$, adeoque posituam, cit a

Tab. II.
Fig. 6.

quod eandem, id est, negativam possideat vim electricam. Fingamus ergo, stratum accumulationis extendi a CD vsque ad mn , huicque laminae $CDEF$ parti $CDmn$ deberi in statu naturali fluidi electrici quantitatem $= \lambda N$. Stratum rarefactionis erit ergo $mnEF$, eique in statu naturali competet fluidi electrici quantitas $= (1 - \lambda) N$. Sit porro fluidi electrici in $CDmn$ accumulati quantitas ad naturalem, vti $\mathfrak{D} : 1$; expulsi autem in parte $mnEF$, vti $\mathfrak{E} : 1$; ita, vt fluidi electrici in parte $CDmn$ sit quantitas $= \lambda N(1 + \mathfrak{D})$; in parte $mnEF$ vero $= (1 - \lambda) N(1 - \mathfrak{E})$; adeoque in tota lamina $CDEF = N(1 + \lambda \mathfrak{D} - (1 - \lambda) \mathfrak{E})$; sint iam y et x duae particulae fluidi electrici, altera y in superficie EF , altera x in plano mn , inter stratum accumulationis et rarefactionis medio, constitutae; atque inuestigemus vires, et attractivas et repulsivas, quibus hae particulae x et y sollicitabuntur; quem in finem perpendendum est, qualis earundem fuerit conditio in statu naturali. Ponatur ergo, in statu naturali particulam fluidi electrici y attrahi a massa totius aggregati vi $= A$; repelli vero a fluido electrico strati $EFmn$ vi $= r$; strati $mnCD$ vi $= ar$; corporis $CDAB$ vi $= br$. Similiter particulam x attrahi a massa totius aggregati vi $= \mathfrak{A}$; repelli a fluido electrico strati $mnEF$ vi $= r$; strati $mnCD$ vi $= ar$; corporis $CDAB$ vi $= \beta r$; atque ob statum naturalem, id est, aequilibrium omnium harum virium habebitur

$A - r - ar - br = 0$; et $\mathfrak{A} + r - ar - \beta r = 0$; vbi quidem notari conuenit, esse $a < 1$ et $\beta > b$, a vero stricto sensu $= 1$; quoniam tamen ista vis respondet parti $CDmn$ a parte $mnEF$ distinctae, quarum suas quaelibet independenter ab altera intuitu electricitatis vicissitudines subire potest, haec littera a in calculum erit introducenda, quo euoluto ponendum erit $a = 1$.

Hisce ex statu naturali notatis, perpendatur, abiisse jam N in $N(1 - \mathfrak{E})$; λN in $\lambda N(1 + \mathfrak{D})$ et $(1 - \lambda) N$ in $(1 -$

$(1 - \lambda) N (1 - \mathcal{E})$; vnde facile perspicitur, abire r in $(1 - \mathcal{E}) r$ ar in $(1 + \mathcal{D}) ar$; br in $(1 - \mathcal{E}) br$; ar in $(1 + \mathcal{D}) ar$; et βr in $(1 - \mathcal{E}) \beta r$; quibus valoribus substitutis, iisque membris, quae se ex conditione status naturalis destruunt, deletis colligitur

$$\text{vis } y = \mathcal{E} r - \mathcal{D} ar + \mathcal{E} br$$

$$\text{vis } x = -\mathcal{E} r - \mathcal{D} ar + \mathcal{E} \beta r$$

quibus particula y et x ad corpus ABCD attrahitur.

Atque his formulis continetur status Electrophori is, quem *primitivum* et *illibatum* appellare licet, in quo versatur haec machina immediate post applicationem resinae fusae et refrigeratae, dum lamina metallica, corporibus per se electricis cincta, nullius corporis, nisi aëris circumflui sicci, contactum adhuc passa est quemque statum semel perditum nunquam, nisi nova resinae liquefactione recuperat.

§. 4. Electrophoro in tali statu constituto, admoueatur laminae metallica corpus non per se electricum neque suffultum, aut, si fuerit suffultum, saltem satis magnum; actualis obtinebit influxus fluidi electrici ex corpore admoto in laminam metallicam. et transfluxus ex huius strato inferiori in superius, usque dum utraque virium modo inuentarum fuerit ad nihilum reducta, id est, usque dum fuerit:

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} \cdot \frac{b + \beta}{1 + a}; \text{ et } \mathcal{E} = \mathcal{E} \cdot \frac{\beta a - b}{1 + a}.$$

Est vero ob exiguam laminae crassitiem quam proxime $a = 1$; et $b = \beta$; vnde fit $\mathcal{D} = \mathcal{E} b$ et $\mathcal{E} = 0$. Quod indicio est, in lamina hac nullam dari partem, in qua fluidum electricum infra quantitatem naturalem esset depressum; sed accumulationem huius fluidi versus CD esse maximam, ob eoque recedendo versus EF sensim decrescere, certa lege, quae definiri hactenus non potest. Licet vero haec fluidi electrici super naturalem abundans quantitas $= \lambda \mathcal{D} = \lambda \mathcal{E} b$ hoc modo non sit per totam laminam vniformiter distributa; tamen ob laminae

ex-

exiguam crassitiem eam tanquam vniformiter distributam sine sensibilibus erroris periculo spectare licet, quo posito euadet $\lambda = 1$, et tota iam fluidi electrici in lamina erit quantitas $= N(1 + \mathfrak{D}) = N(1 + \mathfrak{C}b)$. Constat itaque Electrophorum in hoc statu combinatione duorum corporum sibi contiguorum, vnus per se electrici et *negatiua* vi electrica imbuti, alterius non per se electrici et *positiua* electricitate pollentis, quod tamen nullam nec attractiuam nec repulsuam vim exferit, cum fluido electrico naturali N ad quantitatem $N(1 + \mathfrak{C}b)$ accumulato vis eius euanuerit; quam ob causam hanc fluidi electrici in lamina copiam $N(1 + \mathfrak{C}b)$ *quantitatem fluidi electrici debitam aequilibrio virium electricarum in Electrophoro* adpellari conueniet eamque littera Φ , excessum vero supra quantitatem naturalem seu $\mathfrak{C}b$ littera Δ designemus, vt sit $\Phi = N(1 + \mathfrak{C}b)$ et $\Delta = \mathfrak{C}b$. Atque in tali statu Electrophorum constitutum est, cum communiter inter manus versatur, vnde hunc eius statum *statum Electrophori communem* appellare licebit; moxque patebit, ex quantitatis huius Φ aequilibrio virium electricarum in Electrophoro debitae immutatione quocunque modo producta potiora eius phaenomena sponte explicari; quem in finem notetur vim laminae inferioris seu vim y iam esse $= (\mathfrak{C}b - \Delta)r = 0$.

§. 5. Explorato statu hoc *communi* Electrophori, progrediamur ad tertium eius statum, cum scilicet ipsi imponitur lamina metallica altera $ABGH$, filis sericis suspensa, cui in statu naturali competat fluidi electrici quantitas $= n$. Fluidum hoc laminae $ABGH$ electricum duabus iam viribus contrariis sollicitatur, vna attractiua a corpore negatiue electrico $ABCD$, altera repulsua a corpore positiue electrico $CDEF$, harumque virium vnus super alteram excessui obsequetur. Supponamus itaque fluidum laminae electricum versus AB accumulari; stratumque accumulationis extendi vsque ad pq , cui quidem strato in statu naturali competeret fluidi electrici quantitas $= kn$,

$=kn$, et fluidum in hoc strato accumulatum esse ad naturale vt $\mathfrak{B}:1$. Erit igitur stratum euacuationis $p q GH$, cui competet in statu naturali copia fluidi electrici $=(1-k)n$; porro ponamus fluidum electricum ex hoc strato expulsum esse ad naturale vti $\mathfrak{A}:1$; ita, vt iam sit fluidi electrici quantitas in

$ABpq = kn(1+\mathfrak{B})$; in $p q GH = (1-k)n(1-\mathfrak{A})$; adeoque in tota lamina $=n(1+k\mathfrak{B}-(1-k)\mathfrak{A})$, vbi quidem litteras \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , ob rationem similem §. 3. allatam distingui oportet. Sint iam z et v duae particulae fluidi electrici, altera z in superficie laminae extima GH , altera v inter stratum accumulationis et euacuationis media; quae quibusnam viribus sollicitentur, vt cognoscatur, perpendenda est virium tam attractiuarum, quam repellentium conditio in statu trium horum corporum quoad electricitatem naturali. Sit igitur primum pro superficie inferiore EF vis, qua fluidi electrici particula y a massa trium horum corporum attrahitur, $=A$; repellatur vero a fluido electrico in $EFC D$ vi $=g$; in $CDAB$ vi $=bg$; in $ABpq$ vi $=cg$; in $p q GH$ vi $=eg$. Similiter particula z attrahatur vi $=A$; repellatur a fluido electrico in $GHpq$ vi $=fg$; in $p q AB$ vi $=gg$; in $ABCD$ vi $=bg$; in $CDEF$ vi $=mg$. Particula denique v a totius aggregati massa attrahatur vi $=\mathfrak{A}$; repellatur a fluido electrico in $p q GH$ vi $=pg$; in $p q AB$ vi $=qg$; in $ABCD$ vi $=sg$; in $CDEF$ vi $=tg$. Quibus positis ob statum intuitu electricitatis naturalem habebitur

pro y	$A - g - bg - cg - eg = 0$
pro v	$\mathfrak{A} + pg - qg - sg - tg = 0$
pro z	$A - fg - gg - bg - mg = 0.$

Attendenti autem facile patebit, litteram b hic eundem, quem ante §. 3. valorem habere eandemque vis repulsivae, aucta distantia, decrescens functionem designare. Hisce notatis, perpendatur, abiisse

I.) N in $N(1 + \Delta)$ adeoque

g in $g(1 + \Delta)$; t in $t(1 + \Delta)$; m in $m(1 + \Delta)$

II.) N in $N(1 - \mathfrak{C})$, hincque

b in $b(1 - \mathfrak{C})$; s in $s(1 - \mathfrak{C})$; h in $h(1 - \mathfrak{C})$

III.) kn in $kn(1 + \mathfrak{B})$, adeoque

c in $c(1 + \mathfrak{B})$; g in $g(1 + \mathfrak{B})$; q in $q(1 + \mathfrak{B})$

IV.) denique $(1 - k)n$ in $(1 - k)n(1 - \mathfrak{A})$ hincque

e in $e(1 - \mathfrak{A})$; f in $f(1 - \mathfrak{A})$; p in $p(1 - \mathfrak{A})$.

ex quibus colligitur

$$vis\ in\ y = (\mathfrak{A}e - \mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b - \Delta)g$$

$$vis\ in\ v = (-\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q + \mathfrak{C}s - \Delta t)g$$

$$vis\ in\ z = (\mathfrak{A}f - \mathfrak{B}g + \mathfrak{C}h - \Delta m)g$$

quibus viribus fluidi electrici particulae y , v et z versus corpus $ABCD$ attrahuntur.

Pro hisce vero formulis porro notandum est, esse stricto sensu $p = q$, $p = f$ et $b = h$; deinde licet proprie sit $c > e$; $t > m$; $s > h$; $q > g$ et $f > g$, tamen si laminæ impositæ $GHA B$ exigua sit crassities, sine omni errori sensibili poni posse

$$c = e; t = m; s = h; q = g; f = g,$$

denique etiam notari opus est, cum fluidum electricum strati $ABpq$ particulam fluidi electrici z , ipsi viciniorē certe fortius repellat; quam particulam y , quæ, ceteris omnibus paribus, ab eo est remotior, esse $g > c$ adeoque $g > c$.

Atque formulis modo inuentis continetur status Electrophori is, qui obtinet, postquam lamina metallica filis sericis suspensa ipsi est imposita; et ex hisce stabilitis principiis omnia, quæ ad phaenomenorum Electrophori explicationem pertinent, repetere licebit, ad quorum potiora exponenda et ad huius theoriæ ductum explicanda progredior.

§. 6. Ex Electrophori itaque lamina metallica inferiori, seposita lamina superiori mobili, post sufficientem resinae attritum, eo nondum suffulto (isolé) factum, suspendi duo fila linea, aliquot pollices longa, et globulo ex subere facto instructa, libere pendula, sibi propinqua inuicem et parallela: Quo facto Electrophorum imposui fulcro vitreo, ut, nisi a corporibus per se electricis, nusquam contingeretur. Hoc igitur apparatu ita constituto.

I. *Contingatur lamina metallica corpore quocunque, siue per se siue non per se electrico, suffulto aut non, magnitudinis cuiuscunque: pendula ne tantillum quidem de suo parallelismo deturbantur.*

Cum Electrophorum post resinae liquefactae infusionem et refrigerationem atque ortum inde statum eius, quem vocavi *primitium* et *illibatum* §. 3, iam aliorum corporum non per se electricorum contactum subierit, atque etiam nunc durante resinae attritu fuerit non suffultum, adeoque in contactu cum corporibus non per se electricis; euidens est, id, cum imponeretur fulcris vitreis, iam ex statu primitiuo fuisse transgressum in eum statum, quem §. 4. vocavi statum eius *communem*, quo communiter inter manus versatur. Lamina scilicet metallica est quidem, uti theoria docuit, *positiue electrica*, sed nec plus neque minus continet fluidi electrici, quam quidem virium eius attractiuarum et repellentium aequilibrio debetur, quo ipso accumulationis gradu laminae, licet positiue electricae, vis in fluidum electricum aliorum corporum ad nihilum reducitur. Lamina itaque in hoc statu constituta nec ex aliis corporibus ipsi contiguis attrahit in se, neque ex se in ea repellit quidquam fluidi electrici, sed eodem prorsus modo agit, ac si in statu electricitatis naturali esset constituta. Fila itaque, huic licet laminae appensa, sunt in statu naturali; adeoque libere pendula sibi dependent paral-

lela; neque cuiuscunque corporis appropinquatione aut contactu, laminae, adeoque nec filorum, status quicquam mutatur.

II. *Imponatur resinae corpus non per se electricum suffultum, v. c. lamina metallica filis sericis suspensa aut manubrio vitreo munita: pendula diuergunt sed parum et quandoque vix sensibilibiter.*

Statum, in quo Electrophorum, lamina superiori ipse imposita, versatur, definiuimus §. 5. ubi pro laminae, tam superioris, quam inferioris, vi electrica sequentes expressiones sunt inuentae; vis scilicet attractiua

$$\text{laminae superioris} = (Af - Bg + Eb - \Delta m)g;$$

$$\text{laminae inferioris} = (Ae - Bc + Eb - \Delta)g;$$

Cum itaque hic de lamina solum inferiore quaestio sit: notetur, esse $\Delta = Eb$ §. 4, esse porro, quam diu lamina superior adhuc est intacta, $A = B$, §. 5; ac denique $c > e$ §. 5. Vnde vis laminae inferioris electrica colligitur $= -B(c - e)g$; quae ergo est repulsua et ad aliquam fluidi electrici portionem ex lamina expellendam tendit. Cessat ergo vis laminae esse nulla, et cum ex se expellat aliquid fluidi electrici, filorum ipsi contiguorum vtrumque euadet positue electricum, binaque haec pendula se repellunt inuicem; exigua tamen erit ista diuergentia, cum et vis laminae repulsua talis sit, siquidem §. 5. iam notauimus, esse proxime $c = e$.

III. *Contingatur iam corpore non per se electrico v. c. digito lamina superior resinae imposita; scintilla emicat electrica, et pendula laminae inferioris magis diuergunt.*

Modo vidimus, vim attractiuam superficiei huius laminae esse $(Af - Bg + Eb - \Delta m)g$ in plano autem inter stratum accumulationis et rarefactionis fluidi electrici in hac lamina inter-

intermedio obtinet secundum §. 5. vis attractiua

$$= (-\mathcal{A}p - \mathcal{B}q + \mathcal{C}s - \Delta t)g.$$

Admoto itaque huic laminae corpore non per se electrico, actualis obtinebit emicante scintilla fluidi electrici ex hoc in istam influxus et in ea ex parte superiori in inferiorem transfluxus, donec vtraque harum virium fuerit ad nihilum reducta, adeoque, vsque dum fuerit

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}(sg - qb) - \Delta(tg - mq)}{pg + qj} = \mathcal{A}' \text{ et}$$

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{C}(sf + pb) - \Delta(tf + pm)}{pg + qj} = \mathcal{B}'$$

sive ob exiguam laminae crassitiem secundum §. 5. $\mathcal{A}' = 0$ et $\mathcal{B}' = \frac{\mathcal{C}b - \Delta m}{g} = \frac{\mathcal{C}b(1-m)}{g}$; ita, ob $1 > m$ contactu hoc tota lamina haec fiat positivè electrica. His vero valoribus ipsius \mathcal{A}' et \mathcal{B}' in expressione vis electricae laminae inferioris, quam nouimus nunc esse $= (\mathcal{A}'e - \mathcal{B}'c + \mathcal{C}b - \Delta)g$ substitutis, prodit vis huius laminae electrica $= -\mathcal{B}'cg = -\frac{\mathcal{C}bc}{g}(1-m)g$, quae vis repulsua cum manifesto maior sit ea $-\mathcal{B}(c-e)g$, quae ante contactum laminae superioris obtinuit, ob $\mathcal{B}' > \mathcal{B}$ et $c > c-e$; maioris pendulorum post hunc contactum diuergentiae causa euidenter perspicitur.

IV. *Contactu hoc laminae superioris facto, contingatur similiter lamina inferior; atque etiam scintilla percipietur electrica; tumque de nouo superior et dein inferior atque hoc modo alternatim superior et inferior lamina contingantur; et ex vtraque aliquot alternatim vicibus scintilla elicietur electrica, subinde tamen magis magisque debilior, donec post aliquot eiusmodi alternos contactus nihil amplius in neutra percipiatur.*

Singulari huic Electrophori phaenomeno quam consentanea sit theoria modo proposita, vt dilucide perspiciatur; alternos istos laminarum contactus et virium electricarum subnascentes inde variationes secundum formulas datas calculo prosequamur, quod quo concinnius fieri queat, designemus

vim electricam laminae superioris per $V S$; eam vero laminae inferioris $= V I$, ita, vt, si fluidi electrici quantitas ultra naturalem superabundans sit in lamina superiore $= \mathfrak{B}$; in inferiore $= \Delta$ habeatur

$$V S = (-\mathfrak{B} g + \mathfrak{C} b - \Delta m) g \text{ et}$$

$$V I = (-\mathfrak{B} c + \mathfrak{C} b - \Delta) g.$$

Primo itaque laminae superioris contactu vis $V S$ ad nihilum est redacta, dum \mathfrak{B} abiit in $\mathfrak{B}' = \frac{\mathfrak{C} b - \Delta m}{g} = \frac{\mathfrak{C} b (1-m)}{g}$; at substituto hoc valore ipsius \mathfrak{B} euadit $V I = \frac{\mathfrak{C} b (g-c) - \Delta (g-cm)}{g} g$, quae non est nulla sed ob $\Delta = \mathfrak{C} b$ abit, vti iam notauimus, in hanc repulsiuam $-\frac{\mathfrak{C} b c (1-m)}{g}$. Admoto itaque corpore non per se electrico laminae huic: expelletur, emicante scintilla, aliquid fluidi electrici, donec haec vis evanescat, id est, vsque dum abeat Δ in $\Delta' = \mathfrak{C} b \cdot \frac{g-c}{g-cm}$. Hoc ipso autem instanti vis laminae superioris reuiuiscit, cum enim iam sit

$$V S = (-\mathfrak{B}' g + \mathfrak{C} b - \Delta' m) g;$$

substitutis valoribus colligitur $V S = \frac{\mathfrak{C} b \cdot cm (1-m)}{g-cm}$, quae vis est positiua adeoque *attractiua*; ita, vt ipsa vis inferioris repulsiuae destructio eodem instanti vim superiorem resuscitet, et attractiuam efficiat Admoto igitur iam denuo laminae superiori corpore non per se electrico; ex hoc in illam transiliet fluidum electricum, vsque dum \mathfrak{B}' abierit in $\mathfrak{B}'' = \frac{\mathfrak{C} b (1-m)}{g-cm}$, adeoque $V S = 0$. Pro lamina vero inferiore habebitur

$$V I = (-\mathfrak{B}'' c + \mathfrak{C} b - \Delta') g;$$

in qua expressione si substituantur valores pro \mathfrak{B}'' et Δ' inuenti, prodit $V I = 0$, ita, vt post triplicem hanc scintillam ex superiore et inferiore lamina alternatim emicantem secundum theoriae principia nullam amplius expectare liceat. Si igitur accadat, vt post tres hos contactus alternos in laminis sibi iunctis aliqua adhuc vis electrica sentiatur: id sine omni dubio circumstantiae erit adscribendum, cuius in superiori calculo ra-

tion-

tionem non habuimus, non perfectae scilicet aeris circumflui electricitati originariae, qua quantitates \mathfrak{B} , \mathfrak{C} et Δ non nihil variari possunt, quas hactenus non nisi a corpore contingente variari assumimus; ceterum hactenus inuenta ad comprobandum theoriae cum experimentis consensum plene sufficiunt.

Inuentis itaque valoribus \mathfrak{B} et Δ extremis, qui quippe corporis non per se electrici contactu ulterius non variantur, scilicet $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{C}b(1-m)}{g-cm}$; et $\Delta = \frac{\mathfrak{C}b(g-c)}{g-cm}$ assignare possumus utriusque laminae post ternos hos contactus alternos statum electricum; erit scilicet quantitas fluidi electrici in lamina superiore $= n(1 + \frac{\mathfrak{C}b(1-m)}{g-cm})$; in lamina inferiore $= N(1 + \frac{\mathfrak{C}b(g-c)}{g-cm})$ ita, ut hinc perspiciatur, in lamina utraque fluidum electricum ultra quantitatem naturalem esse accumulatum, adeoque hoc contactu utramque factam esse *positivae* electricam; hoc tamen non obstante fluidum electricum aliorum corporum ipsis admotorum nec attrahere nec repellere, adeoque quam diu ita iunctae sunt istae laminae, eas post hos contactus prorsus agere, ac si constitutae essent in statu quoad electricitatem naturali.

V. *Si loco contactuum horum alternatiuorum, una lamina vno, altera simul altero digito contingatur: commotio electrica percipitur, ei lagenae Lugdunensis perfecte similis, tumque hoc facto laminarum sibi iunctarum neutra amplius sentitur electrica.*

Huius quoque phaenomeni ratio ex praecedentibus immediate perspicitur. Cum ordo sit indifferens, et commotio electrica percipitur, siue superior siue inferior lamina primum vno, et dein altera altero digito contingatur; ponamus, primum superiorem contingi; atque emicante scintilla et sine commotione euadet, uti in experimento praecedente, $VS = 0$; vis vero repulsiva laminae inferioris VI incrementum capit, quae ad expellendam ex hac lamina fluidi electrici partem tendit. Quodsi igitur ea simul altera digito contingatur, haec
fluidi

fluidi electrici portio ex lamina expellenda in hunc propulsabitur, eo ipso autem instanti, quo hoc fit, reuiuiscit, vt modo inuenimus, vis laminae superioris attractiua, a qua itaque si alter digitus nondum fuerit remotus, fluidum electricum ex inferiore ad superiorem laminam per digitos propulsabitur, idque, quod praecipuum est, insigni celeritate et vehementia, cum scilicet *duplici* vi adigatur, vna attractiua a superiori, altera propulsiua ab inferiori lamina; in eiusmodi autem transfluxus fluidi electrici velocitate et vehementia id consistere, cuius perceptio commotio electrica appellatur, in lagenae Lugdunensis theoria dudum est comprobatum.

Quodsi vero inferior lamina primum contingatur, **VI** ad nihilum reducitur, vis vero laminae superioris attractiua increfcit, quae igitur si simul altero digito contingatur, fluidum electricum huius attrahet; eo ipso autem instanti vis inferioris repulsiua reuiuiscit, ita, vt etiam hoc casu fluidum electricum *duplici* vi adigatur et transfluxus sui vehementia commotionem electricam producat.

Transfluxus hic durabit, donec vtraque vis **VS** et **VI** ad nihilum redierint; quibus nihilo aequatis iidem prodeunt valores extremi litterarum **B** et **Δ**, quos in experimenti praecedentis explicatione, successiuos Electrophori status alternis contactibus ortos calculis prosequendo inuenimus; vnde, cur deinceps laminarum sibi iuncturam neutra vim amplius prodat electricam, per se patet.

§. 7. Explicatis itaque ex principiis theoriae propositae, omnibus, quae, dum laminarum vtraque resinae contigua est, se manifestant, phaenomenis, ad ea progrediamur, quae obseruantur, dum superior lamina ab Electrophoro deducitur.

VI. *Lamina superiori ad distantiam aliquot pollicum ope filorum sericorum vel manubrii vitrei ab Electrophoro remota: laminarum utraque viuidam ostendit vim electricam, admoto corpore non electrico, scintillis conspicuam.*

Vidimus, vtramque laminam esse positivè electricam, atque

$VS = (-\mathfrak{B}g + \mathfrak{C}b - \Delta m)g$ et $VI = (-\mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b - \Delta)g$ designantibus \mathfrak{B} et Δ valores suos extremos §. 6. inuentos, ita sibi inuicem attemperatos, vt fit

$$-\mathfrak{B}g + \mathfrak{C}b - \Delta m = 0 \text{ et } -\mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b - \Delta = 0.$$

Nunc vero diducta ab Electrophoro lamina superiore, vt eius viribus haec iam non afficiatur, euidens est, poni debere $b=0$; et $m=0$; adeoque vis VS non iam erit nulla, sed $VS = -\mathfrak{B}g$, adeoque *repulsiva*; et cum nunc nec inferior lamina a viribus superioris afficiatur, erit quoque $c=0$, adeoque $VI = (\mathfrak{C}b - \Delta)g$ quae vis est *attractiva*, cum sit $\Delta = \mathfrak{C}b \frac{g-c}{g-cm}$ hincque $\mathfrak{C}b - \Delta = \frac{\mathfrak{C}bc(1-m)}{g-cm}$; adeoque $VI = \frac{\mathfrak{C}bc(1-m)}{g-cm}g$; simili modo substituto valore extremo ipsius \mathfrak{B} habebitur $VS = -\frac{\mathfrak{C}bg(1-m)}{g-cm}$; facile enim patet, etsi, separatis laminis, posuimus in expressione virium $c=0$, et $m=0$, ob allegatas rationes, has tamen litteras in expressionibus pro quantitate fluidi electrici in vtraque lamina, adhuc Electrophoro iunctis, accumulati et, separatis etiam laminis, non mutati pristinos suos valores retinere. Atque sic quidem euidenter patet, cur vires harum laminarum, quae laminis sibi iunctis, ob mutuuum earundem aequilibrium quasi erant sopitae, laminarum separatione adeoque sublata reciprocae talis aequilibrationis conditione statim reuiuiscant quasi et sua actiuitate se manifestent.

VII. *Lamina superiori ab Electrophoro semota, deducatur eius electricitas ope conductoris in lagenam Lugdunensem, quae hoc modo viuida vi electrica eaque positiua oneratur.*

Deducatur simili modo laminae inferioris electricitas in aliam eiusmodi lagenam Lugdunensem, quae hinc vi electrica negatiua imbuitur.

Electricitatem prioris lagenae, laminae superioris ope electrificatae, esse *positiuam* consuetis modis explorauimus; eam vero lagenae alterius, per laminam inferiorem electrificatae, esse *negatiuam*, etiam inde perspicitur, quod hae duae lagenae sibi admotae explosione electrica exoneratur, quod fieri non posset, nisi posterior lagena electricitatem possideret ei lagenae prioris contrariam, adeoque *negatiuam*, cum in experimento instituendo opera data sit, ut in vtraque lagena eadem esset vis electricae intensitas.

Duo haec phaenomena adeo perspicue ex proposita theoria consequuntur, ut ea etiam diuinare licuisset, quamuis paradoxon videatur, corpus aliquod in statu naturali positum contactu corporis *positiue* electrici fieri *negatiue* electricum; iam enim inuenimus, etiam inferiorem laminam esse *positiue* electricam. Hoc vero non obstante vidimus, vim laminae inferioris, diducta lamina superiore, euadere *attractiuam*; hincque corpus ipsi admotum, attrahendo in se aliquam fluidi eius electrici partem, non potest non reddere *negatiue* electricum. Neque etiam latet vis eius attractiuae origo; cum enim haec lamina iam contineat fluidi electrici quantitatem
$$= N \left(1 + \mathcal{E} b \left(\frac{g - c}{g - c m} \right) \right);$$
 ea in se et extra nexum cum corpore resinoso solitarie spectata utique est *positiue* electrica; et, si ab isto corpore separari posset, corpora ipsi admotam redderet *positiue* electrica. Cum vero ista quantitas
$$N \left(1 + \mathcal{E} b \cdot \frac{g - c}{g - c m} \right)$$
 minor

minor sit quantitate Φ , quae aequilibrio virium electricarum in Electrophoro sine lamina superiori spectato debetur, quamque §. 4. inuenimus $N(1 + \mathcal{E}b)$; euidenter patet, hanc laminam, deducta superiore, ex admotis ipsi corporibus tantum fluidi electrici, quantum huic aequilibrio deficit, in se attrahere debere, adeoque eodem modo agere, ac si esset *negatiue* electrica. Ceterum cum vis laminae superioris prodierit *repulsua*; per se perspicitur, admota ipsi corpora naturalia fieri debere *positiue* electrica.

§. 8. Explicatis itaque omnibus Electrophori *suffulti* phaenomenis; iis, quae locum habent, dum Electrophorum *non est suffultum*, sed cum corporibus non per se electricis cohaeret; vberius non est, quod immoremur, cui quippe casui formulae modo inuentae facillime iam applicantur. Vnum tamen hic allegari meretur, cuius nimirum consensus cum theoria hanc non mediocriter confirmare censendus est.

VIII. *Electrophoro non suffulto imponatur lamina superior, eaque contingatur digito, ac emicabit scintilla electrica, si iam digito hoc non remoto contingatur lamina inferior, nulla percipitur commotio. Si vero hic contactus fiat inuerso ordine; commotio sentitur aeque viuida, ac si Electrophorum fuerit suffultum.*

Dum Electrophorum erat *suffultum*, ordo contactuum erat *indifferens*. §. 6. nro. V. et commotionis electricae utroque casu productae causam principia exposita abunde declararunt; ex quibus cum facillime perspiciatur, vim laminae inferioris repulsuam, contactu superioris incrementem, statim destrui a corporibus non per se electricis in statu Electrophori non suffulti ipsi contignis; vltiori explicatione id non indiget, cur priori casu nulla percipitur commotio electrica. Posteriori vero casu fluidum laminae expellendum per digitum ipsi con-

tiguum et contactu laminae superioris eo ipso instanti, quo inferioris vis repulsiva renouiscit, aliqua fluidi sui electrici parte vi laminae superioris attractiva orbatum, celeritate et vehementia, commotionis electricae generatrice, uti experimento vidimus, propulsari debere, perspicue intelligitur.

§. 9. Atque hac experimentorum serie, integra absolvitur Electrophori quasi periodus, dum contactu laminarum adhuc iunctarum vis in iis electrica excitatur, eaque electricitate *onerantur* modo Lagenae Lugdunensis consimili; contactu vero laminarum separatarum explosio generatur electrica totumque Electrophorum in eum statum restituitur, quem in praecedentibus *communem* appellauimus, ex quo dein eadem haec experimentorum periodus denuo initium repetit, quamdiu resina intermedia in statu suo electricitatis *negatiuae* perseverat, qua destructa adeoque quantitate \mathcal{E} ad nihilum reducta, omnes hi effectus euanescent, cum vires supra inuentae omnes hoc coefficiente sint affectae; intenso autem valore ipsius \mathcal{E} , seu crescente electricitate negatiua resinae omnes quoque intenduntur; id quod praeter resinae attritum sequenti experimento facillime comprobatur:

IX. *Machinam electricam consuetam globo vitreo constantem ita disposui, ut discus metallicus, corio globum atterente inductus, esset perfecte suffultus, id est, undique corporibus per se electricis cinctus; huic disco annexui catenam, filis sericis suspensam, cuiusque alterum extremum imposui Electrophoro, cuius vim omnem ante destruxeram. Rotato tum globo, adeoque catena hoc, uti constat, negatiue electricata, Electrophorum satis cito pristinum suum vigorem recuperavit.*

X. *Catena hac iam ab Electrophoro sublata eaque cum aliis corporibus non per se electricis coniuncta; aliam catenam*
con-

conductor globi vitrei annexui, eiusque extremum alterum Electrophoro suffulto imposui. Rotato globo, viuida ex lamina Electrophori inferiori, emicuit, admoto corpore non per se electrico, scintilla; at postea omnis Electrophori vis penitus destructa deprehendebatur; sicque alternis vicibus Electrophori vim destruere et resuscitare licuit.

Quorum duorum experimentorum ratio cum ex superiori theoria dilucide perspiciatur; de iis plura non addo.

In applicatione calculi mathematici ad disquisitiones electricas, ob incognitas virium electricarum leges speciales, calculorum simplicitati saepius aliquid dandum est. Ita verbi causa §. 3. ponitur $\alpha = 1$. Fluidi scilicet electrici quantitas in lamina inferiore inaequaliter distributa prodiit

$$N (1 + \lambda D - (1 - \lambda) E);$$

quae, cum ante contactum nihil fluidi electrici in hanc laminam aliunde ingredi supponatur, adhuc erit $= N$; adeoque $\frac{D}{E} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$; posito ergo haecenus tantum ad calculi proxime sequentis commoditatem $D = E$; erit $\lambda = \frac{1}{2}$; et tum $\alpha = 1$.

Ceterum huius maxime memorabilis inuenti electrici, etsi haud ideam primam, insignem tamen perfectionem ingenio Nobilis Itali, *Alex. Voltae*, deberi, publicis relationibus litterariis constat.



VERA THEORIA
REFRACTIONIS ET DISPERSIONIS
R A D I O R V M
RATIONIBVS ET EXPERIMENTIS CONFIRMATA.

A u c t o r e
L. E V L E R O.

Hypothesis I.

§. 1.

Concipiantur plura media diaphana, quorum densitas continuo ita crescat, vt refractionis radiorum, ex quolibet medio in sequens transeuntium, sit vbique eadem, aequalis scilicet refractioni ex primo medio in secundum. Seriem igitur horum mediorum designemus litteris A, A', A'', A''', etc. quorum primum A pro aëre vel etiam vacuo accipi poterit; hinc si differentiae inter ista media minimae vel infinite paruae statuantur, in hac serie omnino media diaphana continebuntur, quae a primo A eo magis erunt remota, quo maiorem habeant densitatem, vel quo maiorem refractionem producant, dum radii ex aëre in ea transeunt. Haec autem media perfecte diaphana assumimus, ita vt omnes radios lucis, ratione refractionis vt-cunque discrepantes, aequè transmittant.

Hypothesis II.

§. 2. Sit iam $r : 1$ ratio refractionis, quam subeunt radii rubri, dum ex medio primo seu aëre A in secundum medium A' transeunt, atque eadem erit ratio refractionis, dum iidem radii ex medio quocunque nostrae seriei in sequens transmittuntur;

Radios

Radios autem rubros hic vocamus eos radios , qui omnium minimam refractionem patiuntur.

Corollarium.

§. 3. Ex natura igitur refractionis manifestum est, si radii rubri ex aëre seu medio A per saltum immediate in medium A' transeant, rationem refractionis fore $\equiv r r : 1$; ac si immediate ex aëre A in medium A'' transeant, erit ratio refractionis $\equiv r^2 : 1$ et ita porro. Vnde generatim patet, si radii ex aëre in medium quodcunque A⁽ⁿ⁾ transeant, rationem refractionis fore $\equiv r^n : 1$.

Scholion.

§. 4. Si media in nostra serie ratione densitatis infinite parum crescant, tum ratio refractionis $r:1$ infinite parum rationem aequalitatis superabit; eritque ergo $r = 1 + \omega$, denotante ω fractionem infinite parvam; tum autem, si ex aëre A in aliud medium quantumvis densum, quod sit A⁽¹⁾, progrediamur, exponens i erit numerus infinitus; quae autem circumstantia nihil impedit, quo minus calculus pro omnibus mediis perinde institui possit, ac si nostra series A, A', A'', A''' per differentias finitas procederet.

Hypothesis III.

§. 5. Sit simili modo $v:1$ ratio refractionis, quam radii violacei ex aëre A in medium A' transeuntes patiuntur; atque eandem refractionem patientur radii, qui ex quocunque alio medio in immediate sequens transibunt. Radios autem violaceos hic vocamus eos, qui omnium maximam refractionem patiuntur.

Corollarium.

§. 6. Hinc igitur ut ante sequitur, si radii violacei ex aëre A immediate in medium A' transeant, rationem fore ut $v v : 1$; at si immediate in medium A'' transeant, refractionem fore

fore vt $v^i : 1$ et ita porro. Si ergo generatim radii ex aëre A in medium quodcunque A^[i.] transeant, ratio refractionis erit $= v^i : 1$; vbi notetur, si differentiae inter nostra media infinite parum crescant, etiam numerum v infinite parum unitatem esse superaturum.

Problema.

§. 7. Si radii ex aëre in aliud medium quodcunque diaphanum transeant, fueritque radiorum rubrorum refractionis ratio vt $R : 1$, radiorum autem violaceorum refractionis ratio vt $V : 1$, definire relationem, quam numeri R et V inter se tenebunt.

Solutio.

§. 8. Designetur medium, de quo hic sermo est, caractere A^[i.], et iam vidimus fore refractionem radiorum rubrorum $= r^i : 1$, violaceorum vero $= v^i : 1$; vnde sequitur fore $R = r^i$ et $V = v^i$. Sumendis igitur logarithmis erit $\log R = i \log r$ et $\log V = i \log v$; vnde eliminando numerum i , quo medium propositum continetur, erit $\frac{\log R}{\log V} = \frac{\log r}{\log v}$; vbi numeri r et v , vt vidimus, determinatos suos habent valores, non pendentes a natura medii, de quo hic quaestio est, ita vt $\frac{\log r}{\log v}$ sit quantitas prorsus constans, quae si ponatur $= \alpha$, erit $\frac{\log R}{\log V} = \alpha$, sicque relatio inter nostros numeros R et V innotescit.

Corollarium I.

§. 9. Dummodo ergo ista constans α fuerit cognita, ex data refractione radiorum rubrorum $R : 1$. statim concludere poterimus rationem refractionis radiorum violaceorum $V : 1$.

Cum enim sit $\log V = \frac{1}{\alpha} \log R$, erit $V = R^{\frac{1}{\alpha}}$; sin autem vicissim conflet ratio radiorum violaceorum $R : 1$, inde deducetur ratio refractionis radiorum rubrorum $R : 1$, cum sit $R = V^{\alpha}$.

Coroll.

Corollarium 2.

§. 10. Quod si ergo pro vnico medio diaphano, in quod radii ex aëre transeant, explorata fuerit ratio refractionis tam radorum rubrorum, quae sit $R:1$, quam violaceorum, quae sit vt $V:1$, hinc statim concludetur $\alpha = \frac{1}{1} \frac{R}{V}$; vbi perinde est, ex quonam canone hi logarithmi capiantur, cum logarithmi eorundem numerorum in omni canone eandem inter se seruent rationem: Statim autem atque ex vnico experimento cognitus fuerit numerus α , is simul pro omnibus refractionibus per alia media diaphana locum habebit.

Scholion 1.

§. 11. Si experimenta consulamus, quae circa refractionem radorum ex aëre in vitrum crystallinum anglicum, sub nomine *Flintglass* cognitum, sunt instituta in Comment. Acad. Reg. Scient. Paris. Tomo pro anno 1771 p. 464. comperimus fuisse $R=1$, 5920 et $V=1$, 6229; quare cum sumendis logarithmis vulgaribus sit $1/R=0,2019431$ et $1/V=0,2102918$, erit valor nostrae litterae $\alpha = \frac{2019431}{2102918}$; hinc igitur erit $1/\alpha = 9,9824067$, vnde prodit $\alpha = 0,96030$ et $\frac{1}{\alpha} = 1,04134$, ita vt sit proxime $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{24} = \frac{25}{24}$, et $\alpha = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$. Istud exemplum imprimis idoneum est visum, ex quo valor litterae α determinetur; quia haec vitri species, vtpote albissima, omnes radios liberrime transmittit et satis ingens discrimen inter refractionem radorum rubrorum et violaceorum parit; ex quo errores, in huiusmodi experimentis vix euitandi, eo minus sunt pertimescendi. Interim tamen, quia haec experimenta ope lentis ex hoc vitro paratae, interpositione frustuli vitri siue rubri siue violacei, in camera obscura sunt facta, locum imaginis solaris maxime distinctae non tam exacte definire licuit; vnde, si aliae rationes suaserint hunc valorem litterae α non nihil immutare, haud dubitabimus.

Scholion 2.

§. 12. Quoniam in loco citato etiam experimenta afferuntur, quibus tam refractionis radiorum rubrorum quam violaceorum, ex aëre in aquam distillatam transeuntium, est definita, aqua vero etiam omnes radios liberrime transmittere est censenda, haec quoque experimenta ad calculum nostrum reuocemus, indeque valorem litterae nostrae α deriuemus. Reperitur autem ibi refractionis radiorum rubrorum, seu $R = 1,3293$, violaceorum autem $V = 1,3406$; unde cum sit

$$lR = 0,1236230 \text{ et } lV = 0,1272992 \text{ erit}$$

$$\alpha = \frac{1236230}{1272992} \text{ hincque } l\alpha = 9,9872735$$

unde prodit $\alpha = 0,97112$ et $\frac{1}{\alpha} = 1,02974$; unde proxime sequitur fore $\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{34}$ et $\alpha = 1 - \frac{1}{34}$. Discrimen igitur inter hos binos valores litterae α maius videtur, quam ut incertitudini experimentorum tribui possit; verum tamen si perpendamus, in posteriore experimento differentiam refractionis tam fuisse exiguam, ut leuissimus error in obseruatione imaginum haud mediocriter litterae α valorem mutare debuerit, tum vero, (nullae enim circumstantiae huius posterioris experimenti commemorantur) si aqua intra binas meniscos vitreas fuerit inclusa, uti videtur, conclusio inde deducta non exiguae dubitationi obnoxia erit censenda; ita ut littera α notabiliter maior prodire potuisset. Quia vero etiam prius experimentum non ab omni errore immune pronunciare possumus, fortasse a veritate vix aberrabimus, si litterae α valorem aliquanto maiorem quam $\frac{23}{24}$ tribuamus, veluti sumendo $\alpha = \frac{27}{28}$ vel $\frac{26}{27}$. Certe enim hoc discrimen non tanti videtur momenti, ut theoria hic stabilita euertere sit censenda.

Theorema.

§. 13. Si radii lucis ex medio quocunque diaphano M in aliud quodcunque N transmittantur, et ratio refractionis radio-

diorum rubrorum fuerit, vt $\mathfrak{R} : 1$, violaceorum vero vt $\mathfrak{B} : 1$, erit quoque perpetuo $\frac{l\mathfrak{R}}{l\mathfrak{B}} = \alpha$, denotante α eundem numerum, quem ante assignauimus.

Demonstratio.

§. 14. Statuamus primo radios ex aëre in medium prius M transire, ac tum esse refractionem radiorum rubrorum vt $R : 1$, violaceorum vero vt $V : 1$; tum vero, si radii immediate ex aëre in alterum medium M transeant, sit refractionis radiorum rubrorum $= R' : 1$, et violaceorum $= V' : 1$; quibus positis erit pro utroque casu $\frac{lR}{lV} = \alpha$, et $\frac{lR'}{lV'} = \alpha$. Nunc igitur, si radii immediate ex medio M in medium N transeant, erit ratio refractionis radiorum rubrorum vt $R' : R$ et violaceorum vt $V' : V$, sicque erit $\mathfrak{R} = \frac{R'}{R}$ et $\mathfrak{B} = \frac{V'}{V}$; hinc fiet

$$l\mathfrak{R} = lR' - lR \text{ et } l\mathfrak{B} = lV' - lV;$$

quia igitur est $lR' = \alpha lV'$ et $lR = \alpha lV$, erit vtique $\frac{l\mathfrak{R}}{l\mathfrak{B}} = \alpha$.

Problema.

§. 15. Data refractione radiorum mediorum, dum ex medio quocunque diaphano in aliud transeunt, quae sit $= n : 1$, definire refractionem radiorum extremorum, hoc est, rubrorum et violaceorum pro eodem transitu, siue, quod eodem reddit, definire dispersionem.

Solutio.

Cum refractionis radiorum extremorum tam parum discrepet, vt differentia tanquam infinite parua spectari possit, ponamus refractionem radiorum rubrorum esse $= n - dn : 1$, violaceorum vero vt $n + dn : 1$; ita vt dn id ipsum significet, quod vulgo dispersio radiorum vocari solet. His positis erit, vt ante assumimus, $\mathfrak{R} = n - dn$ et $\mathfrak{B} = n + dn$, vnde fit

$$l\mathfrak{R} = l(n - dn) = ln - \frac{dn}{n} \text{ et } l\mathfrak{B} = ln + \frac{dn}{n};$$

Z 2

quare

quare cum sit $l\mathfrak{N} = \alpha l\mathfrak{B}$, erit $ln - \frac{dn}{n} = \alpha ln + \frac{\alpha dn}{n}$, vnde colligitur $dn = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} n ln$; vbi logarithmi hyperbolici sunt sumendi; sin autem logarithmis vulgaribus vti vellemus, coëfficiens $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ secundum cognitam rationem mutari debet. Cum igitur α habeat valorem fixum, patet dispersionem dn semper proportionalem esse formulæ $n ln$. Quod si ergo fuerit, vt exprimentum prius dederat, $\alpha = \frac{23}{24}$, erit $dn = \frac{1}{47} n ln$; sin autem, vt alterum experimentum dederat, fuerit $\alpha = \frac{33}{34}$, erit $dn = \frac{1}{67} n ln$. Ob rationes autem iam allegatas prior determinatio veritati magis consentanea videtur.

Scholion 1.

§. 16. Summus *Newtonus*, et qui olim refractionem vitri communis accuratius sunt perscrutati, assignarunt rationem refractionis mediae vt 1, 55 : 1; radiorum autem rubrorum refractionem vt 1, 5367 : 1; violaceorum vero vt 1, 5593 : 1; ita vt posito $n = 1, 5480$ fit $dn = 0, 0113$. Quod si ergo hos valores cum superioribus formulis comparemus, reperiemus

$$\alpha = \frac{l(n-dn)}{l(n+dn)} = \frac{l1, 5367}{l1, 5593} = \frac{1865891}{2929796}$$

siue $\alpha = 1 - \frac{1}{30}$, qui valor iam inter binos præcedentes incidit, vnde suspicio nostra confirmatur, esse $\alpha = \frac{27}{28}$ vel adeo $\frac{29}{30}$; neque enim accuratiorem determinationem per experimenta expectare licet parumque refert, siue α aliquanto maiorem siue minorem habeat valorem, cum sufficiat nosse, eum esse constantem.

Scholion 2.

§. 17. Si experimenta ante allata accuratius perpendamus, rationes non defunt, nobis persuadentes, discrimen refractionis in vitro crystallino anglico nimis magnum esse assignatum: inde enim sequeretur, fore dispersionem vitri coronarii ad dispersionem istius crystalli vt 18 : 31 proxime, quam tamen ipse *Dollondus* non ultra 2 : 3, hoc est 18 : 27, deprehendisse affirmat; vnde dispersio supra memorata minui deberet in ratione

31 : 27, quo facto loco valoris $\alpha = \frac{23}{24}$ prodiisset $\alpha = \frac{27}{28}$; sicque huic valori satis tuto confidere poterimus. Hinc igitur concludere licet, verum valorem litterae α intra limites $\frac{27}{28}$ et $\frac{32}{33}$ cadere, qui iam sibi sunt tam vicini, vt ab experimentis, quae semper non exiguae incertitudini sunt inuoluta, maior praecisio expectari nequeat. Verum tamen principium, cui nostrum ratiocinium innititur, accuratius perpendamus, quod manifesto in sequenti hypothefi continetur.

Hypothesis fundamentalis.

§. 18. Si radii rubri, ex medio diaphano P in medium Q transeuntes, eandem patiantur refractionem, quam radii iidem rubri ex medio M in medium N transeuntes, tum etiam radii violacei, ex medio P in medium Q transeuntes, eandem patientur refractionem, quam iidem radii violacei, ex medio M in medium N transeuntes.

Tota ergo quaestio huc redit, vtrum ista hypothesis veritati sit consentanea nec ne; ac primo quidem ingenue fateor, me eius demonstrationem rigorosam exhibere neutiquam posse. Intem tamen nullam video rationem satis firmam, cur eius veritatem in dubium vocare liceat; saltem discrimen, quod hactenus in experimentis allatis deprehendimus, neutiquam sufficere videtur, vt hanc hypothefin repudiemus: nisi ergo grauioribus rationes in contrarium afferri queant, hanc hypothefin inter veritates physicas referre non dubitamus; quocirca obiectiones, quae contra hoc ratiocinium, quod iam dudum in medium attuli, sunt factae, exacto examini subiiciemus.

Obiectio 1.

§. 19. Ante omnia autem haec hypothesis oppugnata est experimento notissimo *Dollondi*, quo inuenit: dispersionem radiorum in vitro coronario, dicto *crown-glass*, se habere ad dispersionem in crytallo anglico, *flint-glass* vocato, vti 2 : 3, cum

tamen secundum meas determinationes longe alia ratio subsistere deberet.

Ad hanc obiectionem sequentia respondeo :

§. 20. Primo videatur, quantopere haec ratio 2:3 a superiori determinatione diffideat. Hunc in finem consideretur refractione media, quam *Dollondus* pro vitro coronario ut 1,53:1, pro crystallo autem anglica ut 1,58:1 assignavit; pro priore ergo erat $n=1,53$, unde deducimus dispersionem $dn = \frac{1-a}{1+a} n \ln = 0,2825 \left(\frac{1-a}{1+a} \right)$; pro posteriore autem ob $n=1,58$ dispersio reperitur $dn = 0,3139 \frac{1-a}{1+a}$; sicque ratio inter has dispersiones colligitur 2825:3139, hoc est proxime ut 28:31, quae utique enormiter discrepat a ratione 2:3 et nullo modo incertitudini experimenti tribui potest.

§. 21. Verum si indolem utriusque vitri diligentius examinemus, prior species coronaria tanto gradu viriditatis est praedita, ut manifesto radiis extremis, rubris scilicet et violaceis, transitum penitus negari debet. Cum igitur in superiori ratiocinio expresse supposuissim, diuersa media radios lucis transmittentia ita perfecte esse pellucida, ut omnibus radiis liberrimus transitus concedatur, istud experimentum nostram opinionem minime infringit, propterea quod vitrum coronarium utrinque radios extremos, rubros scilicet et violaceos, quasi extinxit, unde sine dubio multo minor differentia inter radios extremos actu transmissos resultare debuit, cum contra altera species (*flint-glass*) utpote candida omnibus radiis liberum transitum concesserit. Ob qualitatem igitur vitri coronarii, qua id colore subuiridi est tinctum, omnis dubitatio penitus diluitur, atque adeo multo maius discrimen inter utramque dispersionem produci posset, si vitro magis viridi uti voluerimus; quandoquidem tandem, si hoc vitrum colore viridi satis spisso tingeretur, omnis plane dispersio euanesceret; dum scilicet soli radii vi-

rides

rides transmitterentur: neque igitur ex hoc experimento vllum argumentum contra validitatem meae sententiae peti potest.

Obiectio 2.

§. 22. Maximam autem vim ad opinionem meam euer-tendam suppeditat sine dubio felicissimus successus, quo idem artifex *Dollondus* tam egregia telescopia construxit, quae ab omni confusione colorum immunia deprehenduntur, ob quam rationem etiam *achromatica* appellari solent. Nisi enim assumpta illa dispersionis ratio $2:3$, cui haec telescopia sunt superstructa, veritati esset consentanea, tam exoptatum effectum producere non potuisset. Verum contra hanc obiectionem sequentia respondeo.

§. 23. Primo quidem sine vlla haesitatione concedo, per ista telescopia obiecta sine vlllo margine colorato repraesentari, in quo utique praecipua eorum proprietas cernitur: neque tamen idcirco omnem confusionem, quae ex diuersa radiorum refractione nascitur, penitus tolli censeo. In dioptrica enim luculenter demonstraui, etiam ope vnus generis vitri eiusmodi instrumenta parari posse, quae nullum vestigium marginis colorati pariant, atque adeo ostendi, quomodo quouis casu lentes oculares disponi oporteat, vt apparitio circa marginem obiectorum prorsus euanescat. Hic scilicet effectus obtinetur, si omnes radii extremi, quantumuis colore a se inuicem discrepent, secundum eandem directionem in oculum intromittantur; tum enim hi radii, vtut diuersi, colorem naturalem exhibebunt, ita vt obiecta bene terminata conspici queant. Quemadmodum igitur iste effectus per idoneam lentium ocularium dispositionem obtineri queat, in Dioptrica mea fusius explicauimus, ac pro quouis casu formulas exhibui, quas tam in telescopiis quam microscopiis obseruari necesse est.

§. 24. Totum scilicet negotium huc redit, vt vltimae imagines, per quotcunque lentes repraesentatae, vnde radii in oculum mittuntur, ita disponantur, vt, si verbi gratia *vv* exhibeat imaginem a radiis violaceis formatam et *rr* eam, quae a radiis rubris formatur, inter quas, imagines a reliquis coloribus natae, ordine se inuicem insequantur, vt, inquam, radii per extremitates singularum imaginum transeuntes in ipso oculo concurrant; tum enim manifestum est, ob perfectam vnionem radiorum diuersicolorum extremorum in oculo nullum marginem coloratum generatum iri, ita vt talia telescopia etiam pro achromaticis haberi possint, etiamsi omnes lentes ex eadem vitri specie fuerint confectae. Quin etiam iam olim talia telescopia fuerunt confecta, quae obiecta sine vlllo margine colorato exhibuerunt. Neque vero hoc modo omnis plane confusio a diuersa radiorum refractione oriunda tollitur, quae sine dubio eo maior esse debet, quo maiore intervallo extremae imagines *vv* et *rr* a se inuicem fuerint remotae; quoniam hoc modo singula obiecti puncta in fundo oculi non amplius per puncta sed per exiguos circellos exprimentur, qui quo fuerint maiores, eo maiorem confusionem gignere debent, etiamsi a margine colorato penitus sunt liberati.

§. 25. Quanquam igitur celeberrimo *Dollondo* lubens largior, in eius tubis achromaticis nullum plane marginem coloratum conspici, hunc tamen eximium effectum non tam lenti obiectivae ex diuerso vitro formatae, quam idoneae dispositioni lentium ocularium potissimum, tribuendum esse arbitror, in qua sententia eo magis confirmor, quod, etiamsi lens obiectiva omnibus numeris esset perfecta, tamen lentes oculares, nisi rite inter se fuerint dispositae, semper marginem coloratum producere deberent; atque haec sine dubio est ratio, cur ipse *Dollondus* plerumque numerum lentium ocularium ad quinarium vsque augeat, quia sine dubio paucioribus hunc scopum obtineri

obteneri non posse putat, cum tamen, vti ostendi, tres lentes sufficere potuissent.

§. 26. Totius ergo huius controuersiae cardo in hac quaestione vertitur, vtrum lentes obiectiuae siue duplicatae siue triplicatae, quibus *Dollondus* vtitur, nullam plane confusionem pariant? circa quam quaestionem ante omnia obseruo, omnino necessarium esse, vt confusio ab apertura lentium oriunda prorsus e medio tollatur; quod cum per lentes ex eadem vitri specie paratas perinde praestari possit, ac diuersas species adhibendo, primo quidem agnosco, artificem hunc solertissimum istam confusionem optimo cum successu e medio sustulisse; ratione autem alterius confusionis speciei plus ipsi concedendum non arbitror, quam per idoneam lentium ocularium dispositionem vitium marginis colorati feliciter esse euitatum, neutiquam vero hanc confusionem prorsus esse remotam, idque ob hanc ipsam rationem, quod dispersio radiorum, quam supponit, a veritate non mediocriter aberrat. Interim tamen istae lentes obiectiuae multo certe minorem confusionem parere debent, quam si ex vnica vitri specie essent paratae; atque his rationibus inductus affirmare non dubito, istas lentes obiectiuas ad multo maiorem perfectionis gradum euehi posse, si verae dispersionis rationi, quam formula supra allata ostendit, superstruantur. Verum quia haec ratio dispersionis multo minor est, quam a *Dollondo* assumitur, si ea vti vellemus, lentes obiectiuae multo minorem aperturam essent admissurae, ita vt inde nobis neutiquam eum effectum polliceri possemus, quem expectamus; quoniam pro data multiplicatione multo longioribus tubis esset opus; vnde omnino operae pretium erit accuratius inuestigare, quantum lentes obiectiuae triplicatae a *Dollondo* paratae, atque etiam eae, quas egomet ex eadem dispersionis ratione nimis magna construere docui, iis antecellant, quae pro eadem distantia focali et eadem apertura ex vnica vitri specie parari possent, quod examen hic subiicio:

EXAMEN

Lentium triplicatarum, ex duplici vitro paratarum, vbi ratio dispersionis minis magna assumitur.

§. 27. Quo igitur huiusmodi lentes facilius diiudicare queamus, primo similem lentem compositam, ex eadem vitri specie paratam, contemplemur, quae eandem aperturam pro data distantia focali $= k$ admittat simulque nullam plane confusionem, ex apertura oriundam, producat; ac si ratio refractionis pro hac vitri specie ponatur vt $n:1$, ob $dn = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} n \ln$ (vbi breuitatis gratia loco $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ scribamus δ , ita vt secundum experimentum *Newtoni* sit $\delta = \frac{1}{20}$, et ex *crystallo anglica* secundum *Cel.*

Iaurat $\delta = \frac{1}{21\frac{1}{2}}$, vnde ingenere statui posse videtur $\delta = \frac{1}{23}$) erit $dn = \delta n \ln$; tum spatium, per quod imago diffunditur, sequenti modo colligetur. Quia hoc spatium semper idem prodit, quotcunque lentes adhibeantur, ponamus vnicam lentem vsurpari, cuius distantia media sit $= p$, eritque $p = k$; tum vero haec lens sit vtrinque aequae conuexa, radio conuenientis existente $= f$, erit $f = 2(n-1)p = 2(n-1)k$. Quare cum pro radiis diuersae indolis quantitas f maneat eadem, dum litterae n et k variantur, erit $dk = -\frac{dn}{n-1} \cdot k$, quod est dimidium spatium, per quod imago diffundetur; vnde ob $dn = \delta n \ln$ erit totum spatium $= 2\delta \frac{n \ln}{n-1} k$. Hinc igitur sumto $n = 1,55$ erit $\ln = 0,1903317$, qui per $\frac{n}{n-1} = \frac{31}{11}$ multiplicatus dat $\frac{n \ln}{n-1} = 0,53638$ hincque spatium diffusionis erit $= 1,07276 \cdot \delta k$.

§. 28. Consideremus nunc lentem triplicatam, ex duplici vitro paratam, quae itidem nullam plane confusionem ob aperturam pariat, cuius distantia focalis media quoque sit $= k$; tum vero primae lentis conuexae distantia focalis media sit $= p$; mediae lentis, concauae, distantia focalis $= -q$, at tertiae lentis iterum conuexae distantia focalis $= r$, eritque, siquidem interualla inter has ternas lentes negligantur,

$$\frac{1}{k} =$$

$\frac{1}{k} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Porro assumamus primam ac tertiam lentem ex tali vitro parari, cuius refractio media fit $= m:1$, pro media autem lente refractio $= n:1$. His positis, quia nunc tantum ad rationem dispersionis respicimus, perinde erit quaenam figura lenticulis tribuatur, dummodo eandem distantiam focalem seruant; singulas igitur vtrinque aequales statuamus (etiamsi reuera tales non fuerint) sitque radius vtriusque faciei pro prima lente $= f$, pro secunda $= -g$ et pro tertia $= h$, eritque ob rationem refractionis datam

$$f = 2(m-1)p$$

$$g = 2(n-1)q \text{ et}$$

$$h = 2(m-1)r$$

vnde fit

$$\frac{1}{p} = \frac{2(m-1)}{f}; \frac{1}{q} = \frac{2(n-1)}{g}; \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{2(m-1)}{h};$$

quibus valoribus substitutis nostra aequatio erit

$$\frac{1}{k} = \frac{2(m-1)}{f} - \frac{2(n-1)}{g} + \frac{2(m-1)}{h} = 2(m-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{h}\right) - \frac{2(n-1)}{g},$$

vbi quantitates f, g et h sunt constantes, dum ob diuersam radiorum indolem tam numeri m et n quam distantia k variantur.

Differentietur igitur nostra aequatio, et ob $dm = \delta m l m$ et $dn = \delta n l n$ erit $-\frac{dk}{kk} = 2\delta m l m \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{h}\right) - \frac{2\delta n l n}{g}$, vbi iam dk denotat dimidium spatium diffusionis, quod igitur euanesceret, si esset $m l m \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{h}\right) = \frac{n l n}{g}$.

§. 29. Ponamus autem nunc rationem dispersionis suppositam esse vt $\mu:\nu$, ita vt fuerit $\mu\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{h}\right) = \frac{\nu}{g}$; ex hac scilicet aequatione determinatam esse relationem inter quantitates f, g et h , seu potius inter distantias focales p, q et r . Cum igitur hinc sit $\frac{1}{f} + \frac{1}{h} = \frac{\nu}{\mu g}$, si hunc valorem in expressione confusio-
nis substituamus, habebimus

$$-\frac{dk}{kk} = \frac{2\nu\delta m l m}{\mu g^2} - \frac{2\delta g l n}{g} = \frac{2\delta}{g} \left(\frac{\nu m l m}{\mu} - n l n \right)$$

vnde colligimus $dk = \frac{2\delta k k}{g} (nl n - \frac{\nu}{\mu} m l m)$ sicque totum spatium diffusionis erit $= \frac{4\delta k k}{g} (nl n - \frac{\nu}{\mu} m l m)$, quod nisi fuerit notabiliter minus quam $1,07276.k$, lentes istae ex duplici vitro paratae neutiquam similibus lentibus ex eodem vitro paratis praestare sunt censendae.

§. 30. Secundum hanc formulam igitur primum examinemus eas lentes triplicatas, quibus in superiori volumine commentariorum pro perficiendis telescopiis et microscopiis sumus vsi, vbi erat pro vitro coronario (*crown glass*) $m = 1,53$ et pro crystallo anglica (*flint glass*) $n = 1,58$, tum vero assumeram $\mu : \nu = 3 : 4$. Ex his igitur valoribus fit $nl n = 0,31388$ et $m l m = 0,28258$; vnde ob $\frac{\nu}{\mu} = \frac{4}{3}$ spatium diffusionis erit

$$= \frac{4\delta k k}{g}. 0,06289 \text{ siue } = 0,25156. \frac{\delta k k}{g}.$$

Erat autem ibi circiter $g = \frac{5}{15}k$, vnde ista confusio censenda erit $= 0,83854.\delta k$, quae ergo non multo minor est quam $1,07276\delta k$. hoc est quam si lentem triplicatam ex eodem vitro pararemus.

§. 31. Examinemus eodem modo lentem illam triplicatam, quam loco citato sub finem commemorauimus, vbi erit $m = 1,53$; tum vero $n = 1,60$ et $\frac{\nu}{\mu} = 1,53$. Pro hoc igitur casu erit vt ante $m l m = 0,28238$, at $nl n = 0,32659$ vnde colligitur spatium diffusionis $= -\frac{4\delta k k}{g}. 0,14978$; vbi signum nihil turbat, quoniam etiam casu eiusdem vitri valor pro dk negatiuus prodiit, et hic tota quaestio circa absolutam quantitatem spatii diffusionis versatur; ibi autem erat circiter $g = \frac{12}{25}k$, vnde spatium hoc erit $= 1,0893.\delta k$. Hoc ergo spatium omnino aequalis est censendum illo, quod ex vnica vitri specie nascitur, ita vt geminum vitrum vix vllam praerogatiuam mereri videatur, et egregius ille effectus, qui istis lentibus tribuitur, vnice inde veniat, quod primo nullam confusionem ab apertura oriundam pariant; deinde vero potissimum, quod lentes ocula-

oculares ita sint ordinatae, vt apparitio marginis colorati ad nihilum fuerit perducta.

§. 32. Tota autem haec controuersia vnico experimento facile dirimi poterit in camera obscura, dum lentis triplicatae, qualem construere docui, distantia focalis tam pro radiis rubris quam violaceis exploratur. Si enim hac duae distantiae aequales deprehenduntur, sententia *Dollondi*, circa directam dispersionem radiorum, in vtraque vitri specie, penitus erit confirmata, et fateri coactus ero, meam theoriam funditus esse euersam; sin autem inter binas illas distantias focales discrimen reperiatur, quod pro lentibus triplicatis fuerit vel $0,838 \delta k = 0,036 k = \frac{1}{28} k$, vel pro posteriore genere $1,09 \delta k = 0,047 k = \frac{1}{21} k$, denotante k distantiam focalem mediam: hoc certum erit signum, meam theoriam veritati esse consentaneam. Haec conclusio etiam valebit, si interualla ista aliquanto minora inueniantur; quoniam huiusmodi lentes obiectivae ob viriditatem radios extremos non transmittunt. Simul vero etiam, si hoc eueniat, certi erimus, talem diffusionem imaginum, visioni distinctae non multum nocere, dummodo lentes oculares ita fuerint dispositae, vt margo coloratus penitus destruat.



DE
FIGVRA QVAM VENTVS
FLVIDO STAGNANTI
INDVCERE VALET.

Auctore
L. EVLERO.

§. I.

Quam diu tam superficies fluidi quam directio venti perfecte est horizontalis, nullum est dubium, quin fluidum in hoc statu persistere queat; quando autem a vi quacunque de hoc statu fuerit perturbatum, utique fieri poterit, ut fluidum etiam extra statum libellae a vento in aequilibrio conservari possit. Cuiusmodi igitur figura his casibus fluido a vento induci debeat, hic definire constitui.

Tab. II.
Fig. 4-

§. 2. Repraesentet igitur super axe horizontali OB curua AYB figuram, in qua fluidum ab actione venti, secundum directionem horizontalem VY impingentis, in quiete persistere possit, atque super recta verticali AO capiatur abscissa $AX = x$, cui respondeat applicata $XY = y$ et arcus $AY = s$ sitque punctum A in superficie fluidi maxime elevatum; unde, quia fluidum in aequilibrio consistere assumitur, eius pressio in elementum $Yy = ds$ debita erit altitudini $AX = x$, ipsa vero pressio quantitas $= x ds$, siue aequabitur ponderi, quod habitura esset columna eiusdem fluidi basi ds insistentis, cuius altitudo foret $= x$; huius vero pressio directio erit recta Yu normalis ad ipsam curuam in puncto Y .

§. 3. Ponatur nunc venti celeritas $= c$, ita ut c sit spatium, quod ventus singulis minutis secundis percurrat, cuius ergo

ergo directio VY in elementum $Yy = ds$ incidit sub angulo VYy , cuius sinus est $= \frac{dx}{ds}$. Quod si iam g denotet altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, ista venti celeritas debita erit altitudini $\frac{cc}{+g}$. Vnde si ventus directe in elementum Yy impingeret, eius vis aequalis foret ponderi columnae aëreae, cuius basis $= ds$, altitudo vero $= \frac{cc}{+g}$; quare si grauitas specifica fluidi fuerit ad aërem vt n ad 1, pondus istius columnae, ad massam fluidi reductum, erit $= \frac{cc + g}{+n g}$.

§. 4. Hoc modo se res haberet si ventus perpendiculariter incideret; quia autem sub angulo, cuius sinus $= \frac{dx}{ds}$, incidit, secundum opinionem vulgo receptam ista vis diminui debet in ratione quadrati sinus anguli incidentiae, ita vt tota vis venti futura esset $\frac{cc ds}{+n g} \cdot \frac{dx^2}{ds^2} = \frac{cc dx^2}{+n g ds}$, cuius directio erit recta YN , pariter ad curuam normalis, sed intus directâ; ex quo iam manifestum est, fluidum in aequilibrio consistere posse, si ista vis aequalis fuerit vi ante definitae, extrorsum secundum Yn sollicitanti; quam ob rem hinc oritur ista aequatio: $x ds = \frac{cc + x^2}{+n g ds}$; hacque aequatione determinabitur natara curuae AYB , in qua fluidum ab actione venti conseruari poterit.

§. 5. Hinc igitur facile deducitur aequatio inter abscissam $AX = x$ et arcum $AY = s$, cum sit

$$x ds^2 = \frac{cc dx^2}{+n g} \text{ hincque } ds = \frac{cdx}{2\sqrt{ngx}}$$

ideoque integrando $t = \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{ng}}$, ita vt arcus AY proportionalis sit radici quadratae ex abscissa; vnde patet, curuam hanc fore *cycloidem*. Sin autem applicatam $XY = y$ in calculum introducere velimus, ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$ habebimus hanc aequationem: $dy = dx \sqrt{\frac{cc}{+ngx} - 1}$. Ponatur hic $\frac{cc}{+ng} = 2a$, vt fiat $dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, siue $dy = \frac{dx(2a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}}$, cuius

cuius integrale est

$$y = \sqrt{2ax - xx} + \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} \text{ siue}$$

$$y = \sqrt{2ax - xx} + a \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2ax - xx}}{a}$$

quae est notissima cycloidis proprietas.

§. 6. Quoniam hic littera a exprimit radium circuli generatoris istius cycloidis, eius tota altitudo erit $= 2a$. Quia igitur posuimus $2a = \frac{cc}{4ng}$, tota altitudo istius cycloidis erit $\frac{cc}{4ng}$; unde, ut exemplum contemplemur, si celeritas venti singulis minutis secundis fuerit 32 pedum, existente $g = 16$ ped. et pro aqua capiatur $n = 800$, altitudo huius cycloidis erit $\frac{1}{35}$. Hic autem probe tenendum est, aquam in hoc situ consistere non posse, nisi a pariete firmo AO coërceatur, ne diffuere possit.

§. 7. Cum autem per experimenta nuper instituta compertum sit, actionem fluidorum eo magis a ratione duplicata sinus anguli incidentiae recedere, quo minor fuerit iste angulus, ac tandem pro minimis angulis ad rationem simplicem proxime accedere, consideremus etiam hanc hypothesein, qua impulsio venti secundum YN fit $= \frac{ccdx}{4ngds}$, unde nascitur ista aequatio: $nds = \frac{ccdx}{4ng}$, siue $ds \frac{ccdx}{4ngc}$, ita ut $\frac{xds}{dx} = \frac{cc}{4ng}$, hoc est quantitas constans.

§. 8. Pro hac iam curua cognoscenda, per summam tatem fluidi A ducatur horizontalis AD, ad quam ex Y agatur tangens YV, hincque ad XY perpendiculum TU et ex Y perpendiculum Yu, atque ob triangula TYA et Yyu similia erit ipsa tangens YT $= \frac{xds}{dx}$, quae ergo, cum aequetur quantitati constanti, indicat, hanc curvam esse *tractoriam*, quae oritur, si fili TY, cuius longitudo $= \frac{cc}{4ng}$, alter terminus T per horizontalem DA producit, dum alteri termino Y alligatum est corpusculum, quod tardissime super plano protrahatur.

tur. Vnde patet, ipsum punctum summum A in infinitum sinistrorsum remoueri; initium ergo huius curuae erit B, ubi tangens BD est verticalis $\frac{cc}{ng}$.

§. 9. Quod si iam pro hac curua loco ds scribamus $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, aequatio prodit $x\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{cc}{ng} dx = b dx$ posito $\frac{cc}{ng} = b$, ita vt b exhibeat longitudinem fili protracti, vnde deducitur $dy = \frac{dx}{x} \sqrt{bb - xx}$, quae aequatio, posito $\sqrt{bb - xx} = z$, vt sit $xx = bb - zz$ et $\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{bb - zz}$, abit in hanc: $dy = -\frac{zx dz}{bb - zz} = dz - \frac{bb dz}{bb - zz}$, ergo integrans $y = z - \frac{1}{2} b l \frac{b+z}{b-z}$ consequenter

$$y = C + \sqrt{bb - xx} - \frac{1}{2} b l \frac{b + \sqrt{bb - xx}}{b - \sqrt{bb - xx}}.$$

Vnde patet, sumto $x = c$, fore $y = C + b l \infty$, vnde intelligitur, punctum A sinistrorsum in infinitum elongari.

§. 10. Combinemus iam istas duas hypotheses ita, vt forsitan ad veritatem satis prope accedamus; posito nimirum angulo incidentiae $= \Phi$, statuamus impulsione[m] venti proportionalem esse huic formulae: $(1 - \alpha) \sin. \Phi^2 + \alpha \sin. \Phi$, ubi α sit fractio satis parua. Hinc enim, quando angulus Φ parum a recto discrepat, vt sit $\sin. \Phi = 1$, haec formula dabit 1. Sin autem angulus Φ fuerit valde paruus, vt $\sin. \Phi^2$ quasi enanescat prae $\sin. \Phi$, impulsio sequetur rationem simplicem $\alpha \sin. \Phi$. Quare cum nostro casu sit $\sin. \Phi = \frac{dx}{ds}$, vis a vento orta erit $(\frac{cc ds}{ng} (1 - \alpha) \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{\alpha dx}{ds}) = x ds$, vnde posito $\frac{cc}{ng} = 2a$, aequatio nostra erit $\frac{x ds}{2a} = (1 - \alpha) \frac{dx^2}{ds} + \alpha dx$, ideoque $\frac{x ds^2}{2a} = (1 - \alpha) dx^2 + \alpha dx ds$, quae posito $ds = r dx$ abit in hanc: $\frac{rx^2}{2a} = 1 - \alpha + \alpha r$, vnde deducitur $x = \frac{2a(1 - \alpha + \alpha r)}{r}$. Quare cum sit $s = \int r dx = rx - \int x dr$, hinc habebimus $\int x dr = -2(1 - \alpha) \frac{a}{r} + 2\alpha a l r$, sicque abscissa x definitur per nouam variabilem r , per quam etiam arcus s ita exprimitur, vt sit $s = 2\alpha a + \frac{2a(1 - \alpha)}{r} - 2\alpha a l r$.

§. 11. Sin autem aequationem inter coordinatas x et y desideremus, ponamus $dy = p dx$ et ob $ds = dx \sqrt{1 + pp}$ aequatio nostra erit $\frac{x(1+pp)}{2a} = 1 - a + a \sqrt{1 + pp}$; unde colligitur $x = \frac{2a(1-a)}{1+pp} + \frac{2aa}{\sqrt{1+pp}}$; tum vero erit

$y = \int p dx = px - \int x dp$. Cumigitur sit $\int x dp = C + 2a(1-a)A$ tag. $p + 2a \alpha / p + \sqrt{1 + pp}$, patet utramque coordinatam x et y per eandem tertiam variabilem p exprimi.

§. 12. Ex praecedentibus autem patet, si fuerit $a = 0$, curuam fore *Cycloidem*; sin autem $a = 1$, tum prodire *Traкторiam*, ita ut curua, quam hic sumus adepti, medium quodpiam teneat inter *Cycloidem* et *Traкторiam*, cuius punctum summum erit ubi $p = \infty$; tum autem erit $x = 0$ et $y = -\infty$, quo ergo respectu nostra curua naturam traкторiae sequetur. At vero punctum imum ibi reperietur, ubi $p = 0$, quo casu fit $x = 2a = \frac{cc}{4ng}$ et $y = C$. Sicque haec curua omnino non multum abludet ab natura Traкторiae, statim atque α nihilo maiorem accipit valorem. Videtur autem huic litterae α eiusmodi valorem tribui posse, ut a veritate vix quicquam aberretur. Experimenta enim, quae hunc in finem sunt instituta docent, valorem ipsius α haud multum ab $\frac{1}{4}$ vel $\frac{1}{2}$ discrepare. Quanquam autem hic ab omni motu animum abstrahimus, tamen hinc haud obscure intelligitur, quomodo a vento aqua ultra libellam eleuari possit. Interim tamen vix sperandum videtur, ut ista Theoria insuper ad motum fluidi vnquam promoueri queat.

PHYSICA.

B b 2

DE

SYSTEMIC



DE
NATRO RVTHENICO
 OBSERVATIONES.

Auctore

I. G. GEORGI.

§. I.

Omnes Minerographi vno ore affirmant: Salia et Salinas quaslibet substantias, quales v. gr. Gypsum est, stratis montanorum tractum colliumque horizontalibus ortum debere. Quumque Imperium Ruthenicum catenae montium vbique vel percurrant, vel limites eiusdem constituent, maximas quoque in promontoriis stratificatis (*Flötze*) salium divitias obtinet. Montes saxosi ab occidente maris glacialis per Fennoniam imminentes inde ad Vralense iugum deprimitur quidem, nullaque ad boreali parte strata horizontalia neque salia prodit. Secundum situm vero borealia illa promontoria strata sua plana in Oceanum glaciale demittere videntur. Cumque hoc ipsa re et per analogiam cum natura fundi aliorum marium verosimillimum euadat, possit inde forte non minus bene, quam per alias hypothefes, falsa natura Pelagi explicari. Colles stratificati Waldaiici meridiem versus a montibus fennicis producti, occidentalia porro strata Vralensis iugi in planitiem se explicantis, Caucasique et Carpathicae catenae versus septentrionem explanata, quae regionem circa mare nigrum, Tanain et Istrum occupant, tandemque iuga et praeruptae ripae circa Wolgenses fluuios salibus in genere abundant; quorum pars per Stararussienfes, Solykamienses

B b 3

atque

atque Totmenfes officinas halurgicas, Lacusque planitiei australis, sal folis ardore deponentes, in vsum vertitur. Multo ditissima est salibus Russiae australis pars asiatica, ultra Wolgam inferiorem, circa iugum *Obfschei Syrt* appellatum, totumque per desertum Tataricum ultra *Rbynum*, vsque ad *Sarasu* fluuium et montes *Auru - Uruk* appellatos; quae imensa planities collibus a iugis finitimis sensim deminutis quasi vndosa redditur, salibusque vt ita dicam inundata est. Per Sibiriam tractus salini insignes crepidinem quasi legunt iugi Vralensis, et maximas montium catenae variis sub appellationibus Sibiriae fines australes constituentis. Danuria et regiones omnes versus Mongoliam et circa iugum a malis cognominatum (*Iablonoï Chrebet*) sitae in campis interalpinis salibus superabundant, quae etiam variorum fluminum v. gr. Angarae, Ilimi, Lenae &c. in ripis per fontes muriaticos sese produnt.

§. 2. *Muriatici salis*, cuius maxime abundantiam praecedenti paragrapho exposui, multifariae quoque intra regni fines occurrunt varietates; habemus sal culinare marinum, et lacustre, et fontinale, et gemmeum seu montanum, omniumque aeque fere magna est copia. Deinde sal mirabile Glauberianum et Neutrum acidulare Wallerii, praesertim prius, in eisdem passim regionibus (§. 1.) partim purum, partim sale muriatico mixtum offendimus; et quidem haec cum sale culinari omnium frequentissime sese offerunt. Porro Vitriolum et Alumen in matrice schistosa, pyritosa, terreave, Humus Nitro diues imo Nitrum natiuum plurimis in locis, per nuperrimos maxime Itineratores, magnaue saepe in copia detectum est. Sal Ammoniaum circa vulcanos montes Kamtschatcae atque Insularum oceani Pacifici generari, nondum equidem certis obseruationibus constat, verosimillimum tamen est; vt et hanc salis modificationem inter inquilinas recensere possimus, et certe olim e montibus versus Indiam tendentibus,

qui

qui cum nostratibus iugis cohaerent, per Bucharos et Calmucos adferebatur, vti celeb. *Model* in *Tiaët. de Ammoniaco natiuo* p. 17. affirmat; imo *Gmelinus* quoquo senior Ammoniaci ad Chatangam in Sibiria reperti mentionem fecit. Si Borax vllibi datur nativa talis certe apud nos nondum detecta est, licet e Tibetanis Sibiriae iugo continuis fere montibus, sola hucusque cognita Boracis patria, vulgo adferatur (*Act. Holm. Vol. 33. p. 322*). Si vero tanquam artis humanae productum Boracem consideramus, quod de maiori eius parte dici posse satis videtur, tum quidem principalem eius basin, Natrum dico seu Alkali minerale natium non vulgari copia apud nos reperiri certum est. Quandoquidem vero idipsum Natrum in Europa parcissime, rarisque in locis offenditur, opere praetium esse credidi, vt de eo paulo fufius hic agerem, praetertim quum post primam eius inuentionem per *Gmelinum* senio-rem in Dauuria factam (*Itinerar. Vol. 2. p. 6. Flor. Sibir. Praef. p. 48.*), licet Itineribus recentioribus multis in locis cum aliis salibus mixtum indicetur, nemo tamen ex professo de illo egerit, neque Itineratorum obseruationes in vsum traxerit.

§. 3. In calidis australibus terris, v. gr. Orientali India, Tranquebaria, Aegypto, Africa copiosum quidem et antiquitus notum est Natrum. Secundum ea, quae scriptores antiqui, *Plinius* (Lib. 5. 6. 67.) *Aristoteles*, *Tacitus*, *Dioscorides*, alique de Natro, quod et Nitrum, Aphronatron, Halonatron, Agrium, Baurach, Nitrum calcareum, Halmirhaga, et aliis forte nominibus appellarunt, habent, concludendum est: Natrum veterum, quod ad depurandas vestes, ad saponem parandum, ad vitrarias officinas adhibebant, maximam partem Alkali fuisse naturale. Nominibus vero atque descriptionibus, vt et loco natali atque vfu, videntur antiquiores cum vero Natro confudisse Halonatron siue Sal mura-rium, Nitrum crudum, Sal terreum e muriatico corruptum, Sele-

Selenitem , Ammoniacum natium , Sal mirabile natium , aliaque forte producta terrae Salina , ita vt etiam ad condien- dos cibos , ad faliendas carnes , cet. adhitum fuisse prodiderint.

Id ipsum , et quod Itineratores varii ex oriente , sub no- minibus istis admodum diuerfa Salia , raroque verum Natron retulerunt , Chemicos in dubitationem tantam circa Natron veterum coniecerat , vt plerique illud negarent , praesertim quia alcali omne igne generari autumabant. Tandem per principia chemica Salium natura distingui coepit , apparuitque per analyses celebrium virorum , Alkali salis muriatici et Na- tron persicum &c. vera esse alcalia , non terras salinas. (Conf. Marggraf *Opusc. Chem. de alcali salis culinaris. Model in Opuscula subseciu. chem. de Sale persico* , aliorumque). Ho- die Mineralogi omnes *Natron* eiusque varietates , secundum affinitatem characterum , inter alcalina Salia , ipso illo nomine , recensent. Secundum hanc itaque stabilitam significationem *Natron* in Imperio Russico acque fere copiose reperiri constat , atque in India ; quo quidem , si prius innotuisset et accuratius cognitum fuisset , omnis de Natro antiquorum lis iam dudum dirimi potuisset.

§. 4. *Natrum* , praeterquam quod in Sale muriatico (§. 1.) vbique existit , basin quoque alcalicam Salis mirabilis natui constituit , quod in omnibus facile lacubus salitis et sub- falsis deserti Tatarici atque Sibirici , vt sunt Bogdenfis atque Eltoniensis ad Wolgam , Inderiensis ad Iaikum , Iamysche- wensis aliique in deserto Barabensi , Tustukul ad Ieniscam , Borsensis ad Ononem , cet. maximeque in Lacubus amaris Glauberiano Sale praesertim scatentibus reperiri iam certum est ; quales praeprimis sunt Astrachanenses lacus Sal purgans officinale suppeditantes , Tartschiraniensis atque Urunsciensis Baicali vicini , aliique minus memorabiles.

§. 5. *Natrum liberum* siue acidis istorum salium haud saturatum fontes medicati etiam apud nos passim produnt, v. gr. scaturigines salinae ad Wolgam circa coloniam Sarpensem detectae, fons in Lacum Tuistu ditionis Krasnojarensis defluens, saluberrima scaturigo ad Udam Dauuriae, de quibus omnibus in *Itinerario* suo egit celeberrimus noster *Pallas*; itemque balneum aquae calidae ad occidentalem ripam Baikalis scaturiens, quod in *Itinerario* proprio p. 76. descripsi; vt alias taceam aquas, quae Natron exigua licet proportionem in se continet. Lacus quoque in Sibiria detecti sunt, quibus Natron acido haud saturatum continetur, tanta subinde copia, vt aqua cum acidis efferuescat strenue; vti lacunae quaedam deserti Cumani atque Calmuccici in vicinia maris Caspii, lacus aliqui provinciae Iketensis, insignisque regionis transbaikalensis vltra Udam fl. Lacus Zizanensis cum aliis, quos videsis in *Itinerario Pallassiani Vol. 3. p. 176. 178. 183. 216. 223. 254.* Multo vero maior est abundantia Natri in locis depressis sale culinari atque Glauberiano copiosius efflorescentibus, quorum in desertis Tatariae atque Sibiriae magna est copia. Sal horum terrestre collectum saepe quartam, imo dimidiam et vltra partem Natri liberi, nec quidquam saturati largitur. Talesque conualles salibus floridae circa omnes fere lacus falsos occurrunt.

§. 6. Datur in multis huius naturae locis Natrum fere purum. vel cum parcissima Salis medii mixtura efflorescens. Eiusmodi repertum fuit versus mare Caspium ab vtraque parte Wolgensis aluei, maxime ad Orientem eius: vnde in parte australiore deserti Kirgifici itidem dari concluderim, quod omnibus momentis Calmuccorum deserto simillimum est. Non minus diuites eo sunt campi Miaesum et Tobolin fluuios interiacentes. Maxime purum inueni Natrum in australiore ripa Lacus sic dicti diuini (*Alla kul*) triginta stadiis russicis a Miaeskaja fortalicio, quindecim a Miašo fluuio distantis; multa

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. C c toque

toque adhuc copiosius circa pagum *Ptitſchie* dictum, 90 ſtadiis a fortalicio *Miaeskaja*, ſeptuaginta ab oppidulo *Kurtamysch* diſtanti, ubi planities arundinoſa in circumferentiam fere 10 ſtadiorum, ad occidentem colliculoſae regionis extenſa, innumeris locis *Natro*, ad inſtar niuis, obteſta albet. Datur deinde ad ipſum riuum *Kurtamysch* *Tobolio* aquas mittentem, in regione pagi *Motſchalowa*, circa lacum riuo vicinum, 15 fere ſtadiis infra oppidum *Kurtamysch*; et ad *Tobolem* ipſum prope *Zarew kurgan*, in vtraque ripa; pluribusque locis. Aliis ſalibus varia proportione admixtum *Natrum* in australioribus deſerti *Barabensis*, in campis a riuo *Alei* denominatis, inque planis *Dauriae* circa *Selengam*, *Ononem* et *Argunum* proſtat. *Natrum* purum, quod *Celeberrimo Model* pro analyſi ſeruibat, non ſolum e *Persia*, ſed et *Aſtrachania* et e frigido quoque ſolo *Ochotenſis* portus adlatum fuerat, referente ipſo in *Opuscul. chem. ſubſecuiis*. Si locos requiras, ubi inter neutrorum ſalium effloreſcentias parua quantitate emicat *Natron*, tum quidem vix non ubique in campis ſaliſ *Macoticis*, *Caspicis*, *Sibiricis* illud offendas, quorum ſalſugo plerumque aliquam *alcaleſcentiam* prodit, maximeque talis fauet plantarum ſalis amantium prouentui.

§. 7. Videmus *Natrum* ſemper *Salibus* neutris, *muriatico* et *Glauberiano* comitem eſſe, imo et *Glauberianum* raro abſque *muriatico* ſolum occurrit, Plerumque *Natrum* alterutro horum ſalium vel amboſus admixtum exſtat, et puriſſimum quoque ſemper in vicinia *Salis muriatici* reſidet. Et vero hoc (per §. 1.) ſemper ſtrata horizontalia pro matrice agnoſcit, eorumque decliuiſus maxime in locis, ubi in planitiem excurrunt, reperitur. *Strata* horizontalia calce et argilla conſtare, et in vicinia maxime *Salinarum* *gypſum* vel *alabaſtrum* prodere ſaepe ſolent, quemadmodum ad *Kamam*, *Tſchuſſowajam*, circa *Lacus* deſerti varios, *Bogdenſem*, *Inderienſem* ad

ad fodinas salis Ilezkienſes ab Itineratoribus noſtris obſeruatum eſt. Cuius vero regulae exceptionem hucusque faciunt Salinae in regione elata inter Wolgam et Dwinam, circa Totmam et Solgalizkaja obuias, itemque ad Balachna, et circa Angaram, ubi ne in ripis praeruptis quidem vlla gypſeae naturae ſubſtantia inueniri potuit. At multo rarius eſt in vicinia regionum, quae Sale diuites ſunt, Schiſtum carbonarium et Carbones ſoſſiles reperire. Waldaici colles quidem, qui Staroruffenſibus ſalinis finitimi ſunt, et regio Angarae, carbonarios Schiſtos in ſe continent, ſed ſexaginta ad minimum ſtadia diſtantes, adeoque vix pro ſcaturiginum ſalarum focis agnoſcendos. Contra in tota deſertorum Sale ſcatentium planitie nihil eiſmodi occurrit, et montes circa Kuſnezk, Carbone ſoſſili abundantes, Sal nuſquam produnt.

§. 8. *Natrum* apud nos, vt in India, plurimum et puriſſimum in locis Sale effloreſcentibus, quae Ruſſis *Solonzi*, Tataris *Aſi* dicuntur, inueniri. dictum eſt. Sunt talia loca vel ripae lacuum Sale imbutorum, vel lacunae parum depreſſae, variae magnitudinis. Quemadmodum in ripis ab euaporatione aquae lacuum ſalſae relinquitur, ſic in depreſſis lacunis vel a ſudore ſalſo terrae, ſcaturiginum latentium Sale, vel confluxu aquae pluuias terras ſalſas elutrientis coaceruatur. Videntur et ſolis calore flores ſalino - natroſi e terra elici poſſe, quod in ripis humoſis fluuiorum paſſim obſeruare eſt. Variis locis deſerti Calmuccici et camporum Hetenſium ad aliquod Orgyas fodiendo et terebrando inquiſui in naturam ſoli lacunarum Sale albeſcentium. Superficies in eiſmodi regionibus, vt et fundus lacuum ſalſorum, qui profundi nunquam ſunt, vulgo argilla, vel luteſcente, vel coeruleſcente, raro alba, ſaepiusque calcareae naturae participe conſtare ſolet, cuius ſummum arena, motu ſuperinducta, mixtum ſemper eſt. Interdum quoque ex Humo nigra effloreſcunt Sales,

dum locus depressus sit. Ad profunditatem vnus pedis solum falsum est, vix tamen e libra plus duabus drachmis Salis largitur; profundior minus et minus Salis habet; et intra bipedalem profunditatem Salis iam nihil inest. Vbi Natron adest, in ipsa illud superficie haeret; infra Sal muriaticus est. Post $1\frac{1}{2}$ vel 2 pedum stratum, sequitur glarea argilla infecta, mixtaque vel lapillis, vel (in deserto Caspio) concharum fragmentis; et glaream denuo excipit argilla vel purior, vel calcarea, quam perfodere non potui. Stratum glareosum, nisi in lacunis falsis circa Tobolium, quae argillam albam profunde substratam habent, nusquam abest Interdum gypseis particulis, praeter argillam miscetur; quod praesertim in solo natroso ad pagum *Prifchie* (§. 6.) vidi; ad *Allakul* (§. 6.) autem, pauperioremque lacum amarum *Iarle* dictum, arena vbique miculis seleniticis copiose mixta fuit, ita vt tertiam vel quartam partem Selenites constituere videretur.

§. 9. Secundum varium puritatis gradum, locorum quibus efflorescit, scaturiginumque naturam et tempestates coeli, varia sub forma occurrit Natron: modo pruinae instar, praesertim in humosis locis; modo niuis instar leuidensae efflorescens; plerumque in forma pulueris impurioris vel in moleculas coacti, quo terra a digiti ad duorum pollicum altitudinem tegitur; post pluuias interdum crySTALLINAM formam induit. Si maiori quantitati Salis muriatici vel mirabilis mixtum est, tum vel eadem, vel saepius crySTALLINA forma, praesertim in ripis lacuum atque lacunis profundioribus reperitur. Quum natura sua Natron aëri expositum in puluerem fatiscat, non sine impuritatibus et terrae mixtura colligi potest, quam etiam iniquationem pluuiæ et venti, puluerem agitantes, augent. In locis vbi abundat, cum cura verrendo solum non purius obtineri potest, quam vt dimidium ponderis depuratione amittat.

§. 10. *Natron* hoc modo collectum , non depuratum, virtute ad depuratum eodem gradu accedit , quo minus inquinatum est , sed alcalinam naturam semper prodit , vnde natrosae lacunae facile ab iis quae salibus neutris roridae sunt, distinguuntur. Solutione in aqua atque filtratione ab omni terreo squalore facile depuratur. Reses in filtro limus tum vel arena , micaceis saepe particulis nigris remixta , simulque argilla cinerea vel alba , interdum et humus esse deprehenditur. Semper quoque accedit portio calcareae vel gypseae materiae, saepissime vtriusque , proportionem secundum locum , salisque neutri , quod *Natron* comitatur , naturam. Vbi muriatico sali adiunctum est , plus calcis , vbi Glauberiano Sali , plus gypseae impuritatis adest , quae interdum octauam , imo sextam totius ponderis efficit partem. *Natron* ipsum paulo plus aquae pro solutione requirit , quam Sal mirabilis , multoque plus quam Sal muriaticus ; ideoque cauta et lenta crystallisatione ab admixtis hisce salibus satis depurari potest ; dum primo Sal mirabilis , deinde *Natrum* , denique Sal muriaticus in crystallos coeunt , relicto lixiuio Sale imperfecto graui (*Mutterlauge*). Maxime Sal muriaticus hac via purissime secedit. Quum regiones nostrae *Natro* maxime abundant , ad vsus oeconomicos sufficiet , si eodem modo, ac in Sale cathartico Astrachanensi et Sibirico fieri solet , in depuratione *Natri* terrei maxime impuri , *Natrum* primae crystallisationis , in puriore , primae atque secundae , in vsus secernatur ; reliquum omne in lacunas salvas ad nouum *Natri* incrementum refundatur. Vt accuratius determinetur proportio *Natri* salibus terreis cuiusdam regionis eliciendi , omnino quidem ad Chemiae sublimioris processus recurrendum est. Adeoque, inter alias vias acidum Vitriolicum secernendi a residuo crystallisationis , sulphurificatio cum carbonum puluere , saturatio per acetum , eiusque expulsio per destillationem vel calcinationem ; pro segregando acido Salis , translatio *Natri* , per

acidum nitri , in Nitrum cubicum (Methodo Marggrafiana) , acidique nitrosi per deflagrationem expulsio praecipue tentari debent , vt , in productis atque deperditis , residui ingredientia ad calculum euocari possint. Non solum hoc scopo , sed etiam ad oeconomicos vsus praeuia vstio , non admodum violenta , perquam utilis est , qua impuritates vegetabiles , quibus crytalli alias tinguntur , comburi possint , acida minus tenaciter Natro vnita expelluntur , partesque seleniticae ad faciliorem secessum disponuntur.

§. 11. Mihi hoc loco plenam analysin chemicam Alkali mineralis dare non est scopus ; imo superflua ea foret , posteaquam per labores Celeberr. Virorum , *Modeli* in analysi Salis perfici (Conf. *Ej. de Borace natua tract. et Opusc. Chem.*) , *Marcgrafii* in *diff. de Alkali Salis muriatici* (*Ej. Opusc. Chem. Part I. pag. 34. seq.*) et de Lapide Serpentino dicto (*Ib. P. 2. p. 1. seq.*) deinde *Pottii* , *Baronii* , *Neumanni* aliorumque qui Sal culinare et Boracem tractarunt , multo minus quoad Natri cognitionem chemicam desiderari possit , quam in aliis permultis subiectis nobis superest. Quae hic tradam , tantummodo tendunt eo , vt Natrum nostrum vel Alkali terrestre naturale , cum Natro veterum et recentiorum , vbicumque in rerum natura et apud auctores occurrit , comparabile sistam.

§. 12. *Natrum nostras naturale , nondum depuratum* , qualicumque demum colore , forma et mixtura occurrat (§. 8. 9. 10.) , plerumque in odorem est , interdum vero volatilem , pungentem et fere suffocantem odorem spargit , qualem etiam in Sale Ochotensi *Modelius* notauit. Ortum is plerumque debet acido Salis , continuo e neutro connubio se extricanti , rarius putredini immixtorum vermiculorum , similiumque ; quo in casu accidentalis est , semperque satis cito , citissimeque per vstionem eradicatur. Vbi solum Natro efflorescit , aestate nunquam absunt loca eiusmodi odorem spargentia.

Depu-

Depuratum contra *Natrum* odore caret. *Gustum* habet alcalinum, minus acrem alcali vegetabili, cuius caeterum plerasque proprietates possidet. Soluitur in triplo, aliquando in duplo fere pondere aquae, facileque *generat crystallos*, quorum pars secundum parietes supra solutionis superficiem ascendit. *Crystalli* oriuntur pelluciditatis aquae, formae plerumque prismatico-multangulae, extremitate oblique truncatae, aliquando sub rhombeae; interdum aciculas et radios quasi referunt. Haec diuersitas non solum in Natro purissimo variarum regionum notatur, sed etiam in eodem tractu localis est. Quaedam crystalli natrosae in humido aëre humescunt, et pondere augentur, sed nunquam liqueſcunt. Plerumque aëre temperato in puluerem semſim fatiſcunt, subtilissimum, abſſimum, cretae farinaceae similem, simulque paulo plus septima parte ponderis amittunt. Si denuo aqua soluat *Natrum* in puluerem resolutum, pauxillum terrae calcareae in fundo remanet; iterata tum crystallifatione, prioris formae prodeunt crystalli et tantundem aquae, quantum fatiſcendo amiſerant, retinent. In tigillo seu ad ignem lampadis non spumescit, vti Borax, neque liqueſcit, nisi postquam igne rubuit. Humido aëri post talem calcinationem expositum denuo humore reſorbto pondus suum auget, attamen non magis, quam prius, liqueſcit, sed post aliquod tempus item in puluerem dilabitur.

§. 13. *Natrum purissimum* aqua solutum, e solutione alcali vegetabilis ſedimentum nullum praecipitat, neque turbidum reddit liquorem; crystallos vero proprias mutat, quae euaporatione inſtituta turbidas atque imperfectas ſe ſiſtunt; attamen ſi alcali vegetabilis non plus quam quarta pars ponderis, admixtum ſit, in aëre non liqueſcunt, neque vero in puluerem fatiſcunt.

E Natro, quod ſale neutro muriatico iuquinatum eſt, et e natro fontano, ſcaturiginis medicatae prope Sareptam, vel

ex ipso forte euaporatione obtinendo , vel in efflorescentia natrofa soli huic fonti vicini obuius , per affusionem Alkali vegetabilis multo plus Natri terrei praecipitatur , quam residuum lixiuium Salis muriatici terrei , cuius proportio in his per exigua est , praebere posse videtur . Terreum hocce praecipitatum , quod verosimillime Natron plurium regionum per experimenta dabit , quodque Sales mirabiles natui nostri puri , natro non permixti aequae copiose largiuntur , simillimum est *Margnesiae* e Sale Seidschützenfi aliisque ad finibus obtentae , itidemque per experimenta *Pottio* aliisque Chemicis debita , alternatim sub forma terrea et Salina fisti potest .

§. 14. Cum *acido vitrioli* Natrum nostrum natuum praebet Salem Glauberianum solitum . Post saturationem plenam non solum Natri , sed et alcali vegetabilis insigne quantum superaddi potest , et nihilo secius omne in Crystallum Salis mirabilis coit , qui nullam alcali praedominantis signum praebent . *Alumini* additum , terram eiusdem propriam praecipitem dat , et in Salem glauberianum abit . Cum *acido nitri* generat Nitrum cubicum , omnibus notis perfectum , licet vix dimidium eius crystallorum formam cubicam assumat . Cum *acido Salis* , aceti et Crystallis Tartari , aequae ac Soda depurata , efficit sal commune regeneratum , Terram foliatam tartari siccam , crystallinam et Sal polychrestum Seignettiae dictum . Ex *Ammoniac* Sale volatilem alcalinum spiritum pellit , et sal commune regeneratum constituit . Sed nullo horum acidorum e Natro nostro , vel Caspico vel Sibirico , quaecumque vestigium Salis Sedatiui Hombergeri obtinui potuit neque apparuit terra illa caerulea , quam *Henkelius* in Soda detexit , quaeque notante Cel. *Model* (*Opusc. Chem. P. I. p. 302*) in solutione feruida Natri crudi quaeri debuisset , vbi forte ad phlogistica principia referenda sit .

§. 15. Cum *Sulphure* liquatum Natron nostrum Hepar sulphuris constituit , quod Alkali vegetabili non mutatur . Cum
omni

omni *pinguedine* animali vel vegetabili saponem efficit , quem tamen per se solidum reddere non solet ; si vero calce acuatur, tum aequale pondus Natri et pinguedinis praesertim si sebum more huiusmodi adhibeatur , citissime coit in saponem solidum, efficacissimum , nequaquam acrem , verbo optimum.

§. 16. *Natrum* quotidiana fere naturae operatione generari vel perfici , permultis observationibus et experimentis supra citatorum Chemiastorum constat. Etiam natium apud nos per omnes perfectionis gradus, a terra salina ad purissimum Natrum , reperitur ; unde diuersitas illa oritur , quae non solum inter Magnesium seu terram salinam (§. 13.) ipsumque Natrum , sed etiam in ipso Natro depurato , non quidem insignis et essentialis , sed tamen quoad solubilitatem, chrySTALLIFICATIONEM , plus minus copiosam , acidorum absorptionem , fusibilitatem (§. 12.) notabilis est. Copia vero Natri , in desertis falsis , circaque lacus et in ipsa eorum muria praesens , non a sola eius generatione primitiua deduci debet ; quum ubique , per observationes constet illud *separatione* vel liberatione a salibus neutris muriatico et Glauberiano produci et multiplicari. Iam dudum perspexerunt Chemici caloris vi partem acidi salium neutrorum dissipari. *Rores falsi* , quos in desertis nostris Natri adspersione ditibus vulgus obseruauit , confirmarunt Peregrinatores ab Ill. Academia in regiones istas missi, ab acido horum salium , volatili facto , videtur oriri. In locis ubi salia efflorescunt, per odorem se prodit acidum salis, partim per calorem , partim mutua actione diuersorum inter se salium , praesertim Vitriolici acidi in Glauberiano sale et argilla contenti. volatile factum. Accedit , quod Natrum maxime in australioribus desertis detur , eo copiosius puriusque , quo magis calori expositum est solum , quo parciora et magis dispersa salia habent , quoque minus depressa sunt loca. Accedit , quod efflorescentiae salinae aestate magis natrosam

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. D d indo

indolem produnt et ripae lacuum , qui interno margine , totoque alueo tantum Salem muriaticum vel Glauberianum continent , externo margine natrosae solent esse ; nullam aliam certe ob causam , quam quod sales ibi longius in statu sicco Solis calore expositi fuerunt. Sed et experimento de liberatione Natri a connubio acidi neutros sales constituentis plane conuictus fui. In deserto Calmuccico , vbi primum Sal natrosum inueni , et priores observationes nondum callebam , Libras duas seu 3xxxix eiusdem ab impuritatibus terreis mundaueram ; ex his vnam libram crebro aqua humefactam , inque asserculo extensam pluribus diebus Soli , et quum hiems ingrueret , calore hypocausti exponebam. Notabilis erat acidi salini continuo euolantis odor. Postquam hoc vigesies circiter iterassem , ex vtraque libra separatim Natron crystallitatione secreui , atque sic ex illa Salis libra , quam siccam seruaueram , 3viiiß , ex altera vero (cuius post crebras humefactiones tantum 3xiiiß supererant) paulo supra 3x , cum 3ß Selenitidis accepi. Exoticis quoque observationibus haec Natri separatio confirmatur. In Aegypto v. gr. Natrum muriaticum in limo Nilotico contentum , in fossis exponitur Solis ardori (Conf. *Bomare Mineral. P. 1. p. 314*) ; idemque ab obtinendum copiosius Natrum e Sale marino ad Promontorium Bonae spei fieri solet , docente Kolbio (*Beschreib. des Kaap*). Plantae falsae , quae Sodam largiuntur , vt Salicornia , Sal-solarum species variae , in recenti succo maximam partem Sal neutrum muriaticum , et Natri perparum continent ; vnde patet etiam Sodam ex his plantis praecipue dissipatione acidi Salis , per combustionem et calcinationem , effici.

§. 17. Hucusque Natrum , quod inexhausta paene copia intra Imperii fines occurrit (§. 4. 5. 6.) , quodque dissipatione acidorum , quae partem eius in Sal mirabile et commune mutatam retinent , pro lubitu liberari , atque perfici potest

potest (§. 16.), perquam exiguum vsum publice praestitit. Buraetica gens et Mongoli theam, quam sibi incoctis Chinen-
sibus foliis et inquilinis quoque plantis, cum lacte et butyro
parant, Sale mirabili natroso condire solent; adeo largiter,
vt vix omne illud Sal terreum, quod *Chudshir* ipsi vocant, in
decocto illo pingui et fere saponaceo, solutum retineri queat.
Tatari astrachanenses e plantis falsis comburendo sodam pa-
rant; non vero distinguere plantas norunt, quamquam non
omnes plantae in solo falso prouenientes Sodam vel Natrum
vegetabile, sed multae alcali vegetabile praebeant. Colligunt
illas promiscue autumnis iam emarcidas, siccant penitus, tum-
que in fossis terrae argillosae lente comburunt, productos ci-
neres deinde in ollis igne torrent, vt in massam coalescant,
quae sodae verae quartam circiter partem, ab hispanica nullo
modo diuersae continent. Attamen huius nunquam ultra cen-
tum pondo Russica quotannis ibi parabatur; hodie vero etiam
minus; et ne Pharmacopaeis quidem, multo minus mechani-
cis operis, inquilina sufficit soda.

Ad ferruminanda varia metalla Natrum nostrum locum
Boracis supplere poterit, licet non omnino virtutem huius
aequat, minusque potens est fusibilitatis auxilium. Apud fa-
bricas argentarias Nertschineses constitutus Metallurgus
(*Bergprobire*) Princeps *Kugushef* Natrum muriatico et Glau-
beriano Sa'e inquinatum, quod ad Urun, prope Solonesch-
naja colligitur, triplici solutione in aqua pura, et deinde du-
plici per aquam calcis depurabat, et cuiusuis crystallisationis
primum productum retinebat; quodque post quintam crystal-
lisationem obtinetur, lacte dulci soluebat. Prodit hinc vix
octaua pars primi ponderis (vid. *Itinerar. propr. p. 396.*), sed
adeo nobilitatum Natrum, vt ad metallurgicas operationes
omnem Boracis vsum praestet. Processus iste e China, Ti-
betho, aliaue orientis regione acceptus videtur; praesertim

quum adeo consentaneum fit, quod de vera Borace nouimus; cuius matrix f. Tincal dictum pinguinositate sua, ipse Borax indole, quam inter chemica experimenta prodit, saponacea, phlegma ab eiusdem destillatione saponaceum, solubilitas in Spiritu vini, aliaque obseruata Chemicorum atque Mineralogorum, similem ortum subindicare videbuntur. Et omnino si sit verum, quod et *Beaumé* (in *Chym. experim.*) docet, Boracem apud Indos e Natro cum pinguibus variis in fossis argillaceis diu subacto parari, pulcherrima foret apud nos occasio Boracem conficiendi, quod vltioribus experimentis dignissimum vtique esset.

Sed quamuis eo vsque progredi non liceat, tamen Natrum nostrum ad plerosque mechanicos vsus, loco cinerum clauellatorum, qui tantas sylvarum strages postulant, adhiberi cum emolumento potest. Possumus illa, exemplo alienigenarum, vt in vitrariis officinis, ad tinctorios vsus, ad Saponem conficiendum, ad dealbandas telas lineas vel goffypinas (quibus Natrum propter minorem acredinem, magis quam alcali vegetabile conducit), tandemque in Pharmacopoliis loco sodae purae, ad parandum Sal Seignettæ, Terram foliatam tartari siccam, saponem medicos, aliaque composita; imo in officinis metallariis Natrum terrenum loco fluoris non inutile erit. Si in natali loco depuraretur, vestigariæ expensæ minui possent, lixiuiæque salina, a depuratione reliqua, additandas terras nitrosas vsum præstare poterunt.

LEDVM BVXIFOLIUM,
NOVA EX AMERICA SEPTENTRIONALI
ALLATA PLANTAE SPECIES;
QVAM DESCRIPTIONE ATQVE ICONE
ILLVSTRAVIT

PETRVS IONAS BERGIVS.

Excubantibus nostra aetate quoquo versus eruditorum quam- plurimis pro contemplatione Naturae, atque sic etiam speciatim pro perficienda re herbaria, vix quidquam iucundius accidere solet, quam cum offeruntur stirpes quaedam nouae, nemini Botanicorum prius visae. Ego proinde me non peccaturum spero, si stirpem Americanam, ita vt dictum est comparatam, coram illustrissima Academia Imperiali exhibeam, licet fortassis a reprehensione temeritatis non absim, quod cum tam pusillo munere prodire ausim. Verum quandoquidem inter plantas Americae septentrionalis et Sibiriae exstans saepius deprehensa est similitudo et cognatio, puto non incongruum fore, vt cum inuentis nuper in Sibiria plurimis stirpibus nouis haec mea ante conferatur, quam cum publico communicetur. Caeterum eo saltem nomine sese commendat dicta haecce stirps, quod augmentum conciliat Ledi generi, haecenus perquam inopi, vtpote cuius vnica duntaxat in hunc diem nota fuit species. Habitus Americanae huius Ledi speciei generatim satis conuenit cum habitu nostrae Europaeae, sed dum haec folia habet linearia, illa eadem gerit ouata. Reliquae differentiae fusius adumbrantur tam in subiuncta mea descriptione, quam in adiecta icone, quae ad specimen siccum, e solo natali allatum, exacte adornata est;

Tab. III.
Fig. 2.

LEDVM (buxifolium) *foliis ouatis*.

Habitat in Noua Iersea Americes, solo sterili, arenoso.

DESCR. *Frutex* paruus, vix pedalis. *Caulis* erectus, teretiusculus, cicatricibus scaber, cinerascens, determinate ramosus. *Rami* ad interstitia stata, subuerticillata foliosi vel cicatrifati; singuli pariter ramulosi, erecti. *Folia* Buxi, sparsa, frequentia, breuiter petiolata, oualia, obtusa, duas vel tres lineas longa, superne subrugosa, subtus laenia, punctata, vtrinque nitida, margine vndique reclinato. *Corymbi* florum terminales, simplices, pedunculis vnifloris, pubescentibus. *Bracteae* oblongae, obtusae, subimbricatae, patentes, in receptaculo proprio sitae, vnde pedunculi exeunt.

CALYX: *Perianthium* monophyllum, glabrum, basi intrusa, quinquangulari, quinquepartitum; laciniis lanceolatis, acutis, erectis. COROLLA alba; *Petala* quinque ouata, obtusa, calyce longiora, sessilia, patentia. STAMINA: *Filamenta* decem subulata, corolla longiora, erecto-patentia alba. *Antherae* purpureae, ouatae, paruae, hinc planiusculae, inde didymae, bifurcatae, incumbenti-erectae. PISTILLUM: *Germen* superum, subrotundum, vndique sulcatum, scabridum; *Stylus* cylindricus, erectus, longitudine staminum; *Stigma* simplex, submarginatum, truncatum. CAPSVLA ouata, acuta, subrugosa, trilocularis, triualuis: valvulis latere interiore longitudinaliter dehiscentibus. SEMINA plurima, parua, ouata, scoe interstincta.

DIGITALES HYBRIDAE,

Auctore

I. T. KOELREYTER.

A.) *Species hybrida.*

EXPERIMENTVM I.

Digital. lutea. ♀. } Tab. IV. Fig. I. et II.
Digital. purpur. ♂. }
Vid. Exp. inuers. VI.

Experimentum hoc An. 1768. d. 4. Iul. in tribus floribus Digitalis luteae (a), puluere antherarum Digitalis purpureae *Lin.* conspersis primum factum est, dein An. 1772. d. 9. Iul. in tredecim aliis repetitum, felici semper successu.

Plantae, An. 1769. et seq. inde prognatae sunt plurimae, siue speciosam ipsarum magnitudinem, summam caulium luxuriam, tenacemque radicum vitam spectes, siue florescentiae diuturnitatem eximiamque florum pulchritudinem, quos altero demum anno sub initium Iunii plerumque explicare incipiunt, inter hybridas, a me hucusque procreatas, loco certe haud infimo ponendae.

Descriptio.

RADIX perennis; cum ♂ tantum biennis sit, ac ♀ saepe vix longius perdurare soleat. Eaedem enim ♀, quarum prouentum annus 1769. suppeditauerat, praesenti hoc anno 1776. iam septima vice floruerunt, ac in hunc usque diem vegetes adhuc persistunt ipsarum radices.

Caulis

(a) LINN. Sp. Pl. p. 867. n. 2. HALL. Hist. stirp. Tom. I. p. 143. n. 332.

CAVLIS altior, quam ♀ et ♂; vtpote qui in altitudinem 8^l. 6 — 8^l non raro excrescit; itemque tam prima sub florescentia, quam succedentibus annis plures longe (duodecim interdum numeravi) ex vna eademque radice, praesertim annosa, quam ♀ vel ♂; crassior quoque idem, quam ♀, ast minus crassus quam ♂.

FOLIA latius lanceolata, laetius virentia, rigidiuscula, crebrioribus ac profundioribus denticulis oblique incisa siue ferrata, magisque pubescentia ac rugosa, quam ♀, quae denticulata tantum rarius, angustius lanceolata, obscure viridia, rigida ac glaberrima; ♂ autem rotundioribus crenis incisa, ex ovato lanceolata, laete viridia, rugosa, villosa ac mollia sunt. Folia *ima* ♀ fere petiolata dixeris, cum ♀ omnia sessilia; ♂ autem vere petiolata habeat. *Coloris* purpurascens tam in caulibus quam foliorum nervis vix aliquid in ♀; in ♀ eius plane nihil, in ♂ caulibus, petiolis foliorumque nervis potioribus vero maxime conspicuus. *Foliola* minora, quam ♀, ast longe maiora, quam ♂.

SPICA *florum* ad vnum latus conuersa, minus dense arctèque imbricata, quam ♀, multoque magis congesta, quam ♂. Eadem ab initio, ♀ instar, parum nutat.

PEDUNCULI longiores, quam ♀, ast breuiiores, quam ♂.

FLORES inter ♀ et ♂ mediae magnitudinis ac conformationis.

CALYX: *lacinae* ovato-lanceolatae, maiores, patenteriores, latiores, minusque acuminatae, quam ♀, sed minores, minus patentes, angustiores et acutiores, quam ♂. *Calyx* post corollae defluuium connuens; ♀ clausus, ♂ vero patulus.

COROLLA amoene rubella, cum aliquali flavedinis mixtura, intus *maculis* ac *punctis* nonnullis purpureis, albo circumfusus

fufis notata; in ♀ ex albido flauescens, immaculata; in ♂ purpurea, maculisque concoloribus in fundo albo longe lateque dispersis variegata. *Lacinia* corollae superior emarginata, obtuse parabolica, laterales duae ovales, inferior ovata. In ♀ vero superior acute bifida, laterales triangulares, inferior oblonga, et in ♂ laciniae corollae omnes rotundiores: superior integerrima, retusa quasi ac lata valde, laterales semicirculares, inferior parabolica.

STAMINA superne situ inter se fere parallela, rictumque siue laciniarum corollae diuisionem vix attingentia; in ♀ satis diuergentia, longiorumque pari supra laciniae superioris lateraliumque basin emergentia; in ♂ superne conuergentia, retroque floris rictum persistentia. *Filamenta* inter ♀ et ♂ mediae longitudinis et crassitie. *Antherae* punctis purpureis rarioribus adpersae; in ♀ immaculatae, et in ♂ punctis purpureis crebrioribus variae. Eaedem, magnitudinis respectu, infra vtriusque parentis antheras, ob *pollinis* boni ac copiosi defectum, persistunt. *Moleculae* eius maximam partem effoetae, collapsae, paruulae, formaeque minus regularis, longeque pauciores, quam in parentibus; paucissimae tantum earum melioris notae, succique masculi portione oleosa scatentes. Hae quoque solum in aqua subrotundam induunt formam, cum effoetae istae suam haud vel mutant, vel notabiliter intumescant. *Moleculae* pulueris antherarum ♀ et ♂ omnes ellipticae, inter se inuicem aequales, masculinoque semine oleoso turgidae.

PISTILLUM mediae inter ♀ et ♂ magnitudinis ac formae: *Germen* oblongum, infra styli basin sacculum quasi efformans, ac laete virens. *Stylus* modice incuruus, summitati germinis superiori parum oblique insertus. *Stigma*

profundius bilobum ac obtusiusculum. Germen ♀ ouato acutum ac obscure virens. Stylus incuruus valde, summitatem germinis aequalem recta excipiens. Stigma minus profunde bifidum et acutius. Germen ♀ ouatum, subincurvum, apicem versus stylo in duas partes inaequales divisum ac pallide virens. Stylus fere rectus, stigma versus crassior ac purpura leviter tinctus, inferne quasi infractus, germinisque summitati oblique deorsum immerfus. Stigma profunde bilobum, obtusum.

PERICARP. *Capsula* ouata, leuiter acuminata, ac ob *feminum* defectum hinc et inde collapsa. *Capsula* ♀ ouato-acuminata et ♂ ouato - conica.

SEMINA bona, ut plurimum nulla; partim spurio tantum modo, partim plane non impraegnata. Semen vnum alterumue ad sensum bonum in capsula hac vel illa rarissimum.

Not. Quamuis in hoc experimento ad impraegnandam ♀, puluere antherarum, de floribus ♂, intensius rubentibus, semper deprompto usus fuerim: indiuidua tamen plantae huius hybridae non omnia vno eodemque florum colore praedita erant; plurima equidem inter ♀ et ♂ medium, qualem scilicet supra notavi, prae se ferebant; sed praeter haec etiam non pauca aderant 1.) floribus dilutius rubentibus exterius, interius pallide luteolis, ut et paucissima alia 2.) floribus albis paulloque maioribus, naturae ♂, cultura mutatae ac facile aberrantis vitio adscribenda, ac varietatum nomine nuncupanda.

EXPERIMENTVM II.

Digital. lutea. ♀.

Digital. Thapsi. ♂.

An. 1769. d. 9. Iul. in Flor. 20.

Vid. Exp. inuerf. VII.

In vniuersum plantae, hoc experimento An. 1770 et 1771. magno numero enatae, cum istis Exp. I. plane conueniebant. Flores equidem plerorumque huius Hybridae individuorum, ex natura ♂, angustiores, quam Digital. {^{lut. ♀.}
purpur. ♂. : exceptis duobus exemplaribus, quorum flores huic amplitudine fere aequales erant: e quo momento Digitalis Thapsi naturam sub climate nostro frigidiori in istam Digitalis purpureae facile transgredi, quodammodo elucet. Hoc tamen non obstante, inferior corollae lacinia fere in omnibus longior adhuc mihi visa est, quam in Digit. {^{lut. ♀.}
purpur. ♂. floribus.

Florescentia harum plantarum a medio Iunii in Septembrem vsque durauit.

EXPERIMENTVM III.

Digital. ferrugin. ♀.

Digital. ambigua. ♂. (b.)

An. 1767. d. 6. Aug. Flor. 3.

— 1772. d. 3. — — 12.

ib. postea. d. 8. Aug. — plur.

Descriptio.

Tota planta minus glabra., quam ♀, magis verò, quam ♂.

CAVLIS tenuior atque flexilis magis, quam ♀, crassior ac rigidior, quam ♂.

FOLIA lanceolata, vixque denticulata vel obiter tantum: latiora, breuiora, acutiora, teneriora laetiusque viridia, quam ♀, sed angustiora, longiora, obtusiora, rigidiora

E c 2

ra

(b.) HALL. Hist. stirp. Tom. I. p. 143. n. 331. it. MURRAY in Hort. Goettigeni.

ra ac obscurius virentia, quam ♂. Folia ♀ vero lineari lanceolata, integerrima, ac ♂ ouato lanceolata, denticulata s. ferrulata.

PEDVNCVLI longiores, quam ♀, ast breuiores, quam ♂.

FLORES maiores, laxius dispositi, nec situ omni ita aequales, ac ♀, ast minores, densiusque stipati, quam ♂, nec adeo secundi, sed circum omnem paene caulis ambitum aequaliter fere prodeuntes.

CALYX: *laciniae* angustiores, longiores et acutiores, quam ♀, latiores, breuiores ac obtusiores, quam ♂.

COROLLAE *color* inter ferrugineum ♀ et luteum ♂ quasi medius, venis pallidioribus, quam ♀, ast obscurioribus picta, quam ♂. *Venter* corollae minus quidem vrceoli formam exhibens, quam ♀, profundior tamen, quam ♂. *Lacinia* corollae *superior* sat brevis, obtusa cum acumine: in ♀ prominula, in ♂ valde obtusa ac reuoluta. *Laciniae laterales* acutae, triangulares. *Lacinia inferior* oualis, elongata; quae in ♀ oblonga ac valde porrecta, in ♂ vero obtuse triangula ac reflexa est.

STAMINA longiora ac rectiora, quam ♀, breuiora ac flexuosiora, quam ♂. *Pulus* antherarum aequae corruptus, ac in plantis Exp. I. et II. *Stylus* longior, nec ita hamatus, vel aduncus, vt in ♀, sed breuior, magisque incuruus, quam in ♂.

CAPSVLA oblongo conica; in ♀ conica, in ♂ oblonga.

Capsulae maturae minores, quam ♀ et ♂. ac ob seminum defectum hinc inde collapsae, vacuae, seminibusque bonis vel plane carentes, vel vno alteroue tantum, vt videtur, rarius donatae.

Plan-

Plantae hybridae, anno 1773 e seminibus denuo enatae, praeterita huius anni 1776 aestate iam tertia vice floruerunt, et adhuc vigent; prior autem, anno 1768. iam producta, casu nuper admodum periit.

B.) *Varietas hybrida.*

EXPERIMENTVM IV.

Digital. purpur. ♀.

Digital. Thapsi. ♂.

An. 1769. d. 16. Iun. in Flor. 8.

— 1770. d. 26. — — —

Vid. Exp. inuerv. V.

Descriptio.

Tam CAULES, quam *rami* primarii harum plantarum aliquantum breuiores, multo tenuiores atque flexiliores, pluribusque etiam atque longioribus ramulis praediti, quam ♀; at longiores, notabiliter crassiores, rigidiores, paucioribusque ac breuioribus ramulis obsiti, quam ♂.

FOLIA obscurius virentia, ac propter lanuginem adhaerentem incana magis, quam ♀, sed minus, ac ♂. Longiora etiam eadem, sessilia magis et pro modo angustiora, magisque acuminata, crenis acutioribus, quam ♀; ast non adeo longa, sessilia et angusta, crenisque obtusioribus incisa sunt, quam ♂.

PEDUNCULI longiores, quam ♀, breuiores, quam ♂.

FLORES inter se disjuncti magis, nec adeo secundi, quam ♀; ast proximiores sibi, magisque vno versu dispositi, quam ♂. Magnitudo eorundem inter maiores ♀, ac minores ♂ media, atque numerus minor, quam ♀, maior vero, quam ♂.

CALYCIS lacinae angustiores, quam ♀, ast latiores, quam ♂.

COROLLA obscuriore purpura tincta, quam ♀, sed paullo magis diluta, quam ♂. *Lacinae* quoque *inferiori*, ad modum ♂, quae eo praecipue notata est, flavescentis aliquid coloris admixtum erat, breui tamen euanidi. *Maculae* etiam atque puncta obscure purpurea, quibus interiora huius labii variegata sunt, minora, quam ♀, maiora autem, quam ♂. *Lacinia superior* minus emarginata, quam ♀, ast profundius multo, quam ♂, quae integerrimam non raro (*c.*) habet. *Lacinia inferior* longior, quam ♀, ast breuior, quam ♂.

Omnes autem hae plantae, quod probe notandum, in summo gradu foecundae, non minus ac ♀ et ♂, totidemque, quot vtriusque parentis vnquam, optimae notae feminibus repletae erant maturae ipsarum capsulae. **Semina** obscurioris coloris, quam ♀, pallidioris, quam ♂.

EXPERIMENTVM V.

Digital. Thapsi. ♀.

Digital. purpur. ♂.

An. 1770. d. 26. Iun. Flor. 4.

Vid. Exp. inuerf. IV.

Plantae, inuerso hoc experimento an. 1771 et 1772 enatae, istis Exp. IV. simillimae erant; id quod in copula tam specierum quam varietatum hybrida semper fieri assolet, nisi v. g. degeneratio aliqua vnius vel alterius, vel vtriusque earum accidentaliter diuersitati inae interdum oriundae leuiori ansam forte dederit. Foecunditate summa plantarum tam Exp. IV. quam Exp. V. Digitalem Thapsi a Botanicis celeberrimis pro diuersa ac distincta specie male venditari, nec filiam D. purpu-

(*c.*) III. LINNAEVS labium superius subbilobum vidit. Mant. II. p. 567.

pureae c Verbasco Thapso esse, euictum est. Vnam potius alterius esse varietatem, illamque faciem suam hispanicam, licet proprio semper antherarum puluere de industria impraegnatur, post quartam quintamue generationem sub climate nostro frigidiori cum germanica sponte sensim commutare ac in purpuream tandem penitus conuerti, autopfia etiam me vltro docuit. Plantarum, copula hybrida productarum, animaliumue summa foecunditas-varietatis, sterilitas vel summa, vel foecunditas, infra vtriusque parentis modum ac proportionem, plus minusue manca ac suppressa-speciei indicium est omnium longe certissimum.

Copulationes Digitalium aliae frustra hucusque tentatae.

EXPERIMENTVM VI.

Digital. purpur. ♀.

Digital. lutea. ♂.

An. 1765. d. 25. Iun. Flor. 3.

— 1766. d. 8. — — 10.

— 1770. d. 1. Iul. — 29.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. I.

EXPERIMENTVM VII.

Digital. Thapfi. ♀.

Digital. lutea. ♂.

An. 1769. d. 9. Iul. Flor. 4.

Conceptio inanis vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. II.

EXPERIMENTVM VIII.

Digital. lut. ♀. } ♀.
purp. ♂. }

Digital. Thapf. ♂.

An. 1770. d. 28. Iun. Flor. 8.

Con-

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Semina rarissime modullofa.

EXPERIMENTVM IX.

Digital. lut. ♀. }
purp. ♂. } ♀.

Digital. purp. ♂.

An. 1770. d. 29. Iun. Flor. plurimi.

Conceptio et semina, vt in Exp. VIII.

EXPERIMENTVM X.

Digital. lut. ♀. }
purp. ♂. } ♀.

Digital. lut. ♂.

An. 1770. d. 12. Iul. Flor. plurimi.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

EXPERIMENTVM XI.

Digital. purpur. ♀.

Digital. ambig. ♂.

An. 1772. d. 21. Iun. Flor. 10.

Conceptio nulla, vel inanis.

Vid. Exp. inuers. XII.

EXPERIMENTVM XII.

Digital. ambig. ♀.

Digital. purpur. ♂.

An. 1772. d. 21. Iun. Flor. 4.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capsulae maturae ♀ magnitudine quidem fere naturalium, semina autem casta omnia.

Not. Licet ♀ et ♂ pluribus multo quam Digital. lut. ♀. et purp. ♂. Exp. I. propinquitatis vinculis sibi inuicem coniunctae sint, copulae tamen vtriusque euentus plane dispar affinitati minime respondet.

Vid. Exp. inuers. XI.

EXPERIMENTVM XIII.

Digitalis ambigua. ♀.

Digitalis Thapsi. ♂.

An. 1772. d. 8. Iul. Flor. 3.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capsulae maturae et semina, vt in Exp. XII.

EXPERIMENTVM XIV.

Digitalis ambigua. ♀.

Digitalis lutea. ♂.

An. 1772. d. 28. Iun. Flor. 8.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capsulae maturae ♀ magnitudine quidem fere naturalium, semina autem plurima cassa; pauca medullosa mihi visa, sed germinatio fatorum 1778. vt plurimorum aliorum, frustra expectata.

Vid. Exp. inuerf. XV.

EXPERIMENTVM XV.

Digitalis lutea. ♀.

Digitalis ambigua. ♂.

An. 1772. d. 3. Iul. Flor. 19.

Conceptio inanis vel adhuc dubia. Capsulae et semina, vt Exp. inuerf. XIV.

Not. Copulatio mutua infructuosa, quo in plantis veram specierum imaginem agnoscere possis, lapis lydius est. Hac certe infinitae Botanicorum discordiae citius longe atque melius, quam verbis ac coniecturis, diiudicantur. Recte hinc fecisse Cel. MURRAY, qui Digitalem luteam, magno flore C. B. in *Hort. Goett.* sub ambiguae cognomine distinctam speciem declarauit, infructuoso vtriusque huius XVI. et XV. Experimenti euentu solide confirmatur.

EXPERIMENTVM XVI.

Digitalis lutea. ♀.

Digitalis ferruginea. ♂.

An. 1772. d. 27. Iul. Flor. 21.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capsulae maturae ♀
magnitudine circiter naturalium, semina autem casta facile
omnia mihi visa.

Vid. Exp. inuers. XVII.

EXPERIMENTVM. XVII.

Digitalis ferruginea. ♀.

Digitalis lutea. ♂.

An. 1772. d. 4. Aug. Flor. 24.

Conceptio, capsulae maturae ac semina, vt in Exp. in-
verso XVI.

Exp. XVIII.

Digitalis purpurea. ♀.

Digitalis ferruginea. ♂.

An. 1772. d. Iul. Flor. 7.

Conceptio nulla.

EXPERIMENTVM XIX.

Digitalis ambigua. ♀.

Digitalis ferruginea. ♂.

An. 1772. d. 29. Iul. Flor. 3.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. III.

Not. Nonne ouulorum ♀ paruitas hic iterum in causa, cur
foecundatio inuersa in Exp. VI. VII. et XIX. non
sucedat?

EXPERIMENTVM XX.

Digitalis ferruginea. ♀.

Digitalis Thapsi. ♂.

An. 1772. d. 3. Aug. Flor. 28.

— — d. 8. — — plures.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia. Capsulae maturae ♀
fat magnae.

EXPERIMENTVM XXI.

Digitalis { ferrug. ♀.
ambig. ♂.

An. 1772. d. 5. Iul. Flor. 4
proprio pulvere conspersi.

Conceptio ut plurimum inanis; rarissime vera.

EXPERIMENTVM XXII.

Digitalis ferruginea. ♀.

Digitalis { ferrug. ♀. }
ambig. ♂. } ♂.

An. 1772. d. 26. Iul. Flor. 12.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuersh. XXIII.

EXPERIMENTVM XXIII.

Digitalis { ferrug. ♀. }
ambig. ♂. } ♀.

Digitalis ferruginea ♂.

An. 1772. d. 3. Iul. Flor. 15.

— — d. 18. — — 18.

— — d. 26. — — 4.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuersh. XXII.

EXPERIMENTVM XXIV.

Digitalis lutea. ♀.

Digitalis $\left\{ \begin{array}{l} \text{ferrug. ♀.} \\ \text{ambig. ♂.} \end{array} \right\} \text{♀.}$

An. 1769. d. 27. Iun. Flor. 14.

— 1770. d. 19. Iul. — 29.

— 1772. d. 6. — — 20.

Conceptio nulla, vel faltem inanis. Capsulae maturae ♀
fat magnae.

Vid. Exp. inuers. XXV.

EXPERIMENTVM XXV.

Digitalis $\left\{ \begin{array}{l} \text{ferrug. ♀.} \\ \text{ambig. ♂.} \end{array} \right\} \text{♀.}$

Digital. lutea. ♂.

An. 1769. d. 9. et 29. Iul. Flor. plur.

— 1770. d. 20. — — —

— 1772. d. 28. Iun. — — 8.

Conceptio inanis.

Vid. Exp. inuers. XXIV.

EXPERIMENTVM XXVI.

Digitalis purpurea. ♀.

Digitalis $\left\{ \begin{array}{l} \text{ferrug. ♀.} \\ \text{ambig. ♂.} \end{array} \right\} \text{♂.}$

An. 1769. d. 27. Iun. Flor. 10.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuers. XXVII.

EXPERIMENTVM XXVII.

Digitalis $\left\{ \begin{array}{l} \text{ferrug. ♀.} \\ \text{ambig. ♂.} \end{array} \right\} \text{♀.}$

Digitalis purpurea. ♂.

An. 1769. d. 15. Iul. Flor. plurimi.

— 1772. d. 21. Iun. — 7.

Conceptio nulla vel faltem inanis.

Vid. Exp. inuers. XXVI.

EX-

EXPERIMENTVM XXVIII.

Digitalis Thapfi. ♀.

Digitalis {ferrug. ♀. }
 {ambig. ♂. } ♂.

An. 1772. d. 12. Iul. Flor. 3.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerf. XXIX.

EXPERIMENTVM XXIX.

Digitalis {ferrug. ♀. }
 {ambig. ♂. } ♀.

Digitalis Thapfi. ♂.

An. 1769. d. 11. — 13. Iul. Flor. plur.

— 1772. d. 29. Iun. Flor. 20.

Conceptio nulla vel saltem inanis.

Vid. Exp. inuerf. XXVIII.

EXPERIMENTVM XXX.

Digitalis ambigua. ♀.

Digitalis {ferrug. ♀. }
 {ambig. ♂. } ♂.

An. 1772. d. 29. Iun. Flor. 21.

— — d. 10. Iul. — 3.

Conceptio inanis.

Vid. Exp. inuerf. XXX.

EXPERIMENTVM XXXI.

Digitalis {ferrug. ♀. }
 {ambig. ♂. } ♀.

Digitalis ambigua. ♂.

An. 1772. d. 29. Iun. Flor. 17.

— — d. 19. Iul. — 9.

Conceptio inanis vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuerf. XXX.

EXPERIMENTVM XXXII.

Digitalis purpurea. ♀.

Digitalis obscura. ♂.

An. 1766. d. 25. Iun. Flor. 17.

— 1768. d. 8. — — plur.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuers. XXXIII.

EXPERIMENTVM XXXIII.

Digitalis obscura. ♀.

Digitalis purpurea. ♂.

An. 1766. d. 9. Iun. Flor. 10.

Conceptio nulla, vel saltem inanis.

Vid. Exp. inuers. XXXII.

EXPERIMENTVM XXXIV.

Digitalis lutea. ♀.

Digitalis obscura. ♂.

An. 1766. d. 9. Iun. Flor. 10.

— — d. 11. Iul. — 6.

Conceptio nulla, vel saltem inanis.

Vid. Exp. inuers. XXXV.

EXPERIMENTVM XXXV.

Digitalis obscura. ♀.

Digitalis lutea. ♂.

An. 1766. d. 12. Iun. Flor. 10.

— — d. 8. Iul. — 3.

Conceptio nulla, vel saltem inanis.

Vid. Exp. inuers. XXXIV.

EXPERIMENTVM XXXVI.

Digitalis purpurea. ♀.

Digitalis canariensis. ♂.

An. 1773. d. 8. Iul. Flor. plurimi.

Conceptio inanis, vel fortassis etiam vera.

Not.

Not. Plantulae an. 1774. e feminibus enatae sunt duae, quae hybridam faciem haud ambigue referebant, ante perfectionis statum, quod doleo, infortunio deperditae. Experimentum repetitione dignissimum.

Vid. Exp. inuers. XXXVII.

EXPERIMENTVM XXXVII.

Digitalis canariensis. ♀.

Digitalis purpurea. ♂.

An. 1778. d. 10. Iul. Flor. 4.

Conceptio inanis, vel fortassis etiam vera.

Not. Plantulae nonnullae ex his quoque feminibus an. 1774. progerminauerant, sed breui post irrigationis nimiae vitio perire omnes, antequam de vera ipsarum natura certiores me fecerint. Experimentum repetitione dignissimum.

Vid. Exp. inuers. XXXVI.

EXPERIMENTVM XXXVIII.

Digitalis lutea. ♀.

Digitalis purpurea. ♂.

An. 1773. d. 8. Iul. Flor. plurimi.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. XXXIX.

EXPERIMENTVM XXXIX.

Digitalis canariensis. ♀.

Digitalis lutea. ♂.

An. 1773. d. 9. Iul. Flor. 2.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. XXXVIII.

EX-

EXPERIMENTVM XL.

Digitalis ambigua. ♀.

Digitalis canariensis. ♂.

An. 1773. d. 8. Iul. Flor. plurimi.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. XLI.

EXPERIMENTVM XLI.

Digitalis canariensis. ♀.

Digitalis ambigua. ♂.

An. 1773. d. 16. Iul. Flor. 3.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. XL.

EXPERIMENTVM XLII.

Digitalis ferruginea. ♀.

Digitalis canariensis. ♂.

An. 1773. d. 21. Iul. Flor. plurimi.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. XLIII.

EXPERIMENTVM XLIII.

Digitalis canariensis. ♀.

Digitalis ferruginea. ♂.

An. 1773. d. 19. Iul. Flor. 2.

Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

Vid. Exp. inuers. XLII.

EXPERIMENTVM XLIV.

Digitalis {ferrug. ♀. }
 {ambig. ♂. } ♀.

Digitalis canariensis. ♂.

An. 1773. d. 21. Iul. Flor. plurimi.

Conceptio nulla.

Not. Experimenta huius Catalogi plurima, praesertim vero VI. XV. XXXVI. XXXVII. XXXVIII. XL. XLI. XLII. digna sunt, ut a Naturae curiosis studiose repetantur.

ICONVM EXPLICATIO.

Tab. IV. Fig. I. Spica florum Digit. $\left\{ \begin{array}{l} \text{lut. } \text{♀.} \\ \text{purp. } \text{♂.} \end{array} \right.$ Exper. I.

Fig. II. A. Flos adhuc clausus.

B. C. D. Flores positione diuersa delineati.

E. Calycis lacinae.

F. Flos secundum longitudinem dissectus.

G. Stamina: *a.* minus. *b.* maius.

H. Pistillum.

DE ORIFICIO VENAE CORONARIAE MAGNAE.

A u t o r e

C. F. WOLFF.

Vena coronaria magna, eiusque, quo in sinum dextrum cordis hiat, orificium GALENO iam nota fuerunt. Valvulam autem, orificio huic praefixam, nisi quis prior, EVSTACHIVS cognovit; qui in Tabularum suarum decima sexta, tum et in octava hanc particulam, quamvis male, manifesto tamen, expressit. In utroque horum autem, in ostio et in valvula, conditiones varias observavi, quae eo magis notatu mihi dignae visae sunt, quo minus peculiari suo usu in functione venae carent, qua sanguis in sinum cordis effunditur.

Truncus venae coronariae, ubi propinquus est suo orificio, quo terminatur, ab exterioribus versus interiora penetrat, et crassum fasciculum musculofum (Tab. V. fig. I. 47. Fig. I. 48. 49.) offendit, qui totus quidem ad auriculam pertinet, sed notabilem partem contribuit ad efficiendum orificium venosum ventriculi dextri. Membrana enim interna auriculae, ubi super hunc muscolum descendit, continuo inde abit in valvulam huius orificii annularem, (26. 27. 28.) cuius laminam internam ipsa constituit. Adeoque pars posterior laevis orificii venosi ab hoc musculo formatur, ex quo pleraeque simul fibrae auriculae (60. 62. 64.) originem ducunt. Hunc muscolum ergo annularem in parte posteriori et sinisteriori (49.) prope orificium venae cauae inferioris perforat venae coronariae trunc-

truncus, adeo, vt eum in duas fibras crassas, fere teretes diuidat, longe separatas a se inuicem, inter quas ipse truncus extremus cum suo orificio comprehenditur. In aliis autem corporibus inter dictum fasciculum, qui orificium venosum ventriculi efficit, integrum (49.) et peculiarem fibram muscularem (81.), satis crassam, fasciculo additam, hanc trunci extremitatem comprehensam esse reperi. Tumque fibra a papilla quadam (78.) oriri solet, quae fasciculo adhaeret.

Siue vero fibra sit addita fasciculo, siue inter duas fissi fasciculi partes truncus extremus contineatur, hac fasciculi partes, vel fasciculus integer et fibra addita, semper oram efficiunt, seu limbum, quo orificium cingitur, et cuius alteram partem superiorem et posteriorem, quae a fibra formatur (81.), distinguere licet a parte inferiori, quae a fasciculo efficitur (49.). Illa communis est inter orificium venae coronariae magnae et orificium venae cauae inferioris. Haec similiter oram communem efficit inter venae coronariae orificium et orificium venosum ventriculi dextri. Proinde sedes orificii venae coronariae magnae accuratius nunc determinari potest. Aperitur haec vena inter ipsa duo maxima, quae in sinum dextrum hiant, orificia, inter orificium venae cauae inferioris et orificium venosum ventriculi dextri, eamque in specie huius partem, cui valuula septi (28.) respondet.

Deinde illa ora communis inter orificium venae coronariae et venae cauae inferioris ideo quoque notari meretur, quod valuula Eustachii extremitate sua anteriori (90.) eidem orae adhaeret. In foetu, vbi haec valuula maior est, extremitas eius anterior super totam limbi longitudinem decurrit, et in arcum vsque adscendit, quo orificium venae cauae inferioris dextrum superius cingitur

tur (93. 94. 95.). In adulto autem, vbi valuula Eustachii continuo retrahitur et imminuitur, ad mediam quasi limbi partem, vel etiam ad initium arcus vsque (96.), qui nunc pars superior annuli ovalis est, vltima valuulae extremitas seu cornu anterius (90.) sese extendere solet.

Multa autem praeter haec alia in venae coronariae orificio occurrunt singularia, nec magis ab anatomicis, quantum scio, notata. Quod orificium immediate in sinum dextrum hiat (87.), in eoque primum apparet, quod ipsum etiam munitum est valuula (84. 85. 86.), id dinerfum est ab orificio proprio venae coronariae magnae. Dicam illud commune, cum communem venae coronariae magnae et alii cordis venae exitum praebeat. Hoc proprium vocari poterit.

Commune margine libero mobili valuulae (85. 86.) efficitur partim, partimque ora (87.) foueae cuiusdam peculiaris (87. fig. 2. k. l.), quam seorsim nunc describere oportet. Ea ipsa haec est, quam, trunci extremi nomine haecenus, comprehensam esse dixi inter duas partes fissi fasciculi musculosi, vel inter fasciculum hunc integrum et fibram muscularem, ei accedentem. Fouea satis profunda est, et larga, figurae ovalis, oblongae, et transuersim in finu posita. Atrium quasi exhibet venae coronariae magnae, seu lacum largiorem, in quem sanguis, priusquam sinum cordis ipsum adeat, tanquam ex riuo angustiori ex cuti possit. Latus eius superius et posterius, vel ora, a limbo illo carneo (fig. 2. c.), quem communem esse dixi inter venae coronariae et venae cauae inferioris orificium, efficitur; inferior autem ora et anterior ab illo, quem esse retuli inter venam coronariam et venosum orificium ventriculi dextri (a.). Extremitas altera sinistra (k. fig. 1. 87.) leuior est et obtusa, subrotunda, altera
dextra

dextra autem (fig. 2. *l.*), quae fundum quasi foueae vel lacus refert, multo profundior et magis acuta (*).

Super hanc nunc foueam valuula extensa est subplana (fig. I. 84. 85. 86.), adeo tamen, vt dimidiam tantum eius partem dextram (fig. 2. *l.*) tegat, sinisterior (fig. 2. *k.* fig. I. 87.) aperta maneat. Figura valuula fere similis est foueae. Fundo gaudet plerumque acuto (84.), foueae fundo, seu extremitati dextrae incumbente, et lateribus semper duobus, quibus foueae oris lateralibus adhaeret, denique margine quoque constanter libero et mobili, exciso (85. 86.), quo foueae extremitati sinistrae (87.) obtusae et subrotundae respondet. Sic valuula vna cum foueae parte dextra profundiori sacculum efficit, seu speluncam, fundo gaudentem acuto; margine suo mobili autem et exciso, qui foueae fini sinistro similiter obtuso respondet, orificium ouale, pulchre determinatum, quod apertura sacculi, simulque extremum orificium commune est venae coronariae magnae et alterius venae cordis, cuius mentionem iam feci.

In media foueae parte, quam ipse margo mobilis valuulae tegit, orificium aliud apparet (88. fig. 2. *n.*), si valuula remouetur, fatis magnum et spectabile, licet minus, quam illud commune. Hoc est orificium proprium venae coronariae magnae. Figuram illud habet subrotun-

G g 3

dam,

(*) In plerisque hominibus structura huic descriptioni conformis est. In hoc corde praeter foueam venae coronariae maior cavitatis oualis (fig. I. 82. 83. fig. 2. *h. i.*) obseruabatur, in qua fouea illa exculpta erat (fig. 2. *k. l.*). Si haec structura obtinet, cavitatem oualem a fouea distinguere oportet, et cavitatis potius, quam foueae, ea est, quae dictis oris, fibra carnea (*c.*) et annulo carneo, (*a.*) cingitur.

dam, sed directionem, communis directioni oppositam. Commune oblique sinistrorsum spectat, quo sanguis profiliat in apicem auriculae, radici aortae incumbentem. Proprium hiat recta versus fundum sacculi, seu foucae extremitatem dextram, ut sanguinem oporteat primum impellere in fundum sacculi, eumque replere, deinde revertendo exire per orificium commune.

Denique in ipso sacculi fundo tertium apparet orificium (fig. 2. *m.*), venae, cuius iam saepius memini, et quam PERILL. L. B. DE HALLER venam cordis mediam vocat. Hoc minimum est inter ea, quae recensui, maximum autem inter haec, quae praeterea dantur, venarum cordis orificia. Valuula id tegitur similiter ac proprium venae coronariae magnae. Commune autem ambarum venarum orificium, quamvis haud perfecte tegatur valuula, defendi tamen ea potest contra regressum sanguinis, quemadmodum in sequentibus dicam.

Valuula caeterum in plerisque corporibus tenuis est, pellucida et visu pulcherrima; quin multis haud nunquam, ut in ipso, cuius iconem descriptioni huic addidi, corde apparet, foraminulis minimis ob tencritatem perrupta. Pinxi foraminula ista vera magnitudine, sede et numero. Vnum ex iis imprimis notabile mihi visum est, caeteris quod maius est et in ipso valuulae fundo existit (84.). In alio autem crassiore hanc valuulam reperi, magisque carnosam et solo margine mobili extremo tenuem, longam et angustam, lateribus parallelis et fundo obtuso, in caeteris descriptae structurae similem.

Sed in vnico individuo fabricam miratus sum in omnibus ab ea, quam descripsi, diuersam. Neque munitum erat

erat valvula orificium venae coronariae propria, neque contentum inter duos, quos dixi, musculos, neque in ea, quam descripsi, sede situm. Positum autem erat vltra valvulam Eustachii, solito in hoc corpore latiore, inter eius extremitatem anteriorem et summum lumen venae cauae inferioris, ea ratione, vt, si valvula versus venam cavam pelleretur, coronariae orificium longe lateque tegeretur.

Haec tamen structura, quamvis a descripta longe diversa, minime mihi dubium reddidit solitae, quam dixi, fabricae vsum; quin potius confirmavit, multoque luculentius explicuit. Ad venam cavam relegandum esse coronariae orificium intelligebam, nisi musculis id comprehenderetur valuulaque munitum esset propria, aut ea, quam descripsi, positione gauderet. Proinde necessarias esse has condiciones omnes, quandoquidem in sinum cordis vena coronaria aperiretur.

Mirum est, quanta sapientia in fabrica corporis humani ubique eluceat; dummodo recte intelligatur. Vel in hoc tanto parvi ostioli apparatu quis non facile sentit finem magni ARCHITECTI? QVEM non difficilius est in minima nostri corporis particula cognoscere quam in immenso systemate mundi. Verum est, redire omnia ad hoc vnum, vt sanguinis regressus in venam coronariam prohibeatur. Sed id vnum, nisi efficitur, tanti est, vt vitae periculum immineat. Dicam ostioli primum functionem, deinde huius functionis necessitatem monstrabo.

Valuula, cum plana simulque longior et angustior sit, quam valuulae esse solent semilunares, non quidem reflecti a foucae, quam tegit, pariete, sed eo facilius certiusque et eleuari ab eodem iterumque ad eum applicari et apprimi, proinde in casu priori sacculum et orificium
com-

commune aperire, in posteriori claudere potest. Sanguis autem venae coronariae, ut omnium reliquarum venarum, nonnisi tempore diastoles in sinum ingreditur, quo tempore hic vacuus est, et omnem sanguinem, vel minima vi pulsus, facile in se admittit; cum tempore systoles contra suum, quem continet, potius expellat, vi longe maiori ea, qua venae instructae sunt. Diastole ergo sanguis venae coronariae ipse progrediendo valuulam elenat, sacculum dilatat, ostiumque commune aperit, et patente via in sinum ingreditur. Systole autem, cum sinus se contrahit contentumque sanguinem quaquaversum in sui parietes, ergo in valuulam quoque, pellit, valuula hoc sanguine porro ad parietem foveae apprimitur, sacculus obturatur, orificia venae coronariae tam proprium, quam commune, clauduntur. Sic valuula sanguini ex vena in sinum ituro patentem viam offert, redituro ex sinu in venam negat.

Si valuula semilunaris esset, qualis ab omnibus, non folliculis, anatomicis, qui valuulae nomen illi attribuunt, esse dicitur, si latior esset et brevior, laxiorque, ut semilunares solent, a sanguine sinus urgente reflecti aequae et aperiri ac comprimere posset et claudere. Adeoque plane inutilis esset.

Semilunarem autem non esse, figura non modo oblonga et angusta, manifesto a semilunari diversa, sed actio quoque demonstrat. Valuulae semilunares aequae ac annulares vel tubulosae viam aperiunt, dum ad parietes suorum vasorum applicantur, claudunt autem, dum ab iisdem remouentur et extenduntur, ut recte Meritissimus WINSLOWVS monuerat. Haec applicata foveae parieti viam claudit, et aperit, dum ab illo remouetur et extenditur.

Proinde hanc valuulam natura et usu diversam esse patet a semilunaribus aequae ac annularibus, vel tubulosis,
aut

aut semitubulosis, qualis valuula est sinus sinistri in foetu. Et veram tamen valuulam esse, quamvis Illustris TREWIVS negauerit, sola eius functio satis docet. Quae enim particula exituro ex aliquo canale fluido viam aperit, redituro in illum claudit, ea sane valuula vocari meretur, quaecunque ei figura sit aut forma. Valuula ergo sui generis est, et cuius secundum exemplum in corpore humano nondum innotuit.

Neque causa, cur nec annularis nec semilunaris valuula hic applicari potuerat, latet, et cur singulare valuulae genus, membranula nempe simplex, cuiuscunque figurae, plana, super foueam extensa, quae eleuari simpliciter et apprimi posset, requirebatur. In venis sanguis rediturus secundum axin canalis progreditur, cui tum valuula semilunaris expansa recte resistit. At sanguis auriculae, a vena coronaria retinendus, in latus canalis irruit, oblique in sinum inserti, vbi valuula semilunaris aut applicanda nequaquam, aut inutiliter applicata, fuisset, nec alius contra, quam simplex membranula plana, apparatus aptior ullus excogitari potuisset. Immo etiamsi vena coronaria perpendiculariter in sinum hiaret, qua positione orificium valuula semilunari contegi potuisset, valuula tamen vim auriculae et sanguinis eius prementis minime sustinisset, quemadmodum valuulae venarum communes solum sui sanguinis pondus facile ferunt. Dum valuula autem parieti foucae apprimitur, vis omnis auriculae in hunc parietem transfertur, valuula ipsa nequidquam patitur. *Quocunque ergo respicis, naturam sapientem esse vides*; et multo anatomicis doctiorem, qui ne tum quidem, quando valuulam, qualis esse debet, instructam vident, quomodo esse debeat, intelligunt.

Aliud autem artificium, quo sanguis auriculae a vena coronaria arceatur, in musculis positum est, quibus orificium commune cingitur. Hi enim, cum sinus musculi sint, una cum toto sinu agunt. Adeoque se contrahunt, dum sinus in systole est, relaxantur sub eius diastole. Et constringunt ergo venae orificium systoles tempore, quo ipso periculum est, ne sanguis in venam redeat; patefaciunt autem viam diastoles, quo solo sanguis ex vena in sinum intrare potest. *Si intellectu et anima rationali praeditae essent hae fibrae musculares, non possent sane accuratius suo munere fungi, quam quidem diuino hoc mechanismo funguntur.*

Denique tertium contra regressum sanguinis praesidium positio suppeditat orificii proprii, contraria directioni communis. Hac efficitur, ut, si quid forte sanguinis sub valvula per orificium commune in sacculum elaberetur, id tamen non integra sua vi in venam coronariam ilico eiusque orificium proprium, sed potius in fundum sacculi, impelleret, vbi, vi maxima fracta, parum noxiae orificio huic proprio inferre potest.

In descriptione valuulae annotavi, eam, imprimis in fundo, multis foraminulis, in eo, cuius iconem adiunxi, corde perruptam fuisse, et causa facile apparet, cur id notabile videatur. PERILL. L. B. DE HALLER similiter cordis meminit, in quo valuulam hanc reticulatam esse vidit. (Elem. Physiol. Tom. I. pag. 376.) Eustachii autem valuulam solitum fere est perruptam inuenire foraminulis, aut laceratam variis modis, et saepe egregie reticulatam, qualem admiramur in pulcherrima Iconum anatomicarum, fascul. IV. Tab. - octaua figura. VIR PERILL. monet, hunc semper effectum esse vis, valuulae illatae,

et

et nihil eo certius est. Eo magis autem hic idem effectus in valuula venae coronariae attribuendus erit sanguini, ex sinu sub eius systole in sacculum elapso, cum peculiarem Providentia contra noxiam huius casus medelam parauerit. Sed discimus inde quoque quanta sit vis auriculae, qua, dum se contrahit, sanguinem suum in sui parietes vrget, et nullum certe argumentum inuenire possem aptius, quo, quod supra dixi, periculum fore, probarem, ne valuula rumperetur, si solito modo semilunaris orificio, perpendiculariter in sinum hianti, praefixa fuisset. Si paucae enim guttulae huius sanguinis sinus elapsae valuulam perforare possunt, quidne ingens faceret riuus, plena vi in orificium eiusque valuulam irrumpens, nullo fulcro donatam, ut quidem haec plana foueae parieti innititur.

Maxime autem admirabile in hac re mihi hoc esse videtur, quod, etiamsi casu accidit, ut valuula, sicut in hoc exemplo, perforetur, id tamen minime vsui valuulae officiat, quin faciliorem potius illum reddat multoque certiore. Quid aliud enim fiet, posteaquam sacculus in fundo apertus est, nisi ut sanguis, per orificium commune in sacculum elapsus, pressus vi ipsa auriculae, per fundum iterum exeat, eoque minus penetret in orificium venae proprium. Valuula interim sui parte media et posteriori orificium proprium largiter tueri perget. Nec magis sanguis auriculae per fundum intrabit in foueam quam per magnum orificium commune.

Hanc tantam providentiam ad arcendum sanguinem sinus a vena coronaria non temere adhibitam esse, facile suspicari licet. Si sanguini auriculae haec via pateret, varices continuo, mox sacci enormes, cruore referti, in trunco huius venae nudo, in numerosisque eius ramis,

per cordis superficiem distributis, producerentur. Nec longius abesset, quin ruptis venis cruor pericardium imple-
ret, cor comprimeret, eiusque motum sistendo vitae fi-
nem faceret.

Ante aliquot annos, cum leonem secarem, eius pe-
ricardium plenum mirabar sanguine et ita distentum, vt
horrenda magnitudine totam cauitatem thoracis occuparet,
pressumque digito vesicae inflatae instar reniteret, ventri-
culis et sinibus cordis sanguine vacuis. (Nou. Comment.
Tom. XVI. pag. 471.) Causam miri huius effectus de-
tegere non poteram. Ipsum tamen causam mortis fuisse,
eo certius est, cum constaret, animal repentine fuisse ex-
stinctum. Proinde hoc saltim vides, quales effectus san-
guis possit efficere in pericardium effusus. Si tantis prae-
fidiis natura muniuit orificium venae coronariae magnae,
cur id factu fuerit opus, intelligis. Et si tamen in illo
homine supra memorato plerisque his munimentis vena
priuata fuit, cur et ne hoc quidem mirum, perspicis;
cum valuula non modo Eustachii orificium tectum, sed
positum quoque in cauitate venae cauae procul ab omni
periculo fuerit, a vi auriculae imminente.

EXPLICATIO TABVLAE V.

Fig. 1.

Ventriculus cordis dexter cum sinu dextro
apertus.

- a. Pars cordis ventriculū finistrum continens.
- b. Vena coronaria. Arteria coronaria sinistra, arctius
circa basin arteriae pulmonalis flexa, propius septo
(Q: Q:) et profundius sub adipe latens descendit:
- c. Apex

- c.* Apex carnis ventriculi finistri.
- d. d.* Pars basis ventriculi finistri prominens, adiposa, basin arteriae pulmonalis cingens.
- e.* Interstitium inter hanc cordis partem et arteriam pulmonalem cordi insertam.
- f.* Fossa, qua extus ventriculi distinguuntur.
- g.* Caro ventriculi dextri, apicem fingens, solida, atamen spongiosa, sanguinemque intra poros admittens.
- b.* Caro similis, partem inferiorem marginis acuti effingens.
- i.* Apex cavitatis ventriculi.
- k.* Arteria aorta.
- l.* Orificium resectae arteriae coronariae dextrae.
- m.* Continuatio huius arteriae circa basin ventriculi dextri.
- n.* Arteria pulmonalis.
- o.* Eius ramus dexter retro aortam procedens.
- p.* Eius ramus sinister breuior.
- q.* Vena caua superior.
- r.* Hucusque incisa.
- s.* Pars sinus posterioris; eius angulus superior dexter, cui vena pulmonalis dextra inseritur.
- t.* Auricula dextra, cum pariete cordis et sinus dextrorsum et sursum reflexa.
- v. x.* Regio, quo vsque membrana interna sinus carni suae adhaeret, et vbi incipit fluitantem valuulam formare.
- y. z.* Sectio columnae carnea parietalis magnae (vid. ad no. 14. 15. 16. 17. 18. 19.)
- y. A.* Parietis ventriculi dextri pars superior, sub arteria pulmonali resecta a (*z. B.*). Sic
- A. C.* illis *B. D.* et *C. E.* illis *D. E.* respondet.
- F. G. H. I. K. L. P. Q. X.* Septum cordis.

- F. G. H. I.** Varii fasciculi longitudinales, qui septum efficiunt, in aliisque subiectis magis in aliis minus a se inuicem distincti apparent.
- K.** Pars septi inferior irregulariter reticulata.
- L.** Pars summa septi laevis prope valvulas semilunares.
- M.** Summa pars parietis ventriculi, a qua reliquus paries resectus.
- N.** Basis arteriae pulmonalis.
- O. O.** Bases valvularum semilunarium; quarum altera septo soli incumbit, altera dexterior est et anterior; tertia sub parte (*M.*) latet.
- P.** Pyramidalis finis columnae carnea sinistrae (vid. ad no. 14. 15. 16. 17. 18. 19.) quo in fasciculos septi (*G.* et *H.*) continuat.
- Q. Q.** Fasciculi brevissimi, quibus parietis ventriculi pars sinisterior et anterior septo adnectitur.
- R. S. T. V.** Fasciculi filamentorum sine papillis ex variis locis septi orti, valvulaeque septi et valvulae anteriori inserti. Haec filamenta minus constantia sunt. Plura nunc, nunc pauciora reperiuntur. Saepe parvae papillulae sunt, ex quibus fasciculi oriuntur.
- S.** Fasciculus insignis, qui in pluribus corporibus ex papilla oritur, quam superiorem vocare licet. Pars horum filamentorum in valvulam septi (44.) ; pars alia (46.) in valvulam anteriorem (31.) inseritur, a qua filamenta resecta sunt.
- X. T. Z.** Finis inferior praecipuae partis septi, ab hoc distinctus.
- T. Z.** Duo, in quos ille dividitur, fasciculi, continuati in ramos (12. 13.) papillae magnae anterioris (11.) quae inde resecta est.
- 1. 2.** Fibrae ex septo in parietis ventriculi partem posteriorem transeuntes. Eiusmodi fibrae, quales etiam

etiam sunt (5. 6. 8. 9.) in omnibus corporibus dantur, quibus parietis ventriculi pars posterior septo adnectitur; variant autem numero, figura et magnitudine.

3. 4. Papillae posteriores. Duae sunt in hoc corde vti in illo, cuius foramen ouale (Tom. XX. Comment.) exhibui. Frequentior tamen vna esse videtur; collocatae sunt inter partem posteriorem parietis ventriculi et septum. Annectuntur variis fibris veluti (1. 2. 5. 6.) septo, aliisque (8. 9.) parieti. Filamenta sua imprimis in valuulam posteriorem et in marginem posteriorem valuulae septi mittunt.
5. 6. Fibrae, quibus paries ventriculi in parte posteriori ad septum annectitur.
7. Locus, vbi papilla magna anterior (11.) tertia sua radice firmata fuit.
8. 9. Fibrae quibus papillae posteriores (3. 4.) a pariete dependent.
10. Similis eiusmodi fibra, qua papilla (4.) parieti adnectitur.
11. Papilla anterior. Haec maxima inter reliquas et constantissima est. Oritur ex angulo anteriori inter septum et parietem ventriculi, vel ex septi parte anteriori variis radicibus et inseritur filamentis suis in interstitium inter valuulam anteriorem et posteriorem.
12. 13. Duae eius vel tres, quatuorue radices resectae a fasciculis (7. T. Z.).
14. 15. 16. 17. 18. 19. Columna magna carnea parieti ventriculi multis fibris annexa, satis tamen ab eodem distincta et separata. Oritur superius parte (P.), a qua resecta est, ex septo, inde recurvata iuxta valu-

- valvulam anteriorem antrorsum et deorsum, in pariete ventriculi descendit, in variasque partes dispergitur. Eius actio est, ventriculum breviorum reddere. Haec *columna sinisterior* est, quae in situ suo naturali septi parti mediae (G.) incumbit.
14. Huius columnae pars superior, vbi in ipsa curvatura sectio (y. Z.) facta.
 15. Fasciculus a columna secedens.
 16. Pars praecipua et crassissima descendens columnae.
 17. Eius pars vbi latior, sed et planior, euadit dispergigue incipit.
 18. 19. Partes in quas dispergitur.
 20. *Columna secunda*, priori parallela, eique *dexterior*, similique modo parieti annexa. Haec oritur ante anulum valvularem, vt prior sinisterius iuxta eundem, ex ipso interstitio inter parietem et membranam valvularem, incumbens in situ suo naturali septi fasciculis dexterioribus (H. I.).
 21. Interstitium profundum inter has columnas.
 22. 23. Duae radices, quibus dexterior columna in dicto interstitio oritur. Actio huius similiter est ventriculum breviorum reddere, et eleuare versus orificium venosum (47. 48.).
 24. 24. 24. Alii et debiliores et breuiores columnae, quae omnes successiue retro anulum valvularem oriuntur et in parietem ventriculi inferuntur.
 25. Pars parietis ventriculi, columnis sinisterior, parti septi sinisteriori (F.) incumbens. Haec leuior tenuiorque et fasciculis reticulatis instructa adeo planis, vt vix a pariete ipso distinguantur.
 26. 27. 28. Annulus valvularis.
 26. Valvula, seu lobus valvulae, anterior. Perill. L. B. de HALLER vocat superiorem.

27. Valvula posterior, in hoc corde bipartita, alias integra.
28. Valvula septi.
29. 30. Lobi minores, in quos lobus (27.) diuisus.
31. Filamenta valvulae anterioris sinistra, resecta a fasciculo filamentorum (46.). Alias a singulari papillula, quam *superiorem* dixi, oriuntur.
32. Pars valvulae media.
33. 33. Filamenta a papilla anteriori (11.) quorum pars altera dat filamenta dextra valvulae anterioris, altera sinistra valvulae posterioris.
34. Pars media lobi (29.).
35. Filamenta sinistra lobuli (29.) dextraque lobuli (30.) a papilla posteriori (4.) orta.
36. Pars media lobuli (30.).
37. Filamenta sinistra lobi (30.) a papilla posteriori (3.) orta.
38. Filamenta dextra valvulae septi.
39. Pars media valvulae septi.
40. 41. 42. 43. 44. 45. Varii fasciculi filamentorum quae omnia, orta ex septo, sinistra sunt valvulae septi.
46. Filamenta sinistra valvulae anterioris a quibus resecta sunt illa (31.).
47. 48. 49. 50. 51. Annulus laevis tumidus, quo cauitas sinus et auriculae a cauitate ventriculi distinguitur. Hic orificium venosum ventriculi constituit, efficiturque crasso fasciculo carneo, quem ipsum truncus venae coronariae perforat.
47. *Annuli carnei* pars latior, *auricularis*, ex qua fibrae auriculae ortum ducunt.
48. Alia eiusdem pars latior et notabilis, in quam ingrediuntur fibrae, quae cauitatem auriculae a fini-

- steriori parte atrii, regione venae cauae inferioris, distinguunt.
49. Pars annuli angustissima, quae septo et regioni venae cauae inferioris interest.
50. et 51. Pars annuli anterior.
52. Regio venae cauae superioris.
53. Pars reflexa 54. orificium venae in sinum insertae.
55. Cavitas basis auriculae, quae dextrorsum in situ naturali respicit et inflata exterius apparere solet a sanguine coagulato.
56. Ora superior cavitatis basis auriculae, qui crassius fasciculus muscularis est.
57. 58. 59. Tres eius rami, quorum.
57. Medius, continuatio orae superioris est, quo cavitas auricularis a regione orificii venae cauae inferioris distinguitur.
58. In cavitatem basis auriculae descendit, cum fibris eius commixta.
59. autem in regionem orificii venae cauae inferioris transit, in plures ramos (77. &c.) diuisa, quae peculiarem partem huius orificii efficiunt.
60. Continuatio orae, in situ naturali posterioris cavitatis auriculae, bifurcata.
61. Ora huius cavitatis in situ naturali anterior.
62. Truncus omnium fere fibrarum, quibus cavitas auriculae repletur, ortus a parte latiori (47.) annuli carnei, qui orificium venosum efficit. Saepius tamen pleraeque fibrarum auriculae imediate ex hac parte latiori oriuntur sine trunco.
63. 63. 63. Rami a trunco (62.) orti in cavitatem auriculae ad apicem vsque dispersi.
64. Papilla ex parte (47.) orta, quae ramos in cavitatem auriculae dat, cum prioribus coniunctos.

65. Dicti rami papillae (64.).
66. 67. Rami ex apice trunci orti, arcui (56.) seu orae superiori cavитatis auriculae annexi.
68. 69. 70. Rami ex arcu (58.) orti, in truncum (62.) inserti, ad fibras auriculae pertinentes.
71. Ramus ex continuatione orae superioris cavитatis auriculae (57.) ortus in anulum carneum (47. 48.) insertus, ad fibras auriculae pertinens.
72. 72. 72. Foveae, seu interstitia inter fibras reticulatas et varios ramos relicta.
73. 74. 75. Peculiares foveae reticulatae.
76. Continuatio orae (57. 60.) bifurcata et inserta in anulum carneum (48. 49.) qua cavitas auriculae a regione venae cauae inferioris distinguitur.
77. 77. 77. Rami musculosi, orti a ramo (59.) orae (56.), qui pennatim fere exserti, peculiarem partem, quam musculosam dixeris, regionis venae cauae inferioris efficiunt.

Vt totum atrium in auriculam et finum, finus autem porro in regionem venae cauae superioris et inferioris; ita haec tandem in quatuor partes dividi potest: 1) muscularem, quae proxima cavitati auriculari, ab eadem per limbum eminentem (57. 60.) distincta est. 2) Cutaneam (79. 79. 80.) quae inter muscularem et valvulam Eustachii est 3) regionem venae coronariae (81 — 89.) et 4) orificium venae cauae inferioris ipsum, quod valvulam Eustachii et fossam ovalem parietesque venae cauae inferioris in se comprehendit.

78. Papilla, quae annulo carneo orificii venosi insidet, fibramque producit (81.), quae una cum annulo carneo (49.) truncum extremum venae coronariae comprehendit.

79. 79. 80. Pars cutanea regionis venae cauae inferioris, quae ex simplicibus finis membranis, externa et interna, constat, nec nisi debilissimas rarasque fibras in se dispersas habet, et pellucida est.
80. Fouea in hac parte cutanea retro oram venae coronariae (81.).
81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. Regio venae coronariae.
81. Fibra muscularis annulo carneo orificii venosi, in specie eius parti (49.), addita, quibus orificium venae coronariae continetur. In aliis corporibus hoc in ipso illo annulo, in duas partes fisso, contineri obseruatur.
82. 83. Cautas oualis, a fibra (81.) et annulo carneo (49.) formata, interque has partes contenta. In hac cauitate fouea porro excauata est (fig. 2. k. l.) qua orificium commune venae coronariae efficitur. In aliis corporibus tota haec cauitas vna cum fouea a valuula tegitur.
82. Fundus huius cauitatis, seu extremitas profundior.
83. Altera eius extremitas leuior.
84. 85. 86. Valuula venae coronariae magnae.
84. Fundus valuulae et facculi, a valuula et fouea formati.
84. Eodem numero indicatur et foraminulum in fundo facculi huius seu valuulae, satis notabile, de quo in Dissert. praemissa dictum.
85. 86. Margo valuulae excisus mobilis.
85. Eius Extremitas superior, qua fibrae (81.) seu orae foucae superiori adhaeret vna cum extremitate sinistra valuulae Eustachii. His fibrae pars magna tegitur, quae sub extremitate cauitatis oualis anteriori (83.) cum annulo carneo (49.) coniungitur.

86. Extremitas marginis valuulae inferior quae annulo carneo adhaeret. Sic latera quoque valuulae, numeris non indicata, superius atque inferius, facile apparent, quorum illud fibrae (81.) hoc annulo (49.) adhaeret. Similiter foraminula exigua circa latus inferius.
87. Extremitas sinistra lenior foucae, cuius pars dimidia dextra valuula tegitur, et quae, valuula remota, tota apparet (figura 2 k. l.). Hac foucae ora sinistra et valuulae margine exciso (86.) *orificium commune* venae coronariae magnae formatur.
88. Pars orificii proprii venae coronariae magnae (fig. 2. n.).
89. Orificium venulae in cauitate ovali apertum.
90. 91. 92. Valuula Eustachii, non expansa, sed qualis naturaliter in hoc partium situ se offert.
90. Eius Extremitas sinistra et anterior, ad partem sinistram annuli ovalis ultimo fine, parte dexteriori ad fibram (81.) qua orificium venae coronariae formatur, applicata.
91. Extremitas eiusdem dextra et posterior, qua in foetu arcui, seu annuli ovalis parti superiori (94.), adhaeret, in adulto autem ab eo remota est vi impellentis sanguinis, et in filamenta plerumque disrupta, quorum duae paruulae in hoc exemplo ad hunc numerum (91.) apparent.
92. Eius pars media latior eademque margo conuexus, quo parti cutaneae sinus (79. 80.) adhaeret. Eius margo mobilis facile apparet.
93. 94. 95. 96. 97. Annuli ovalis pars superior. Haec in foetu tanquam singularis arcus existit, quem arcum ideo in foetu vocamus siue isthmum Vieussinii. Eius cruribus (94.) et (96.) valuula Eustachii suis

extremitatibus adhaeret, cum eoque orificium dextrum venae cauae inferioris efficit.

93. Eius pars suprema crassissima distinctissimaque omni aetate.
94. Crus arcus dextrum, cui in foetu extremitas dextra et posterior valuulae Eustachii applicata est. Nunc ab eo remota existit vi irruentis sanguinis, cuius pars magna olim per orificium finistrum in sinum finistrum intrabat, intacta valuula Eustachii, nunc vero omnis, conuersus in partem dextram, eo maiori vi in valuulam Eustachii, eiusque imprimis in extremitatem posteriorem impellit, eamque difrumpit partim, partimque remouet a pariete sinistro. Perill. L. B. de HALLER columnam dextram vocauit.
95. Crus finistrum arcus siue columna sinistra, quae paulo tenuior esse solet reliquo arcu.
96. Lenior inflexio in hac regione, constantissima, quae maior autem in vitulo et in cane nec non in plerisque caeteris animalibus, vnde figura foraminis et fossae oualis figura angulata et coniunctis duabus palpebris similis efficitur.
97. Pars infima cruris sinistri, quae in adulto et in foetu extremitate sinistra valuulae Eustachii tegitur, sub qua in coniunctum cum fibra (81.) anulum carneum (49.) illum crus continuat.
98. 99. 99. 99. Annuli oualis pars inferior, quae apparet, si paries sinus sinister, in quo fossa oualis est, sursum, regio vero venae coronariae cum valuula Eustachii deorsum paulo trahuntur. In foetu, aperto sinu, integra vena caua inferiori, nihil de hac parte apparet, dum profundius in hac vena latet. Tumque limbus est, quo basis valuulae orificii sinistri cingitur et a venae pariete distinguitur.

98. Hic se recipit sub extremitatem valvulae Eustachii et sub partem cruris (97.) in quam non continuat. Adhaeret autem cruri cellulosa ope et tunicae venae internae.
99. 99. 99. Foramina satis profunda sed caeca a sola membrana interna tenui alba producta et interstitia inter ligamentula ab eadem tenui membrana producta. Stylus immitti potest, quo ligamentula (100. 101. 102.) eleuantur.
100. 101. 102. Sunt quasi ligamentula a tenui membrana, qua vena interne et fossa ovalis obducuntur, facta. Membrana a parietibus suis separata est in his locis, ut admissio stylo eleuari possit. Caeterum duplicaturae sunt membranae internae, quamvis tenuia sint, ut facile intelligitur. Ligamentula autem dico, cum area ovalis (105.) quae olim valvula fuit, his particulis tensis ad annuli partem inferiorem attrahitur ea ratione, ut plicae inde in hac parte (103. 102.) oriantur, quas nonnisi dissectis his ligamentulis explicare possis. Existunt iam, haec non minus quam foramina caeca, in foetu, et sunt eadem, quae ad diss. de for. oval. (Nou. Comm. Tom. XX. Tab. VII. fig. 4. v.) delineavi.
100. Horum ligamentulorum maximum et latissimum est.
101. et 102. Eius quasi rami.
103. 104. Plicae seu rugulae, quas ligamentula producant, dum, quasi iusto breviora, aream ovalem (105.) ad partem annuli inferiorem attrahunt.
105. *Area ovalis.* In foetu valvula orificii sinistri venae cauae inferioris.
106. Apertura relicta, qua penna anserina mediocris in finem sinistrum immitti potest.
107. 108. Paries posterior venae cauae inferioris.

107. Eius pars inferior prope hepar resecta.

108. Pars suprema vbi fouea esse solet in adulto, qua venae paries in paruo hoc interstitio inter extremitatem posteriorem valuulae Eustachii et dextram arcus extremitatem a sinu distinguitur.

Fig. 2.

Regio venae coronariae, vbi valuula orificii remota, vt fouea venae coronariae et orificium proprium apparcant.

a. Pars annuli carnei, quae septo cordis et regioni venae cauae inferioris interest (fig. I. 49.).

b. Papilla (fig. I. 78.).

c. Fibra carnea, quae cum annulo carneo (*a.*) oram cauitatis (*g. b.*) efficit.

d. Pars valuulae Eustachii.

e. Pars annuli oualis (fig. I. 98.).

f. Pars annuli oualis, in quam fibra carnea (*c.*) et annulus carneus orificii venosi ventriculi (*a.*) continuant (fig. I. 97.).

g. b. Cauitas oualis in qua foueola venae coronariae est (fig. I. 82. 83.).

i. Orificium venulae.

k. l. Foueola venae coronariae integra, quae apparet, postquam valuula remota est.

k. Eius pars sinisterior, qua orificium commune efficitur (fig. I. 87.).

l. Ea eius pars dexterior, quae vna cum valuula facculum efficit.

m. Orificium venae cordis mediae, in ipso facculi fundo situm.

n. Orificium proprium venae coronariae magnae.

PHOCARVM SPECIES DESCRIPTAE.

Ab

I. L E P E C H I N.

Phocarum greges quamuis vbique terrarum non modo per maria, verum etiam in aquis dulcibus inueniantur; historiam tamen earum mancam atque ambiguam esse, docent nos non modo systematicorum scripta, verum etiam peregrinatorum relata. Illustris enim *Linnaeus*, systematicorum facile princeps vnicam modo speciem phocae proprie sic dictae statuit. Indefessus *Stellerus*, qui varias species phocarum vidit, omnes eas pro varietatibus agnoscere videtur: dicit enim (a).

„Est autem res cum animalibus marinis ita, quam
„cum terrestribus comparata: quaedam vbiuis locorum ha-
„bentur, pro climatis alimentorumque diuersitate vel so-
„lam magnitudinem, vel colorem, vel pilorum molliciem
„aut prolixitatem et per consuetudinem longam speciem
„mutant, translata in aliud clima longo interuallo specifi-
„cam differentiam rursus exuunt et ad primam redeunt.
„*Idem* pag. sequenti. „

„Inter animalia marina sola phoca est quae non
„tantum vbiuis terrarum in Oceano, verum in Mari Bal-
„thico, Caspio et lacubus Baikal et Oron quouis tempore
„in-

(a) Nouor. Comment. A. S. Petropolitanæ Tom. II. pag. 287.

„ inuenitur, intercedit nihilo tamen minus haec differen-
 „ tia vt phoca oceanica communissima a reliquis omnibus
 „ specificè colore distincta sit, gaudet nempe pilo lutescente
 „ ac in posteriori corporis medietate maculam maximam ca-
 „ staneas colore aemulantem obtinet, quae tertiam partem
 „ corii occupat. „

„ Distinguo autem phocas ratione magnitudinis in tres
 „ species, in maximam, quae magnitudine taurum superat,
 „ ac incolis Kamtschaticis *Lachta* vocatur; mediae magni-
 „ tudinis, quae omnes tigridum instar multis exiguis ma-
 „ culis variae sunt; infimae magnitudinis, vt oceanica, quae
 „ tum in mari Balthico, quam circa portum St. Archangeli,
 „ in Suecia, Noruegia, America et Kamtschatca capitur,
 „ et lacastris dulcium aquarum monochroa seu unicolor,
 „ vt Baikali, ea coloris argentei.

His omnibus collatis proum est concludere beatum
Stellerum, omnes quas vidit phocarum greges pro varieta-
 tibus, non vero pro veris speciebus, agnoscere.

Ast dantur alii, qui multas variasque phocarum spe-
 cies recensent; Cranzius V. species earum exhibet (a) Olaf-
 fens variarum phocarum mentionem facit (b). Pon-
 topidanus IV. species in medium profert (c). *Hallenius*
 totidem species sistit (d) *Parsonius* in quatuor species pho-
 cas distinguit (e), vt reliquos taceam.

Huic

(a) Historia Groenlandiae p. 161. et seq.

(b) In itinere Islandico passim et praecipue part. §. 651. et 652.

(c) Hist. Norueg. Tom. II. pag. 237.

(d) Hist. Natural. Tom. I. pag. 529.

(e) Philosophicar. Transact. no. 469. pag. 838.

Huic Auctorum dissentioni vt aliquam medelam afferre et hiatum in historia phorarum adimplere possem, ea nunc in medium proferam, quae mihi occasio per mare Album peregrinanti obtulit. Hoc enim tanquam insignis Oceani glacialis sinus, crebris insulis, aut praeruptis montibus, vel denique sat eleuata continenti vndique clausum, minus procellis exponitur, et plurimam anni partem glacie natante refertum, piscibusque varii generis abundans quietum atque lautum praebet domicilium phocis marinis. Earum quaedam quouis anni tempore conspiciuntur, vt phoca vitulina Lin. quaedam non nisi per hyemem hospitantur, vt phoca Russis *Krylatca* (крылатка) dicta, quaedam denique modo tempore aestiuo cum fluxu flumina ascendunt, cum refluxu vero iterum descendunt, vt eo facilius faginentur. Haec phocarum species Russis *Lepus marinus* (морской зайць) audit.

Non ne liceat hic statim in limine ex diuersis anni temporibus, quibus diuersi modo dicti phocarum greges in vno eodemque mari conspiciundi, diuersas earum familias, atque adeo species constituere? quod quidem ex subnexa descriptione clarius patebit.

PHOCA OCEANICA.

Крылатка Russis dicta.

Dimensio partium externarum ad scalam Anglicanam.

	Ped.	Poll.	Lin.
Ab apice rostri ad exortum pedum anterior.	2	1	-
— — — ad extremum pinnarum poster.	6	7	6
— — — ad caudae exortum - -	5	7	-
Cauda longa - - - - -	-	5	3
— lata - - - - -	-	2	-

K k 2

Per

	Ped.	Poll.	Lin.
Pes pinnatus posterior longus - - -	1	3	6
Pinna posterioris pedis ad exortum lata -	-	7	2
Ab exortu pedis posterioris ad vnguium			
radices - - - -	1	1	-
Vnguis primi digiti, longus - - -	-	1	7
latus - - - -	-	-	5
Pinna ipsa posteriorum pedum expansis ex-			
tremitatibus lata - - -	1	2	5
Pedes anteriores longi - - -	-	8	3
ad exortum pinnae lati -	-	4	3
Pinna pedum anterior. expansa - -	-	7	8
ad vnguium radices lata -	-	6	8
Vnguis maximus, quantum prominet - -	-	1	8
Distantia ab apice labii superioris ad nares	-	1	5
Columnarium lata - - -	-	1	4
Ab apice labii superioris vsque ad oculi can-			
thum maiorem - - - -	-	4	8
Ab oculi cantho maiori ad minorem - -	-	1	2
Ab apice labii superioris vsque ad auricula-			
rum radices - - - -	-	8	4
Setae mistacum longissimae - - -	-	3	-
Crassities capitis ad oculos - - -	1	8	4
pone aures - - -	2	-	5
colli medii - - -	2	5	3
corporis ante pedes anteriores -	4	1	5
pone pedes anteriores - - -	4	8	-
ad exortum pinn. posterior. -	1	9	6

Description.

Marinum hoc animal habitu suo phocam communem, vel, ut cum systematicis loquar, phocam vitulinam ex amissim refert, et non nisi corporis mole, qua multum superat, atque coloribus pilorum ab ipsa distinguatur. Tab. VI.

Caput rotundatum, ore prominulo, obtuso. Labium superius tumidum, crassum medio sulco distinctum, longius inferiori: labium inferius magis acuminatum. Apertura oris, pro mole corporis, parua; circumferentia enim rictus secundum labium inferius dimensa aequalis $5'' - 2'''$, secundum superius vero $6'' - 5'''$.

Dentium numerus sequens est: In maxilla superiori incisores IV. conici acuti, medii minores, proximi caninis validiores. In maxilla inferiori incisores modo IV. sunt, minusque acuti. Iuxta incisores utrinque tam in maxilla superiori, quam inferiori caninus vnus, validior atque acutior, $5'''$ longus ad fauces recurvatus. Molares utrinque VI. tricuspidati, cuspide media longiore validiore. Ceterum dentes ita dispositi sunt, ut, dum animal apprimat dentes, nullum interstitium relinquatur vacuum, cuspidesque maiores dentium superiorum respondeant cuspidibus minoribus dentium inferiorum; hoc modo prehensae praedae infliguntur vno ictu vulnera profunda, neque villo modo elabi valet.

Lingua extremo bifida, papillis asperis ad fauces retroflexis instructa.

Vibrissae instructae sunt setis decem ordinum, quarum posteriores et inferiores reliquis longiores albae, compressae, anteriores vero superioresque multo breviores et teneriores, nigerrimae.

Oculi sat magni, prominuli, iride nigra, pupilla lucida; ruga cutanea firma nuda palpebrarum loco inferuit;

in cantho oculi anteriori sita est membrana niſtitans, ſat firma, quam animal pro lubitu ſuo ad auertendas iniurias externas expandere et oculum obducere poteſt. Setae duae ſat firmae ſupra canthum maiorem oculi ſitae, eidem uſui inferuiunt.

Auricula nulla, apertura auris ouata, rugoſa cuti clauſilis eſt.

Collum craſſum, conſi truncati figura, minime tamen diſtinctum.

Brachia cuti pectoris inuoluta; palmae membrana pilis teſta coadunatae, extrema V. digitorum, minus diſtinctorum, armantur validis unguibus nigris; quorum anterior latior, ſecundus longior eſt, reliqui magnitudine decreſcunt. In genere tamen multo validiores ſunt illis, quibus plantae inſtruantur.

Foemora ad exortum caudae coalita, magis tamen prae brachiis longa, plantis pentadaſtylis, digitis membrana firma nuda inter ſe iunctis; horum extimi multo longiores ſunt, medius minimus, unde plantae lunulatae apparent; ungues nigri, teneriores, attamen acutiores quam in plantis; mammae duae retractiles, quibus unicuique foetum nutriunt.

Cutis ſat firma, craſſa, pilis curtis tenaciter inhaerentibus inſtructa eſt; color vero eorum in diuerſis partibus diuerſus eſt. Capitis color obſcure caſtaneus et magis ad nigredinem inclinatur, qui ſuperne retro aperturam aurium excurrit, inferne vero coarctatur. Reliquum corpus fordide album, ventre tamen magis albicante. In dorſo ad humeros conſpicitur macula capiti concolor, quae ſtatim bifurca euadit et ſecundum utrumque latus uſque ad regionem, ubi emittitur penis, excurrit lunae dimidia-tae forma, quae ſemper conſtans eſt, accedentibus interim aliis eiſdem coloris maculis irregularibus.

Ita

Ita se habet mas iam adultus; iuniores autem non modo ratione magnitudinis, verum etiam coloris multum a parentibus distant. Primo enim anno superne cineriae ac lucidae sunt, inferne magis albidae, adspersae vndique maculis rarioribus nigricantibus modo rotundatis, oblongis modo, incolisque tunc licet improprie (бѣлки) *phocae albicantes*, audiunt (a). Ab altero anno cinereus color diluitur albedine, maculae euadunt maiores et euidentiores et hinc (сѣрки) *phocae maculatae*, vocantur. Hunc colorem foemellae immutatum, nisi incrementum corporis, numerum atque figuram macularum velis, seruant, sub eodemque nomine semper manent: mares vero aetate prouecti subeunt mutationem colorum, vt supra descripsimus, et ob maculas obscure castaneas, latera occupantes Крылашки (quasi alatae) appellantur.

Phoca nunc descripta frigidiores maris plagas amat; hinc nonnisi hyeme cum ipsa glacie in mari albo apparet, et sub finem Aprilis enixo et enutrito foetu iterum cum glacie in spatiosum Oceanum glaciale abit, relictis modo catulis, qui eo vsque permanent, donec glacies cum litoribus cohaerens soluatur, tuncque et illi vestigia parentum praemunt. Circa insulam vero Noua Zemlia dictam, vbi glacies frequens est, omni anni tempore, vt piscatores referunt, conspicitur. Porro illam eandem esse, quam Cranzius in itinere suo Grönlandico Tom. I. pag. 165. no. 2. describit; ex ipsius verbis loculentissime patet: dicit enim „Phoca, Atterfoak Grönlandis, habet caput pro-
„minulum, corpus crassum, copiosiore et melioris no-
„tae pinguedinem, aetateque matura IV. vlnas longa, co-
„lore cano; excepto clypeo dorsali, quem duae maculae
„semi-

(a) Huiusmodi phocam iuniorem sistit Tab. VII. quae 2. pedes et
11. pollices longa est. Tab. VII.

„semilunares formant, nigricante. Nulla autem phocarum species tantam mutationem colorum subit, vti haec; recens enim nata albissima et lanuginosa est, primoque anno ex giluo albicat, altero vero cinerea est, tertio lituris pingitur, quarto adspergitur maculis, quinto anno iam aetatem maturam attingit, et macula illa clypei-formi instruitur.„

Mutationes colorum, quas phocam grönlandicam ratione aetatis subire ait Cranzius, minime dubium mouere debet illam esse a nostra diuersam. Confundit ille, sine dubio, duas phocarum species, Phocam oceanicam scilicet, et phocam leporem marinum, de qua mox dicturus sum; huius enim catuli recens nati albissimi sunt et villosi, oceanicae vero foetus ex utero exemptus semper cinereus est et lituris nigricantibus insignitur.

Phocam denique nostram esse phocam oceanicam beati Steleri (a) et phocam tertiam beati Krascheninnicouii (b) ex locis collatis vberime patet.

Phoca Oceanica capitur ob corium et pinguedinem; coria animalium adutorum adhibentur ad obducenda scrinia, iuniorum vero, in insula Solovki dicta, subiguntur ad ocreas conficiendas; haec enim coria rite parata ob tenacitatem suam magis humiditatem arcere solent, quam coria subacta vitulorum: pinguedo ititem coriariis interuit.

PHOCA LEPORINA.

Tab. VIII. Phocam Leporinam tempore modo aestivo in mari albo comparere et flumina in eum se exonerantia ascedere et descendere, antea monuimus; hincque eam diuersam esse a *Phoca Oceanica* conclusionem fecimus. Nunc vero quaenam sint notae distinctivae eam a phoca Oceanica segregantes proponendum est.

Dimer-

(a) Noua Commentaria A. S. Petropolit. Tom. II. pag. 290.

(b) Descript. Kamtschatkae Tom. I. pag. 262.

Dimensio.

	Ped.	Poll.	Lin.
Longitudo totius animalis ab apice rostri ad			
caudae extremum - - -	6	6	-
— ad exortum pinnae posterioris - -	6	2	-
— ad brachia - - - -	2	-	-
Ab apice labri superioris ad canthum oculi maior.	-	5	2
Ab oculi cantho maiori ad minorem - -	-	1	2
Ab apice labri super. ad aricularum radices	-	8	6
— — — — ad nares - -	-	1	8
Cauda longa est - - - -	-	4	2
— lata ad radicem - - - -	-	2	1
Pes pinnatus posterior longus - - -	-	11	4
Pinna posterioris pedis ad exortum lata -	-	6	-
Ab exortu pedis posterioris ad vnguium radices	-	8	10
Vnguis maximus primi digiti longus -	-	-	9
— idem latus - - - -	-	-	5
Pinna ipsa posteriorum pedum extremitatibus			
expensis lata - - - -	1	1	-
Pedes pinnati anteriores longi - - -	-	6	3
— — ad exortum vnguium - - -	-	4	-
Vnguis maximus quantum prominet longus	-	1	2
— — latus - - - -	-	-	6
Setae mistac. longissimae - - - -	-	5	-
Apertura rictus per labrum superius demensi -	-	9	5
— — — — inferius - - -	-	7	11
Crassitudo rostri - - - -	1	-	5
— capitis linea per oculos ducta -	1	4	5
— — per aures - - - -	1	7	6
— corporis ante brachia - - -	4	2	-
— — pone brachia - - -	5	1	-
— — ad exortum pedum posterior -	2	1	-

Descriptio.

Phoca nunc describenda ratione habitus corporis ac magnitudinis, vt ex dimensionibus patet, phocam Oceanicam omnino
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. *L 1* refert;

refert ; sunt tamen quaedam huic speciei propria. Color enim totius sordide albus, admixta pauca flauedine, neque vnquam maculata conspicitur. Pili sunt ploxiores, non appressi, sed erecti, praesertim vero in iunioribus prolixitate mollitie atque albedine pilos leporinos imitantur ; vnde ratio denominationis facile patet (a).

Caput non tam magnum, prouti in phoca Oceanica, sed elongatum est ; labrum superius magis tumidum et instar vitulini crassum. Oculi coerulescentes, pupilla nigra, dentes numero et ordine omnino sunt vt in phoca Oceanica ; multo tamen validiores ; ast vibrissae alio modo sese habent ; constant enim quindecim ordinibus setarum, quae crassae validaeque sunt et anteriorem partem labri superioris vndique obsident, hinc phoca haec quasi barbata apparet.

Brachia multo debiliora sunt, palmae breues coarctatae et quasi abruptae. Membrana plantarum digitos vnies minime lunulata, sed vndique aequalis est ; cauda breuior, crassior tamen.

Euentissima autem distinctionis nota consistit in ipso corio, quod quadruplo crassius est ; corio phocae Oceanicae, et animali recens occiso detractum V. lineas crassum. Reliqua vt in phoca Oceanica.

Phocam Leporinam ab aliis distinctam nullibi inuenimus, Cranzius tamen videtur eam cum phoca Oceanica confundisse, vt supra adnotauimus. Olassens in itinere Islandico T. XXXII. Fig. 2. eam sub nomine *phocae iunioris Kopur*. depictam sistere, ex icone collato facile patet.

Phoca Leporina occiditur propter adipem et corium. Adeps ipsius eidem vsui inservit ac phocae Oceanicae ; corium vero ob firmitatem et crassitudinem suam scinditur in linea spirali pondereque appenso in rectam dirigitur et ad lora habenasque adhibetur. Iuniorum autem pelles subiguntur, pilique nigro imbuuntur colore. His obducuntur externae mytrae, quae quodammodo pelles castoreas imitantur ; sed pili multo sunt rigidiore, tempori tamen longe resistunt nec facile atteruntur aut defluunt.

ASTRO-

(a) Tab. IX. sistit phocam leporinam iuniorem, quae 3. ped. longa est.

ASTRONOMICA.

L12

CON-

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

CONSIDERATIONES
SVPER PROBLEMA TE ASTRONOMICO
IN TOMO COMMENTARIOR. VETER. IV.
PERTRACTATO.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Cum illo tempore calculus angulorum adhuc parum esset excultus, solutiones ibi traditae huius problematis non satis sunt dilucide ac plerumque per longas ambages erutae; unde haud abs re fore arbitror hoc idem problema retractare, quandoquidem plures egregias observationes nunc adicere licebit, quibus istud argumentum multo magis illustrabitur.

§. 2. Requiritur autem in hoc problemate, ut ex tribus eiusdem stellae fixae observatis altitudinibus, una cum temporis intervallis inter observationes elapsis tam eleuatio poli eius loci, ubi observationes sunt factae, quam declinatio ipsius stellae, seu eius distantia a polo definiatur. Sit igitur P polus et Z zenith eius loci, ubi observationes sunt institutae et O A B C V parallelus, quem stella motu diurno percurrit, eritque P Z complementum altitudinis poli quae sitae et arcus P A, P B et P C referent distantiam stellae a polo, siue complementum eius declinationis, quae pariter desideratur; unde has duas incognitas vocemus $PZ = x$ et $PA = PB = PC = y$.

Tab. X.
Fig. 1.

§. 3. Iam quae sunt data contemplemur, ac primo quidem tempore obseruationis primae fuerit stella in A, voceturque arcus $ZA=a$, qui erit complementum altitudinis obseruatae, postquam scilicet per refractionem fuerit correcta. Deinde elapso quodam tempore cognito stella fuerit in B, voceturque arcus $ZB=b$, ac denuo elapso tempore quodam cognito peruenerit stella in C, voceturque arcus $ZC=c$. Ex datis autem temporis interuallis innotescant anguli ad Polum APB et BPC, quos ponamus $APB=\alpha$ et $BPC=\beta$, atque hae sunt quinque quantitates cognitae, ex quibus binas incognitas x et y determinari oportet.

§. 4. Euidens autem est quamlibet harum trium obseruationum tanquam primam spectari posse. Ita si tempore primae obseruationis stella fuerit in B, tempore secundae erit in C, existente angulo $BPC=\beta$; tertia vero postridie eueniet in A, elapso tempore, cui respondet angulus horarius $=360^\circ-\alpha-\beta$, siue quia in huiusmodi calculis totam peripheriam 360° negligere licet, iste angulus erit $-\alpha-\beta$, quem breuitatis gratia ponamus $=\gamma$, ita vt sit $\alpha+\beta+\gamma=0$. Hi ergo anguli, si prima obseruatio in A statuatur, ordinem tenent α, β, γ ; sin autem prima sit in B, ordo angulorum erit β, γ, α ; sumpto denique prima obseruatione in C ordo angulorum erit γ, α, β .

§. 5. Ad solutionem autem perficiendam necesse est insuper angulum ZPA in calculum introducere. Ponamus igitur $ZPA=\Phi$, atque ob analogiam statuamus $ZPB=\Phi'$ et $ZPC=\Phi''$, eritque igitur $\Phi'=\Phi+\alpha$, $\Phi''=\Phi'+\beta$ et $\Phi=\Phi''-\alpha-\beta$, siue $\Phi=\Phi''+\gamma$ ita vt hi tres anguli Φ, Φ', Φ'' pari ordine procedant atque anguli α, β, γ ; vnde permutato obseruationum ordine similis permutatio locum habebit tam in angulis α, β, γ quam in angulis Φ, Φ', Φ'' . Haec ideo notasse iuuabit, vt formulae pro vno casu inventae facili ad reliquos casus transferri possint.

§. 6. Consideremus nunc triangulum sphaericum AZP, ex cuius lateribus $ZA = a$, $ZP = x$ et $PA = y$ angulus $ZPA = \Phi$ ita determinatur, vt sit $\cos. \Phi = \frac{\cos. a - \cos. x \cos. y}{\sin. x \sin. y}$ siue $\cos. \Phi \sin. x \sin. y = \cos. a - \cos. x \cos. y$. Simili modo ex triangulo ZBP colligemus hanc determinationem:

$$\cos. \Phi' \sin. x \sin. y = \cos. b - \cos. x \cos. y$$

ac tertio similiter ex triangulo ZCP habebimus

$$\cos. \Phi'' \sin. x \sin. y = \cos. c - \cos. x \cos. y,$$

atque ex his tribus aequationibus totam solutionem erui oportet.

§. 7. Quo autem calculum subleuemus ponamus, brevitatis gratia $\cos. x \cos. y = p$ et $\sin. x \sin. y = q$, ita vt hinc fiat $p + q = \cos. (x - y)$ et $p - q = \cos. (x + y)$: inuentis ergo litteris p et q facillime ambo anguli quaesiti x et y innotescunt; vbi imprimis notari meretur, binos angulos x et y inter se esse permutabiles, namque si facta permutatione posuissimus $PZ = y$ et $PA = PB = PC = x$, ad easdem aequationes peruenissemus; sicque pro x et y quouis casu bini reperientur anguli, quorum alterum pro arcu PZ , alterum vero pro arcu PA accipere licebit, scilicet ex ipsa quaestionis natura eleuatio poli ac declinatio stellae semper inter se commutari poterunt.

§. 8. His igitur litteris p et q introductis tres nostrae aequationes ita se habebunt:

$$\text{I. } q \cos. \Phi = \cos. a - p$$

$$\text{II. } q \cos. \Phi' = \cos. b - p$$

$$\text{III. } q \cos. \Phi'' = \cos. c - p.$$

Hinc igitur primo facillime eliminabimus quantitatem incognitam p ; si enim quamlibet harum aequationum a se-
quente subtrahamus, obtinebimus has aequationes:

I. q

$$\text{I. } q (\cos. \Phi' - \cos. \Phi) = \cos. b - \cos. a$$

$$\text{II. } q (\cos. \Phi'' - \cos. \Phi') = \cos. c - \cos. b$$

$$\text{III. } q (\cos. \Phi - \cos. \Phi'') = \cos. a - \cos. c,$$

quarum autem duas tantum euoluisse sufficiet. Quodsi iam porro breuitatis gratia ponamus

$$\cos. b - \cos. a = A; \cos. c - \cos. b = B \text{ et } \cos. a - \cos. c = C;$$

ita vt sit $A + B + C = 0$. impetrabimus has aequationes maxime succinctas:

$$\text{I. } \cos. \Phi' - \cos. \Phi = \frac{A}{q}$$

$$\text{II. } \cos. \Phi'' - \cos. \Phi' = \frac{B}{q}$$

$$\text{III. } \cos. \Phi - \cos. \Phi'' = \frac{C}{q}.$$

§. 9. Nunc etiam facile erit alteram incognitam q eliminare; diuidamus enim primam harum postremarum aequalitatum per tertiam, et nanciscemur istam $\frac{\cos. \Phi' - \cos. \Phi}{\cos. \Phi - \cos. \Phi''} = \frac{A}{C}$; quare cum sit $\Phi' = \Phi + \alpha$ et $\Phi'' = \Phi - \gamma$, erit

$$\cos. \Phi' = \cos. \Phi \cos. \alpha - \sin. \Phi \sin. \alpha \text{ et}$$

$$\cos. \Phi'' = \cos. \Phi \cos. \gamma + \sin. \Phi \sin. \gamma;$$

quibus valoribus substitutis aequatio hanc induet formam:

$$\frac{\cos. \Phi \cos. \alpha - \sin. \Phi \sin. \alpha - \cos. \Phi}{\cos. \Phi - \cos. \Phi \cos. \gamma - \sin. \Phi \sin. \gamma} = \frac{A}{C}$$

quae sponte redigitur ad hanc formam:

$$\frac{\cos. \alpha - \sin. \alpha \operatorname{tg.} \Phi}{1 - \cos. \Phi \sin. \gamma \operatorname{tg.} \Phi} = \frac{A}{C},$$

vnde igitur commodissime deducitur angulus Φ , cum sit $\operatorname{tang.} \Phi = \frac{A(1 - \cos. \gamma) + C(1 - \cos. \alpha)}{A \sin. \gamma - C \sin. \alpha}$. Hoc igitur modo angulus Φ per meras quantitates cognitae determinatur, quo inuento porro colligitur fore $q = \frac{A}{\cos. \Phi' - \cos. \Phi}$, hincque denique $p = \cos. a - q \cos. \Phi$, sicque problema perfecte erit solutum.

§. 10. Interim tamen operae pretium erit singulas formulas, ad quas hoc modo perueniuntur, accuratius euolvere,

vere, ac primo quidem, si observatio prima ex A in B vel C transferatur, eodem modo perueniemus ad has aequationes:

$$\text{tang. } \Phi' = \frac{B(1 - \cos. \alpha) + A(1 - \cos. \beta)}{B \sin. \alpha - A \sin. \beta} \text{ et}$$

$$\text{tang. } \Phi'' = \frac{C(1 - \cos. \beta) + B(1 - \cos. \gamma)}{C \sin. \beta - B \sin. \gamma}.$$

§. 11. Inuenta tangente anguli Φ quaeramus quoque eius tam finum quam cosinum, ac reperiemus

$$\sin. \Phi = \frac{A(1 - \cos. \gamma) + C(1 - \cos. \alpha)}{\sqrt{2AA(1 - \cos. \gamma) + 2CC(1 - \cos. \alpha) + 2AC(1 - \cos. \gamma - \cos. \alpha + \cos. \beta)}}$$

Hic autem pro denominatore notetur esse

$$\cos. \alpha \cos. \gamma - \sin. \alpha \sin. \gamma = \cos. (\alpha + \gamma) = \cos. \beta$$

sicque iste denominator habebit hanc formam:

$$\sqrt{2AA(1 - \cos. \gamma) + 2CC(1 - \cos. \alpha) + 2AC(1 - \cos. \gamma - \cos. \alpha + \cos. \beta)}$$

hunc ergo denominatorem si breuitatis gratia designemus per Δ erit

$$\sin. \Phi = \frac{A(1 - \cos. \gamma) + C(1 - \cos. \alpha)}{\Delta} \text{ et } \cos. \Phi = \frac{A \sin. \gamma - C \sin. \alpha}{\Delta}.$$

§. 12. Hic autem imprimis notari meretur pro quantitate irrationali Δ perpetuo eundem valorem resultare, etiamsi litterae a, b, c ; A, B, C et α, β, γ ordine praescripto inter se permutentur. Cum enim sit

$$\frac{1}{2} \Delta^2 = AA(1 - \cos. \gamma) + CC(1 - \cos. \alpha) + AC(1 - \cos. \gamma - \cos. \alpha + \cos. \beta)$$

singulis terminis secundum ternos cosinus, $\cos. \alpha$, $\cos. \beta$ et $\cos. \gamma$ disponendis, erit

$$\frac{1}{2} \Delta^2 = AA + AC + CC - (AC + CC) \cos. \alpha + AC \cos. \beta - (A^2 + AC) \cos. \gamma$$

Quoniam vero est $A + B + C = 0$, primae parti huius expressionis adiiciatur formula $AB + BB + BC = 0$ atque prima pars euadet $AA + BB + CC + AB + AC + BC$, ubi ternae litterae manifesto sunt permutabiles. Deinde vero erit

$$AC + CC = C(A + C) = -BC \text{ et}$$

$$AA + AC = A(A + C) = -AB$$

quibus substitutis erit

$$\frac{1}{2}\Delta = AA + BB + CC + AB + AC + BC + BC \cos \alpha + AC \cos \beta + AB \cos \gamma,$$

vbi permutabilitas litterarum est manifesta, ideoque pro omnibus obseruationum ordinibus semper erit

$$\Delta = \sqrt{2(AA + BB + CC + AB + AC + BC + BC \cos \alpha + AC \cos \beta + AB \cos \gamma)}$$

quae formula etiam hoc modo exhiberi potest

$$\Delta = \sqrt{(2A^2 + 2B^2 + 2C^2 + 4AB \cos \gamma + 4AC \cos \beta + 4BC \cos \alpha)}.$$

§. 13. Inuento iam isto valore quantitatis irrationalis Δ tam sinus quam cosinus angulorum Φ , Φ' et Φ'' sequenti modo exprimentur:

$$\sin. \Phi = \frac{A(1 - \cos \gamma) + C(1 - \cos \alpha)}{\Delta}; \quad \cos. \Phi = \frac{A \sin \gamma - C \sin \alpha}{\Delta};$$

$$\sin. \Phi' = \frac{B(1 - \cos \alpha) + A(1 - \cos \beta)}{\Delta}; \quad \cos. \Phi' = \frac{B \sin \alpha - A \sin \beta}{\Delta};$$

$$\sin. \Phi'' = \frac{C(1 - \cos \beta) + B(1 - \cos \gamma)}{\Delta}; \quad \cos. \Phi'' = \frac{C \sin \beta - B \sin \gamma}{\Delta}.$$

§. 14. Ex his iam formulis triplici modo valor litterae q elici potest, qui autem terni valores inter se perfecte congruere debebunt, id quod statim ex primo valore $q = \frac{A}{\cos. \Phi' - \cos. \Phi}$ perspicietur; cum enim ex formulis modo inuentis fit

$$\cos. \Phi' - \cos. \Phi = \frac{B \sin \alpha - A(\sin \beta + \sin \gamma) + C \sin \alpha}{\Delta} \text{ ob}$$

$$B + C = -A \text{ erit } \cos. \Phi' - \cos. \Phi = -\frac{A(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)}{\Delta},$$

ideoque $q = -\frac{\Delta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$, vbi permutabilitas in oculos incurrit simulque patet ex benis reliquis formulis

$$q = \frac{B}{\cos. \Phi'' - \cos. \Phi'} \text{ et } q = \frac{C}{\cos. \Phi - \cos. \Phi''},$$

prorsus eandem hanc expressionem resultare debuiffe.

§. 15. Tantum igitur superest, vt etiam valorem litterae p hinc oriundum contemplemur, ad quod vtamur formula prima, qua fit $p = \cos. a - q \cos. \Phi$. Est vero

$$q \cos. \Phi = - \frac{A \sin. \gamma + C \sin. \alpha}{\sin. \alpha + \sin. \beta + \sin. \gamma} \text{ ideoque}$$

$$p = \cos. a + \frac{A \sin. \gamma - C \sin. \alpha}{\sin. \alpha + \sin. \beta + \sin. \gamma},$$

verum quia hic $\cos. a$ non per litteras A, B, C exprimere licet, necesse est, vt loco litterarum A, B, C vicissim cosinus angulorum a, b, c in calculum introducantur; tum autem erit

$$q \cos. \Phi = - \frac{\cos. b \sin. \gamma + \cos. a \sin. \gamma + \cos. a \sin. \alpha - \cos. c \sin. \alpha}{\sin. \alpha + \sin. \beta + \sin. \gamma}$$

quo valore substituto reperietur

$$p = \frac{\cos. a \sin. \beta + \cos. b \sin. \gamma + \cos. c \sin. \alpha}{\sin. \alpha + \sin. \beta + \sin. \gamma}$$

vbi iterum permutabilitas secundum ordinem litterarum per se est manifesta; vnde intelligitur ex omnibus tribus formulis litteram p continentibus eundem plane valorem resultare debere.

§. 16. Hic iam opere pretium erit etiam in valore litterae Δ loco litterarum A, B, C suos valores supra assignatos substituere, quo facto reperietur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta^2 = & 2 \cos. a^2 \sin. \frac{1}{2} \beta^2 + 2 \cos. a \cos. b (\sin. \frac{1}{2} \alpha^2 - \sin. \frac{1}{2} \beta^2 - \sin. \frac{1}{2} \gamma^2) \\ & + 2 \cos. b^2 \sin. \frac{1}{2} \gamma^2 + 2 \cos. b \cos. c (\sin. \frac{1}{2} \beta^2 - \sin. \frac{1}{2} \gamma^2 - \sin. \frac{1}{2} \alpha^2) \\ & + 2 \cos. c^2 \sin. \frac{1}{2} \alpha^2 + 2 \cos. c \cos. a (\sin. \frac{1}{2} \gamma^2 - \sin. \frac{1}{2} \alpha^2 - \sin. \frac{1}{2} \beta^2) \end{aligned}$$

vnde colligitur fore

$$\Delta = 2 \sqrt{\begin{aligned} & \cos. a^2 \sin. \frac{1}{2} \beta^2 + \cos. a \cos. b (\sin. \frac{1}{2} \alpha^2 - \sin. \frac{1}{2} \beta^2 - \sin. \frac{1}{2} \gamma^2) \\ & + \cos. b^2 \sin. \frac{1}{2} \gamma^2 + \cos. b \cos. c (\sin. \frac{1}{2} \beta^2 - \sin. \frac{1}{2} \gamma^2 - \sin. \frac{1}{2} \alpha^2) \\ & + \cos. c^2 \sin. \frac{1}{2} \alpha^2 + \cos. c \cos. a (\sin. \frac{1}{2} \gamma^2 - \sin. \frac{1}{2} \alpha^2 - \sin. \frac{1}{2} \beta^2). \end{aligned}}$$

vbi permutabilitas litterarum a, b, c item α, β, γ clarissime perspicitur.

DE FIGVRA APPARENTE ANNULI SATVRNI PRO EIVS LOCO QVOCVNQVE RESPECTV TERRAE.

Auctore

L. E V L E R O.

§. I.

Tab. X. **C**oncipiamus Saturnum in ipso plano eclipticae moueri ;
Fig. 2. nam quoniam eius latitudo perpetuo est valde parua,
eius declinatio ab hoc plano vix quicquam in apparentia
annuli mutare poterit. Referat igitur planum tabulae ipsam
eclipticam, in qua **C** sit centrum Saturni, et recta **ACB**
sit intersectio annuli Saturni cum ecliptica, cuius diameter
per ipsam hanc rectam **AB** repraesentetur, voceturque ra-
dius $CA = CB = r$. Deinde quia annulus ad eclipticam
inclinatur sub angulo circiter 31 graduum, quem vocemus
 $= i$, repraesentet semicirculus **AMB** semissem annuli, in
quo consideretur punctum quodcunque **M**, voceturque an-
gulus $ACM = \phi$; hincque ex **M** ducto ad **AB** perpendi-
culo **MP**, erit $MP = \sin. \phi$ et $CP = \cos. \phi$. Porro ex **M**
ad planum eclipticae ducatur perpendiculum **MR**, et ob
angulum $MPR = i$ erit $MR = \sin. \phi \sin i$ et $PR = \sin. \phi \cos. i$.

Fig. 3. §. 2. Versetur nunc Terra vbicunque in **T**, et ad
eius locum ducatur ex **C** recta **CT**, et vocetur angulus
 $ACT = \gamma$. Tum quia distantia Terrae quasi est infinita, huic
rectae **CT** constituatur planum normale, quod simul ad
eclipticam erit perpendiculare eamque secabit secundum re-
ctam **CQ**; ita vt angulus **TCQ** sit rectus, ideoque an-
gulus

gulus $ACQ = 90^\circ - \gamma$. Iam ad hanc CQ ex R ducatur normalis RQ , et ex Q erigatur perpendicularum ad eclipticam $QS = RM$, eritque S projectio puncti M in planum CQS facta. Tota autem haec projectio ex omnibus punctis M orta dabit figuram, sub qua annulus spectatori in Terra posito apparebit.

§. 3. Pro hac igitur projectione inuestiganda vocetur abscissa $CQ = x$ et applicata $QS = y$, et quia erat $PR = \sin. \Phi \cos. i$, $RM = \sin. \Phi \sin. i$ et $CP = \cos. \Phi$, statim erit $y = \sin. \Phi \sin. i$. Iam ex puncto P ad rectam CQ agatur normalis PV , eritque $CV = \cos. \Phi \sin. \gamma$ et $PV = \cos. \Phi \cos. \gamma$. Tum vero ex R ad PV ducatur normalis RU , et ob angulum $RPV = 90^\circ - \gamma$ erit

$PU = \sin. \Phi \cos. i \sin. \gamma$ et $RU = \sin. \Phi \cos. i \cos. \gamma = QV$, unde fit

$$CQ = x = \cos. \Phi \sin. \gamma + \sin. \Phi \cos. i \cos. \gamma.$$

Tota igitur quaestio reducitur ad inuentionem curuae sub coordinatis $CQ = x = \cos. \Phi \sin. \gamma + \sin. \Phi \cos. i \cos. \gamma$ et $QS = y = \sin. \Phi \sin. i$ contentae.

§. 4. Facile autem patet, si angulus Φ eliminetur, Tab. X. prodituram esse aequationem inter x et y secundi gradus, Fig. 4. ita ut haec curua sit sectio conica. Cum enim sit

$$\sin. \Phi = \frac{y}{\sin. i}, \text{ erit } \cos. \Phi = \frac{\sqrt{\sin. i^2 - y^2}}{\sin. i}, \text{ unde oritur aequatio}$$

$$x = \frac{\sin. \gamma \sqrt{\sin. i^2 - y^2}}{\sin. i} + \frac{y \cos. \gamma}{\tan. i},$$

quae ad rationalitatem perducta abit in hanc:

$$xx - \frac{2xy \cos. \gamma}{\tan. i} + \frac{yy \cos. \gamma^2}{\tan. i^2} = \frac{\sin. \gamma^2 (\sin. i^2 - yy)}{\sin. i^2}, \text{ siue}$$

$$0 = xx \sin. i^2 - 2xy \sin. i \cos. i \cos. \gamma + yy (1 - \cos. \gamma^2 \sin. i^2) - \sin. \gamma^2 \sin. i^2.$$

§. 5. Cum igitur curua quaesita manifesto sit ellipsis, imprimis necesse erit, tam positionem quam quantitatem eius axium determinandi; quod quo facilius fieri possit, ponamus

mus breuitatis gratia $x = a \cos. \Phi + b \sin. \Phi$ et $y = c \sin. \Phi$, ita vt sit $a = \sin. \gamma$, $b = \cos. \gamma \cos. i$ et $c = \sin. i$, hincque ducta recta CS erit

$$CS = xx + yy = a^2 \cos. \Phi^2 + 2ab \sin. \Phi \cos. \Phi + (b^2 + c^2) \sin. \Phi^2.$$

Constat autem punctum S ibi in alterutrum axem incidere, vbi haec formula valorem fortietur vel maximum vel minimum; quamobrem differentiale huius CS² nihilo aequetur, vnde oritur haec aequatio:

$$-aa \sin. \Phi \cos. \Phi + ab \cos. \Phi^2 - ab \sin. \Phi^2 + (bb + cc) \sin. \Phi \cos. \Phi = 0.$$

Est vero $\sin. \Phi \cos. \Phi = \frac{1}{2} \sin. 2\Phi$ et $\cos. \Phi^2 - \sin. \Phi^2 = \cos. 2\Phi$

vnde fit $\frac{(bb + cc - aa)}{2} \sin. 2\Phi + ab \cos. 2\Phi = 0$, vnde elicitur

$$\text{tang. } 2\Phi = \frac{2ab}{aa - bb - cc}. \text{ Substitutis iam pro } a, b, c \text{ valoribus habebitur } \text{tang. } 2\Phi = \frac{\sin. \gamma \cos. \gamma \cos. i}{\sin. \gamma^2 \cos. i^2 - \cos. \gamma^2}.$$

§. 6. Ad binos igitur valores anguli Φ inueniendos, quaeratur angulus α , vt sit $\text{tang. } \alpha = \frac{2ab}{aa - bb - cc}$, et cum haec fractio etiam sit $= \text{tang. } (180^\circ + \alpha)$, erit tam $2\Phi = \alpha$, quam $2\Phi = 180^\circ + \alpha$, ideoque vel $\Phi = \frac{1}{2}\alpha$ vel $\Phi = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Quod si iam alteruter horum duorum valorum $\frac{1}{2}\alpha$ et $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$ loco Φ substituatur, tum fractio $\frac{y}{x} = \frac{\sin. \Phi}{a \cos. \Phi + b \sin. \Phi}$ dabit tangentem anguli, sub quo alter ellipſeos axis ad rectam CQ inclinatur; recta autem $CS = \sqrt{xx + yy}$ dabit semissem huius axis, cui alter in C normaliter est iungendus; quandoquidem facile patet, punctum C esse centrum huius ellipſis. Verum quia ex valore pro tang. 2Φ invento tam $\sin. \Phi$ quam $\cos. \Phi$ ad formulas valde intricatas perducerent, inuestigationem axium alia via instituiamus.

Tab. X.
Fig. 5.

§. 7. Quoniam recta CD, ad quam ellipſin quaesitam referimus, est in ipſo plano eclipticae et ad rectam CT normalis, ipſa autem figura plano eclipticae normaliter inſiſtere est concipienda, referat recta CT alterutrum ellip-

ellipticos semiaxem, pro cuius positione ponamus angulum $DCF = \zeta$, et ducta normali SX vocemus pro ipso hoc axe CF abscissam $CX = X$ et applicatam $XS = Y$; ac facile patet fore

$$X = x \cos. \zeta + y \sin. \zeta \text{ et } Y = y \cos. \zeta - x \sin. \zeta$$

vnde valoribus loco x et y substitutis erit

$$X = a \cos. \zeta \cos. \Phi + (b \cos. \zeta + c \sin. \zeta) \sin. \Phi$$

$$Y = (c \cos. \zeta - b \sin. \zeta) \sin. \Phi - a \sin. \zeta \cos. \Phi$$

pro quibus valoribus breuitatis gratia scribamus

$$X = A \cos. \Phi + B \sin. \Phi \text{ et } Y = C \cos. \Phi + D \sin. \Phi.$$

§. 8. Iam quia per hypothesin recta CF est semiaxis ellipsis, aequatio inter X et Y necessario habebit talem formam: $m X^2 + n Y^2 = K$; quamobrem, si in hac aequatione illi valores pro X et Y substituantur, angulus variabilis Φ ex calculo excedere debet. Primo igitur necesse est, vt duplicia producta formae $\sin. \Phi \cos. \Phi$ se mutuo tollant, vnde fieri oportet $2m AB + 2n CD = 0$, vnde ratio inter m et n colligitur. Erit scilicet $m:n = CD:-AB$; quamobrem nihil impedit, quo minus scribamus $m = CD$ et $n = -AB$ ita vt nostra aequatio sit

$$CD. X^2 - AB. Y^2 = K.$$

§. 9. Nunc igitur exclusis terminis formae $\sin. \Phi \cos. \Phi$ consideremus terminum formae $\cos. \Phi^2$, qui erit

$$(CD. A^2 - AB. C^2) \cos. \Phi^2 = AC(AD - BC) \cos. \Phi^2.$$

Simili modo terminus formae $\sin. \Phi^2$ prodibit

$$(CD. B^2 - AB. D^2) \sin. \Phi^2 = BD(BC - AD) \sin. \Phi^2.$$

Quo igitur angulus Φ ex aequatione exeat, necesse est vt sit

$$AC(AD - BC) = BDCBC - AD)$$

siue

siue $AC = -BD$, vel etiam $AC + BD = 0$; tum enim erit
 $CD \cdot X^2 - AB \cdot Y^2 = AC(AD - BC) = BD(BC - AD) = K$
 Sicque erit $K = AC(AD - BC)$, siue cum ex priore
 conditione sit $D = -\frac{AC}{B}$, erit $K = -\frac{AC^2}{B}(AA + BB)$.

§. 10. Hoc iam valore inuento longitudo semiaxium
 CF et CG facili negotio eruitur. Si enim ponatur $Y = 0$
 valor ipsius X dabit longitudinem semiaxis CF , qui ergo,
 si ponatur $= F$, reperietur

$$CD \cdot F^2 = -\frac{AC(AC + BB)}{B} = -\frac{AC^2}{B},$$

vnde colligitur $F = \sqrt{AA + BB}$. Pro altero autem semi-
 axe, qui sit $CG = G$ et alteri CF normaliter iungitur,
 is reperietur ponendo $X = 0$ et $Y = G$, vnde ergo ae-
 quatio §. praec. fiet

$$-AB \cdot G^2 = -\frac{AC(AC + BB)}{B},$$

vnde concluditur

$$G = \frac{C}{B} \sqrt{AA + BB} = \sqrt{\frac{AA \cdot CC}{BB} + CC}.$$

Quare cum sit $D = -\frac{AC}{B}$, erit quoque $G = \sqrt{CC + DD}$.
 Ceterum hic notetur esse $F : G = B : C$.

§. 11. Substituamus nunc loco litterarum A, B, C, D
 valores assumptos, eritque

$$AA + BB = (aa + bb) \cos. \zeta^2 + 2bc \sin. \zeta \cos. \zeta + cc \sin. \zeta^2.$$

Cum igitur sit $\cos. \zeta^2 = \frac{1 + 2 \cos. 2\zeta}{2}$, $\sin. \zeta^2 = \frac{1 - \cos. 2\zeta}{2}$ et
 $2 \sin. \zeta \cos. \zeta = \sin. 2\zeta$ erit

$$AA + BB = \frac{aa + bb + cc}{2} + bc \sin. 2\zeta + \frac{aa + bb - cc}{2} \cos. 2\zeta.$$

Simili modo reperiemus

$$CC + DD = \frac{aa + bb + cc}{2} - bc \sin. 2\zeta - \frac{aa + bb - cc}{2} \cos. 2\zeta.$$

Praeterea vero erit

$$F : G = (b \cos. \zeta + c \sin. \zeta) : (-a \sin. \zeta).$$

§. 12. Quod si porro loco litterarum a, b, c valores ante assumptos substituamus, reperietur

$$\begin{aligned} aa + bb + cc &= 1 + \sin. \gamma^2 \sin. i^2 \\ aa + bb - cc &= \cos. i^2 - \cos. \gamma^2 \sin. i^2 \text{ et} \\ bc &= \cos. \gamma \sin. i \cos. i \end{aligned}$$

quibus valoribus substitutis erit

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{2} (1 + \sin. \gamma^2 \sin. i^2) + \cos. \gamma \sin. i \cos. i \sin. 2\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2} (\cos. i^2 - \cos. \gamma^2 \sin. i^2) \cos. 2\zeta \\ G^2 &= \frac{1}{2} (1 + \sin. \gamma^2 \sin. i^2) - \cos. \gamma \sin. i \cos. i \sin. 2\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2} (\cos. i^2 - \cos. \gamma^2 \sin. i^2) \cos. 2\zeta. \end{aligned}$$

§ 13. Tantum igitur superest, ut angulum ζ definiamus, cuius valorem peti oportet ex aequatione $AC + BD = 0$, quae, facta prima substitutione, induit hanc formam:

$$-aa \sin. \zeta \cos. \zeta + bc \cos. \zeta^2 + (cc - bb) \sin. \zeta \cos. \zeta - bc \sin. \zeta^2 = 0 \text{ siue} \\ (aa + bb - cc) \sin. \zeta \cos. \zeta + bc (\sin. \zeta^2 - \cos. \zeta^2) = 0$$

quae aequatio manifesto reducitur ad hanc:

$$\frac{1}{2} (aa + bb - cc) \sin. 2\zeta = bc \cos. 2\zeta,$$

unde deducitur

$$\text{tang. } 2\zeta = \frac{2bc}{aa + bb - cc}.$$

Per alteram autem substitutionem habebitur

$$\text{tang. } 2\zeta = \frac{2 \cos. \gamma \sin. i \cos. i}{\cos. i^2 - \cos. \gamma^2 \sin. i^2}$$

ex qua aequatione pro ζ duo reperiuntur valores. Si enim quaeratur angulus β , ut sit

$$\text{tang. } \beta = \frac{2bc}{aa + bb - cc},$$

erit tam $\text{tang. } 2\zeta = \text{tang. } \beta$ quam $\text{tang. } 2\zeta = \text{tang. } (180^\circ + \beta)$, ideoque vel $\zeta = \frac{1}{2}\beta$ vel $\zeta = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$.

§. 14. Cum ex aequatione primo inuenta sit

$$\frac{1}{2} (aa + bb - cc) \sin. 2\zeta = bc \cos. 2\zeta,$$

operae pretium erit annotasse, fore

$$\frac{1}{2} (aa + bb - cc) = \frac{bc \cos. 2\zeta}{\sin. 2\zeta}$$

ex quo valore deducimus

$$bc \sin. 2\zeta + \frac{1}{2} (aa + bb - cc) \cos. 2\zeta = \frac{bc}{\sin. 2\zeta}$$

vnde valores ante inuenti ita succinctius exprimentur:

$$FF = \frac{1}{2} (aa + bb + cc) + \frac{bc}{\sin. 2\zeta}$$

$$GG = \frac{1}{2} (aa + bb + cc) - \frac{bc}{\sin. 2\zeta}$$

vnde postremi valores colliguntur fore

$$FF = \frac{1}{2} (1 + \sin. \gamma^2 \sin. i^2) + \frac{\cos. \gamma \sin. i \cos. i}{\sin. 2\zeta}$$

$$GG = \frac{1}{2} (1 + \sin. \gamma^2 \sin. i^2) - \frac{\cos. \gamma \sin. i \cos. i}{\sin. 2\zeta}$$

sicque tantum opus est vt valorem pro $\sin. 2\zeta$ eruamus.

§. 15. Quoniam igitur inuenimus

$$\tan. 2\zeta = \frac{2bc}{aa + bb - cc}, \text{ erit}$$

$$\sin. 2\zeta = \frac{2bc}{\sqrt{4bbcc + (aa + bb - cc)^2}} \text{ siue ob}$$

$$(aa + bb - cc)^2 = (aa + bb + cc)^2 - 4(aa + bb)cc \text{ erit}$$

$$\sin. 2\zeta = \frac{2bc}{\sqrt{(aa + bb + cc)^2 - 4aacc}}$$

At introducendo denuo angulos γ et i , cum sit

$$aa + bb + cc = 1 + \sin. \gamma^2 \sin. i^2 \text{ et } 2aacc = 2 \sin. \gamma \sin. i$$

manifestum est fore

$$(aa + bb + cc)^2 - 4aacc = 1 - 2 \sin. \gamma^2 \sin. i^2 + \sin. \gamma^4 \sin. i^4 \\ = (1 - \sin. \gamma^2 \sin. i^2)^2.$$

His autem valoribus substitutis colligitur

$$F^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin. \gamma^2 \sin. i^2) + \frac{1}{2} (1 - \sin. \gamma^2 \sin. i^2) = 1$$

$$G^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin. \gamma^2 \sin. i^2) - \frac{1}{2} (1 - \sin. \gamma^2 \sin. i^2) = \sin. \gamma^2 \sin. i^2$$

ita vt ipsi semiaxes sint, maior $CF = F = 1$, idest femi-
diametro annuli aequalis; minor vero $CG = G = \sin. \gamma \sin. i$,
siue, ob inclinationem propemodum $= 30^\circ$, erit $G = \frac{1}{2} \sin. \gamma$.

Vnde

Vnde patet, si fuerit angulus $ACT = \gamma = 0$, quod euenit quando Terra in ipso plano annuli versatur, tum axem minorem euanescere et annulum sub forma lineae rectae, ad eclipticam sub angulo $\zeta = i$ inclinatae, fore appariturum. Sin autem angulus γ fuerit rectus, tum semiaxis minor erit $= \sin. i = \frac{1}{2}$ propemodum.

§. 16. Deinde quod ad positionem horum axium attinet, quoniam inuenimus

$$\begin{aligned} \sin. 2 \zeta &= \frac{2 h c}{\sqrt{4 b b c c + (a a + b b - c c)^2}} = \frac{2 \cos. \gamma \sin. i \cos. i}{1 - j i \cdot \gamma^2 \sin. i^2} \\ \cos. 2 \zeta &= \frac{a a + b b - c c}{\sqrt{4 b b c c + (a a + b b - c c)^2}} = \frac{\cos. i^2 - \cos. \gamma^2 \sin. i^2}{1 - \sin. \gamma^2 \sin. i^2} \end{aligned}$$

inde colligitur

$$\begin{aligned} 1 - \cos. 2 \zeta &= \frac{2 \sin. i^2 \cos. \gamma^2}{1 - \sin. \gamma^2 \sin. i^2} \text{ et} \\ 1 + \cos. 2 \zeta &= \frac{2 \cos. i^2}{1 - \sin. \gamma^2 \sin. i^2} \end{aligned}$$

Quare cum sit

$$\sin. \zeta = \frac{\sqrt{1 - \cos. 2 \zeta}}{2} \text{ et } \cos. \zeta = \frac{\sqrt{1 + \cos. 2 \zeta}}{2},$$

hinc reperietur

$$\sin. \zeta = \frac{\cos. \gamma \sin. i}{\sqrt{1 - \sin. \gamma^2 \sin. i^2}} \text{ et } \cos. \zeta = \frac{\cos. i}{\sqrt{1 - \sin. \gamma^2 \sin. i^2}}$$

consequenter $\tan. \zeta = \cos. \gamma \tan. i$. Sicque innotescit angulus ACF , sub quo axis maior ellipsis ad rectam CD , hoc est ad eclipticam, inclinatur, qui ergo semper minor est angulo i , excepto solo casu quo $\gamma = 0$, vbi fit $\zeta = i$. Iam autem notauimus, hoc casu annulum sub figura lineae rectae apparere.

§. 17. Euolutio huius problematis maxime est memorabilis, propterea quod per calculos non parum molestos tandem deducti sumus ad solutionem simplicissimam; vnde nullum est dubium, quin alia via multo planior datur, ad eandem solutionem perueniendi, quod quidem facile praeuidere licuisset; neque tamen pigebit, istam solutionem

enoluisse, cum in ea insignia calculi artificia occurrant, quae in aliis investigationibus summum fructum afferre poterunt. Interim tamen adhuc aliam solutionem simpliciorum subiungamus, quae tam est plana et facilis, ut vix ullum calculum postulet.

Solutio facillima eiusdem quaestionis.

Tab. XI. §. 18. Quemadmodum ante nostram figuram in plano eclipticae descripsimus, ita nunc planum tabulae in plano annuli accipiatur. Referat igitur circulus centro C diametro AB descriptus ipsum annulum Saturni, sitque recta CQ intersectio huius plani cum ecliptica, cuius inclinatio maneat ut ante $= i$. Iam in plano eclipticae sit punctum T locus Terrae, unde ad planum annuli demittatur perpendicularum TP , et ex P ad lineam nodorum ducatur normalis PQ , ita ut ducta recta TQ angulus PQT metiatur inclinationem $= i$. Ducatur porro recta TC , critque angulus ACT in plano eclipticae, quem ante vocauimus $= \gamma$; unde si ponamus distantiam Terrae a Saturno $TC = c$, erit recta $TQ = c \sin. \gamma$ et $CQ = c \cos. \gamma$. Hinc porro colligitur $TP = c \sin. \gamma \sin. i$ et $PQ = c \sin. \gamma \cos. i$.

§. 19. Vocemus autem porro angulum, sub quo recta TC ad planum annuli inclinatur, hoc est, ducta recta CP , angulum $TCP = \eta$, eritque $\sin. \eta = \frac{TP}{CT} = \sin. \gamma \sin. i$. Ac si etiam vocemus angulum $PCQ = \zeta$, erit $\tan. \zeta = \frac{PQ}{CQ} = \cos. i \tan. \gamma$. Hinc duplici modo exprimi potest recta CP , cum sit tam $CP = CT \cos. \eta$ quam $CP = \frac{PQ}{\sin. \zeta} = \frac{c \sin. \gamma \cos. i}{\sin. \zeta}$; quam ob rem erit $c \cos. \eta = \frac{c \sin. \gamma \cos. i}{\sin. \zeta}$, siue $\sin. \zeta \cos. \eta = \sin. \gamma \cos. i$. Unde patet, quomodo hi anguli de nouo introducti ζ et η a binis datis γ et i pendeant, cum sit $\tan. \zeta = \tan. \gamma \cos. i$ et $\sin. \eta = \sin. \gamma \sin. i$.

§. 20. Nunc igitur quaestio huc redit, sub quam figura annulus sit appariturus oculo in puncto T constituto? quem infinem concipiatur conus scalenus, cuius vertex sit in T , basis vero sit ipse annulus Saturni, dum axis huius coni seu recta $TC = c$ ad planum basis inclinatur angulo $TCP = \eta$. Euidens autem est, hanc figuram prodire, si conus secetur plano ad axem TC normali. Hoc igitur planum annulum secabit sub recta ECF ad rectam PC normalem. Ipsum autem hoc planum inclinabitur ad basin sub angulo $= 90^\circ - \eta$. In hac ergo sectione insunt ambo puncta E et F , existente EF diametro annuli, cuius radium vocemus $CE = CF = a$. Quoniam autem axis coni quasi infinite magnus prae basi spectari poterit, sectionis quaesitae, quae utique erit ellipsis, axis maior diametro annuli aequabitur, ita ut semiaxis maior sit $= a$.

§. 21. Pro altero axe inueniendo secetur conus Tab. XI.
 noster scalenus plano ad axem perpendiculari et per CT Fig. 2.
 transeunte secundum rectam CP , in quo plano ducatur recta CV ad CT normalis, quae ergo faciet angulum $VCG = 90^\circ - \eta$. Vnde si capiatur CG radio annuli aequalis $= a$, et ex G ad CV iterum ducatur normalis GH , manifestum est fore GH semiaxem minorem ellipsis quaesitae. Erit igitur $CH = a \sin. \eta$, ita ut iste semiaxis minor sit $CH = a \sin. \eta = a \sin. \gamma \sin. i$, prorsus ut ante inuenimus.

§. 22. Sin autem distantiam TC , siue axem coni respectu basis non tanquam infinitum spectare liceret, calculus aliquanto fieret prolixior. Huius igitur casus evolutionem hic in genere adiungamus. Referat ergo punctum O verticem coni, recta autem OC eius axem ad planum basis inclinatum sub angulo $ACO = \eta$; atque in hoc plano per OC ad planum basis normaliter constituto sit ACB Fig. 3.

diameter basis, voceturque radius $CA = a$. Praeterea per C ad OC recta producat normalis $M C N$, lateribus coni OA et OB occurrens in punctis M et N , et super hac recta $M N$ constituatur planum ad rectam CO normale; atque definire oportebit sectionem coni, quam hoc planum producat, quandoquidem ista sectio exhibebit figuram, sub qua oculus in O basin coni spectabit; quae cum rectae $M N$ normaliter insit, applicata in puncto C erit radio basis aequalis, ideoque $= a$. Tum vero etiam evidens est, rectam $M N$ fore axem minorem sectionis quaesitae, neque vero punctum C erit in eius centro, quia non in medio rectae $M N$ existit.

§. 23. Ad hanc rectam $M N$ inveniendam ex punctis A et B ad axem OC productum demittantur perpendiculara AP et BQ , quibus ergo recta $M N$ erit parallela. Cum iam sit $CA = CB = a$ et angulus $ACO = \eta$, erit $AP = a \sin. \eta = QB$ et $CQ = CP = a \cos. \eta$. Hinc ob triangula similia erit $OP : PA = OC : CM$, item $OQ : QB = OC : CN$; unde ob $OP = c - a \cos. \eta$ et $OQ = c + a \cos. \eta$, colligitur fore $CM = \frac{a \sin. \eta}{c - a \cos. \eta}$ et $CN = \frac{a \sin. \eta}{c + a \cos. \eta}$. Sicque evidens est partes CM et CN inter se non esse aequales; at tota recta $M N$ hinc prodit $= \frac{2 a \sin. \eta}{c - a \cos. \eta}$, quae cum sit axis minor, erit semiaxis minor $= \frac{a \sin. \eta}{c - a \cos. \eta}$.

Tab. XI.
Fig. 4.

§. 24. Descripta iam sit super hac recta $M N$ tanquam semiaxe minore ipsa ellipsis quaesita MDN , ita ut sit $MC = \frac{a \sin. \eta}{c - a \cos. \eta}$ et $NC = \frac{a \sin. \eta}{c + a \cos. \eta}$, ideoque punctum C extra centrum ellipsis situm. Nouimus autem in puncto hoc C applicatam CD esse $= a$. Nunc super diametro $M N$ describatur semicirculus rectam CD in E secans, ita ut sit CE applicata in semicirculo, ideoque

$$CE = \sqrt{MC \cdot NC} = \frac{a \sin. \eta}{\sqrt{c^2 - a^2 \cos. \eta^2}};$$

eritque ergo $CD : CE = \sqrt{c^2 - a^2 \cos. \eta^2} : c \sin. \eta$.

§. 25.

§. 25. Sit nunc c centrum tam circuli quam ellipsis, ita ut sit $Mc = Nc = \frac{acc \sin. \eta}{cc - a a \cos. \eta^2}$. Vnde erigatur perpendicularis ced , ita ut pariter sit $cc = \frac{acc \sin. \eta}{cc - a a \cos. \eta^2}$. At vero recta cd erit verus semiaxis maior nostrae ellipsis; quare cum sit $CE:CD = ce:cd$, reperietur iste semiaxis maior $cd = \frac{CD:ce}{CE} = \frac{ac}{\sqrt{cc - a a \cos. \eta^2}}$, dum semiaxis minor inventus est $= \frac{acc \sin. \eta}{cc - a a \cos. \eta^2}$.

§. 26. His definitis, si quis haesitet magnitudinem annuli Saturni, cuius radium posuimus $= a$, prae distantia Terrae a Saturno, quam vocauimus $= c$, tanquam evanescentem spectare, ei ita satisfacere possumus, ut dicamus, ellipses, sub qua annulus sit appariturus, semiaxem maiorem fore $= \frac{ac}{\sqrt{cc - a a \cos. \eta^2}}$; at vero semiaxem minorem $= \frac{acc \sin. \eta}{cc - a a \cos. \eta^2}$. Vnde statim liquet, si a prae c negligatur, prodire semiaxem maiorem a , minorem vero $= a \sin. \eta$, prorsus uti supra inuenimus; ubi meminisse iuuabit, angulum η metiri elevationem, sub qua Terra ex Saturno spectata super plano annuli eleuata apparere debet. Quare si Terra in ipso plano annuli versetur, erit angulus $\eta = 0$; tum igitur semiaxis maior erit $= \frac{ac}{\sqrt{cc - a a}}$; at vero minor $= 0$; ita ut annulus tanquam linea recta sit appariturus, cuius longitudo $= \frac{2ac}{\sqrt{cc - a a}}$. Sin autem Terra maxime super plano annuli fuerit eleuata, id quod euenit, quando $\eta = i$, quoniam propemodum $i = 30$ graduum, semiaxis maior ellipsis erit $= \frac{ac}{\sqrt{cc - \frac{3}{4}aa}}$, minor vero $= \frac{2acc}{4cc - 3aa}$. Hoc autem casu annulus maximam amplitudinem habere videbitur. Ceterum prior solutio hac gaudet praerogatiua, quod statim situm annuli respectu eclipticae exhibeat.

DE
APPARITIONE ET DISPARITIONE
ANNULI SATURNI.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Ex longa obseruationum serie Astronomi, ac potissimum acutissimus Hugenius, concluderunt, planetam Saturnum cinctum esse annulo quodam tam tenui, vt, nisi eius superficies plana Terram respiciens a Sole illustretur, conspici omnino nequeat, vnde iste annulus tanquam planum, corpus Saturni ambiens, spectari solet, cuius centrum in ipsum Saturni centrum incidat. Porro vero etiam obseruarunt Astronomi, istum annulum perpetuo situm sibi parallelum conseruare, cuius planum eclipticam semper secundum eandem directionem interfecet, ita vt, vbicunque Saturnus in sua orbita versetur, linea recta, qua planum annuli eclipticam secat, hoc quidem tempore ab 5 sign. $17^{\circ}, 5'$ ad 11 sign. $17^{\circ}, 5'$ dirigatur. Praeterea etiam compertum est, annulum hunc Saturni perpetuo ad eclipticam sub angulo circiter 31 grad. inclinatum manere. Quod quidem ad intersectionem cum ecliptica attinet, Astronomi indicarunt, eam semper ad easdem stellas fixas dirigi, quarum longitudo, quia ob praecessionem aequinoctiorum quotannis circiter 53 sec. crescit, etiam linea nodorum Annuli Saturni tantundem singulis annis progredi est censenda.

Tab. XII. §. 2. Referat nunc figura ACBD, circa Solem in ☉
Fig. 1. existentem, descripta, orbitam Saturni, quam primo quidem
tan-

tanquam in ipsam eclipticam incidentem consideremus, quandoquidem eius inclinatio tantum est $2^{\circ}, 30'$. Postquam enim Phoenomena annuli Saturni in hac hypothese fuerimus contemplati, haud difficile erit correctiones necessarias a latitudine Saturni oriundas inuenire. Assumemus igitur Saturnum per hanc orbitam secundum ordinem signorum A C B D circa Solem circumferri in ipso plano eclipticae, et cum Saturnus fuerit in loco quocunque S, referat recta SN intersectionem plani annuli cum plano eclipticae, quae ergo hoc saltem tempore, scilicet circa An. 1774, dirigatur versus coeli puncta $5^{\circ}, 17^{\circ}, 5'$ et $11^{\circ}, 17^{\circ}, 5'$. Iam huic rectae per \odot ducatur recta parallela A \odot B, sitque longitudo puncti A = $5^{\circ}, 17^{\circ}, 5'$, eritque puncti oppositi B longitudo $11^{\circ}, 17^{\circ}, 5'$. Ad hanc rectam porro ducatur normalis \odot E C, cuius ergo longitudo erit = $8^{\circ}, 17^{\circ}, 5'$, atque maxima elevatio annuli ad eclipticam in regionem \odot E respiciet, cuius inclinatio ad eclipticam aestimatur $31^{\circ}, 20'$.

§. 3. Quando ergo Saturnus in ipso puncto A vel ei opposito B versatur, ideoque longitudo eius Heliocentrica est vel $5^{\circ}, 17^{\circ}, 5'$ vel $11^{\circ}, 17^{\circ}, 5'$, planum annuli per ipsum centrum Solis transibit; propterea quod tum recta A \odot B erit intersectio plani annuli cum ecliptica. In his igitur locis neutra annuli planities a Sole illustrabitur, nisi quatenus ob magnitudinem Solis quidam radii maxime obliqui eo incident. Cum autem semidiameter Solis apparet in Saturno vix sesquiminutum primum superet, inde illuminatio debilissima orietur, quae sensus nostros, ubique Terra versatur, afficere non poterit; ex quo manifestum est, quoties Saturnus in orbitae suae puncto A vel B versetur, tum eius annulum nusquam fore conspicuum, sed hunc planetam prorsus annulo destitutum apparere debere, in quocunque loco etiam Terra reperiatur; hoc ergo Phoenomenon perpetuo elapsis fere quindecim
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I, P. I. O o annis

annis contingere debebit. Contra autem, quando Saturnus vel in C vel in D reperietur, vbi maxima eius eleuatio Soli obuertitur, et radii solares sub angulo $31^{\circ}, 20'$ in planitiem annuli incident, inde maxima collustratio orietur, nobisque annulus sub maxima latitudine clarissime se conspiciendum offeret.

§. 4. Praeter haec vero duo loca, quibus annulus Saturni disparere debet, etiam aliae dantur huius planetae positiones, quibus nobis annulum videre non licet, id quod eueniet, quando Terra in ipsa linea nodorum annuli reperietur, etiamsi ipse annulus a Sole illustretur; quia enim tum Terra in ipso annuli plano versatur, nulli radii a facie annuli illuminata ad nos emitti possunt, vnde etiam his temporibus Saturnus nobis perinde apparebit ac si annulo prorsus esset destitutus.

Tab XII.
Fig. 2.

§. 5. Consideremus nunc etiam orbitam Terrae. quae fit $acbd$, cuius ergo diameter ab quasi erit pars decima diametri orbitae Saturni $A \odot B$; Saturno autem eiusmodi locum S in sua orbita tribuamus, vt inde recta ipsi AB parallela ducta orbitam Terrae secet in punctis t et t' ; tum enim, si Terra versetur siue in t siue in t' , quoniam in ipso plano annuli versatur, is utroque casu conspici non poterit, quod Phoenomenon ergo ob paruitatem orbitae Terrae contingere non poterit, nisi locus Saturni parum sit remotus a terminis A et B. Quia enim distantiae punctorum S et t siue t' a recta AB aequales esse debent, ista distantia semidiametrum orbitae terrestris superare nequit; vnde cum distantia Satuni a Sole sit fere decies maior, quam semidiameter orbitae terrestris, sinus maximae elongationis AS erit propemodum $\frac{1}{18}$, ideoque ipse arcus AS siue angulus $A \odot S$ vix 6 gradus superabit, quos Saturnus fere sex mensibus percurrere solet.

§. 6.

§. 6. Hoc Phœnomenon ergo locum habere nequit, nisi elongatio Saturni a terminis ante stabilitis A et B minor fuerit sex graduum, idque tam ante quam post eius appulsum ad puncta A et B; vnde intelligitur totum temporis interuallum, in quo disparitio annuli Saturni contingere potest, intra durationem vnius anni includi. Ita si tempus fuerit exploratum, quo Saturnus vel per A vel per B transit, disparitio annuli locum habere nequit, nisi intra sex menses vel antecedentes vel consequentes; reliquis enim temporibus omnibus, quibus Saturnus magis distat a locis A et B, Saturnus semper cum annulo conspici debet.

§. 7. Quod quo clarius appareat, vocemus distantiam Terræ a Sole $\odot t = a$, distantiam vero Saturni $\odot S = b$, porro vero ponamus angulum $a \odot t = \alpha$, angulum vero $A \odot S = \beta$, eritque distantia puncti t a recta $AB = a \sin. \alpha$, distantia vero puncti S ab eadem recta $= b \sin. \beta$; vnde patet, disparitionem annuli contingere debere, quoties fuerit $a \sin. \alpha = b \sin. \beta$. Haec autem momenta multo facilius assignari possunt, si perpendamus, rectam tS exhibere locum Saturni Geocentricum; vnde manifesto sequitur, talem disparitionem semper contingere debere, quoties longitudo Saturni Geocentrica fuerit vel $5^\circ, 17^\circ$ vel $11^\circ, 10^\circ$. Ante autem vidimus, ob priorem rationem annulum etiam semper disparere debere, quando longitudo Saturni Heliocentrica quoque fuerit vel $5^\circ, 17^\circ$ vel $11^\circ, 17^\circ$.

§. 8. Facile autem intelligitur, has disparitiones non subito his momentis assignatis contingere, sed per temporis interuallum satis notabile iam ante incipere debere, quando scilicet lumen annuli iam ita sit debile, vt a nobis sentiri nequeat, quae duratio plurimum pendet a qualitate instrumentorum, quae quo fuerint excellentiora, eo tardius aspectus annuli nobis penitus subtrahetur; id quod

etiam de reapparitione est tenendum, quae multo tardius eueniet, quam Saturnus in memorata positione fuerit deprehensus. Quin etiam euenire potest, vt annulus per satis longum temporis spatium percipi nequeat, propterea quod insuper datur tertia causa praeter binas memoratas, quae impedit, quo minus annulum spectare queamus; hanc igitur causam accuratius perpendi conueniet.

§. 9. Scilicet enim vt annulum conspiciere valeamus, omnino necesse est, vt ea annuli facies, quae nobis obvertitur, a Sole illustretur; quando igitur euenit, vt facies auersa radios Solis accipiat, annulus nobis inconspicuus manere debet, etiamsi Saturnus a binis memoratis positionibus satis longe fuerit remotus, quandoquidem fieri nequit, vt ambae annuli facies a Sole illuminentur.

Tab. XII.

Fig. 3.

§. 10. Quod quo clarius intelligatur, versetur Saturnus in puncto S, vnde recta positioni $\odot A$ parallela ducta orbitam Terrae secet in punctis t et t' , quae ergo erit intersectio plani annuli cum plano eclipticae; atque in hoc situ, ducta recta $\odot S$, facies annuli rectam $\odot A$ respiciens a Sole illuminabitur. Quando igitur nunc Terra vbicunque in portione tut' orbitae suae, veluti in u , versatur, nobis facies annuli obscura erit obuersa, quam igitur conspiciere non valebimus, sed Saturnus nobis sine annulo apparebit; quae ergo priuatio satis diu durare poterit, donec scilicet Terra motu suo vltra terminum t' processerit. Quoniam vero interea Saturnus etiam in orbita sua progreditur, vna cum linea Nodorum Stt' , Terra citius ad terminum t' perueniet, vbi longitudo Geocentrica iterum fiet $5^{\circ}, 17', 5''$, qui erit vltimus terminus, quo annulus apparere cessabit, quo superato annulus iterum apparere incipiet, nisi quatenus ob vicinitatem Solis ipse Saturnus disparere debet.

§. 11.

§. 11. Quoniam directio lineae OA respectu stellarum fixarum manere supponitur inuariata, ob praecessionem aequinoctiorum longitudo puncti A in ecliptica continuo increfcet, et quidem vno gradu singulis 70 annis, ita vt longitudo 5° , 17° , $5'$ reuera fit variabilis. Hanc longitudinem pro quouis tempore signo \odot indicemus, punctumque oppositum signo \oslash , quod eo magis necessarium videtur, quia quantitas illa 5° , 17° , $5'$ forsitan non satis accurate ex obseruationibus est conclusa. Hinc iam pro positione Saturni modo considerata eius longitudo Heliocentrica maior erit quam \odot ; quare si Terra fuerit in u longitudo saturni Geocentrica minor erit quam \odot . Vnde patet, quoties binarum Saturni longitudinum scilicet Heliocentricae et Geocentricae altera fuerit maior, altera vero minor quam \odot , toties annulum a nobis conspici non posse. Si enim punctum S ad alteram partem rectae OA accipiatur, longitudo Heliocentrica minor erit, quam \odot , Geocentrica autem erit maior, id quod etiam de directione opposita erit tenendum.

§. 12. Triplici igitur omnino modo euenire potest, vt annulus Saturni aspectui nostro subtrahatur; primus scilicet locum habet, quando longitudo Heliocentrica Saturni est vel \odot vel \oslash , propterea quod tum neutra annuli facies illuminationem a Sole accipit; secundus modus locum obtinet, quando longitudo Saturni Geocentrica est vel \odot vel \oslash , propterea quod tum neutra annuli facies Terrae obuertitur; tertio autem modo annulus nobis euanesceit, quando longitudo vel \odot vel \oslash inter longitudinem Saturni Heliocentricam et Geocentricam incidit.

§. 13. Quo haec phaenomena clarius ordine per-Tab. XII. curramus, incipiamus a casu, quo Saturnus fuerit in ipso Fig. 4 puncto A , vbi eius longitudo Heliocentrica fuerit $= \odot$,

ita vt annulus hoc tempore, vbicunque fuerit Terra, apparere non potuerit; Terrae autem locum tum fuisse in u , eiusque longitudinem minorem quam δ , atque manifestum est, antequam Saturnus perueniret in A, annulum iam Terrae fuisse inconspicuum, ob causam tertiam; atque adeo eo vsque retrogredi licebit, quoad fuerit Terra in t , et Saturnus in S, ita vt eius longitudo Geocentrica fuerit $= \delta$, vbi ergo annulus ob causam secundam adhuc fuit inuisibilis; sin autem ulterius retrogrediamur, manifestum est, tum faciem annuli illuminatam Terram respexisse, vnde circa Terrae locum t apparitio annuli demum cessauit, neque igitur ab hoc tempore iterum se conspiciendum praebebit, donec Saturnus per ipsum punctum A transferit.

- Tab. XII. §. 14. Sin autem, dum Saturnus in A versabatur,
 Fig. 3. Terra reperiatur in altera orbitae suae parte, veluti in u , euident est, antequam Saturnus in A perueniret, eius annulum terrae conspicuum fuisse, ita vt, dum Saturnus termino A propinquat, annulus demum disparere coeperit. Ab hoc autem tempore, quando Saturnus ultra A progreditur, annulus etiam nunc Terrae in u manebit inuisibilis, hocque durabit eo vsque, donec Saturnus perueniret in S, Terra autem in t , a quo termino demum annulus iterum apparere incipiet; quae phaenomena perinde se habebunt, quando longitudo Heliocentrica fuerit δ .

Fig. 5.

§. 15. Applicemus haec ad postremas annuli disparitiones, quae contigerunt annis 1773 et 1774, circa quod tempus longitudo Saturni reperitur fuisse $= \delta$ siue $5^{\circ}, 17', 5'', 17''$ An. 1773. Septemb. 10 die; quo tempore longitudo Solis fuit $5^{\circ}, 18^{\circ}, 0'$, ideoque locus Terrae ex Sole visus $11^{\circ}, 18^{\circ}, 0'$. Fuerit igitur hoc tempore Saturnus in A, ac terra propemodum in loco opposito α versabatur, ita vt Saturnus vix ex Coniunctione Solis emerferit, ideoque

que non solum annulus sed etiam ipse Saturnus aspectum nostrum effugerit.

§. 16. Consideremus nunc tempus, quod hoc momentum praecessit, ubi Saturnus adhuc erat in s , Terra vero in α , ac manifestum est, ex hoc loco annulum conspici debuisse, ita ut disparitio annuli propemodum in conjunctionem Saturni cum Sole incidisse sit censenda. Postquam vero Terra ex α processerit, veluti in β , Saturnus progressus erit in σ , quo ergo loco annulus faciem illuminatam Terrae obuertit, ideoque conspici debuit, quatenus ob vicinitatem Solis contingere potuit. Ab hoc autem tempore annulus conspicuus manere debuit tam diu, donec Terra peruenerit in t , Saturnus vero in S , ita ut recta SA fuerit ipsi $\odot A$ parallela, circa quod tempus igitur annulus disparere de hinc vero inconspiciuus manere debuit, donec Terra appulerit ad punctum t , quo loco disparitio terminabitur. Postmodum enim, dum tam Saturnus quam Terra longius progredientur, annulus perpetuo conspicuus manebit, et quidem continuo clarior et largior cernetur, quoad tandem post 14 annos circiter in locum oppositum \oslash deferetur. Verum hic probe perpendendum est, nos nullam adhuc rationem habuisse latitudinis Saturni, quae hoc tempore satis erat notabilis, scilicet circiter 2° , unde phaenomena memorata haud exiguam correctionem exigent, quas igitur deinceps inuestigemus.

§. 17. Ante autem quam hanc inuestigationem suscipiamus, contemplemur etiam positionem Saturni praecedentem, ubi per alterum nodum annuli transiit. Calculo autem instituto longitudo Heliocentrica Saturni reperitur fuisse circiter 11° , 17° , Anno 1760. Ian. 10. quo tempore longitudo Terrae fuit 3° , 20° . Quare in Fig. 6. Saturnus concipiatur in puncto B, fueritque Terra hoc tempore in

Tab. XII.
Fig. 6.

in T , vnde ergo vtique Saturnus sine annulo apparere debuit. Quatuor igitur propemodum mensibus ante hoc tempus Saturnus fuerit in S , Terra vero in t , existente recta tS ipsi $\odot B$ parallela, in quo ergo situ annulus Saturni disparuerit necesse est, cum ante hoc tempus annulus fuisset conspicuus, nisi eius facies obscura Terram respexisset, quod vtique contingere debuit. Postquam autem Saturnus in locum B transferit vsque in s , terra pocefferit in t' , vbi recta $t's$ denuo euaserit rectae $\odot B$ parallela, ita vt etiam hoc tempore annulus euanescere debuerit. Per totum autem hoc tempus quoque annulus delitescere debuit, propterea quod faciem obscuram Terrae obuertit; demum igitur, postquam Terra vltra terminum t' processit, annulus conspici potuit, quod circiter contigisse debuit An. 1760. Febr. 19. Verum quia hoc tempore latitudo Saturni fuit propemodum 2° , $3'$, hinc non exiguum discrimen in his temporibus oriri debuit, quam inuestigationem nunc aggrediamur.

§. 18. Consideremus igitur nunc Saturnum in loco quocunque supra eclipticam in \odot , vnde ad eclipticam demittatur perpendicularum $\odot S$, hincque ad rectam $\odot A$ normalis SP . Iam quia planum annuli per punctum \mathfrak{h} transit, atque ad eclipticam inclinatur angulo circiter 31° , ducatur ex puncto \mathfrak{h} ad rectam SP linea $\mathfrak{h} \Sigma$, quae faciat angulum $S \Sigma \mathfrak{h} = 31^\circ$, hocque modo recta $\mathfrak{h} \Sigma$ erit in plano annuli, quod ergo eclipticam secabit secundum rectam $\Sigma \odot$ ipsi $\odot A$ parallelam, ita vt quando vel Sol vel Terra in hac recta $\Sigma \odot$ reperietur, annulus euanescere debeat. Vnde patet has disparitiones non contingere, quando Saturnus secundum ipsam $\odot \Sigma$ conspicitur, sed quando aliquo interuallo ab hac positione fuerit remotus.

§. 19. Hinc iam primo momenta quaeramus, quibus planum annuli per ipsum Solem transit, quo ergo pro
nodo

nodo ascendente A continget, quando Saturnus fuerit in \mathfrak{h} , ita vt angulus $\mathfrak{h} P S$ sit $= 31^\circ$, pro quo angulo, vt rem in genere complectamur, scribamus litteram η , ita vt habeamus angulum $\mathfrak{h} P S = \eta$; tum vero ponamus latitudinem Saturni Heliocentricam seu angulum $\mathfrak{h} \odot S = \lambda$, quam vt Borealem spectemus, quandoquidem in his positionibus, vt vidimus, Saturnus supra eclipticam Boream versus versatur §. 20. Quodsi iam distantiam Saturni a Sole vocemus $\odot \mathfrak{h} = a$, erit ipsa Saturni eleuatio supra eclipticam, scilicet $\mathfrak{h} S = a \sin. \lambda$ et distantia curtata $\odot S = a \cos. \lambda$. Iam quia in triangulo rectangulo $\mathfrak{h} S P$ est angulus $\mathfrak{h} P S = \eta$, erit interuallum $P S = \frac{a \sin. \lambda}{\tan g. \eta}$, quod diuisum per distantiam $\odot S = a \cos. \lambda$ dabit $\sin. A \odot S = \frac{\tan g. \lambda}{\tan g. \eta}$, qui angulus indicat longitudinem Saturni a termino A seu \oslash computatam. Vnde si hunc angulum $A \odot S$ vocemus $= \alpha$, ita vt sit $\sin. \alpha = \frac{\tan g. \lambda}{\tan g. \eta}$, planum annuli per ipsum Solem transibit, quoties fuerit longitudo Saturni Heliocentrica $= \oslash + \alpha$. Ita, quoniam in hac regione latitudo Saturni Heliocentrica inuenitur $\lambda = 2^\circ, 21'$ si sumamus $\eta = 31^\circ$, erit $\alpha = 3^\circ, 55'$, vnde sumto $\oslash = 5^\circ, 17', 51''$ longitudo Saturni Heliocentrica his temporibus erit $5^\circ, 21'$.

§. 21. Contemplemur nunc etiam locum Saturni circa alterum nodum in B, vbi eius latitudo est Australis, et punctum \mathfrak{h} infra eclipticam repraesentemus, per quod recta $\mathfrak{h} B$ vltra eclipticam producta faciat angulum $= \eta$, quandoquidem haec recta $\mathfrak{h} B$ rectae $p \mathfrak{h}$ in praecedente figura debet esse parallela. Hinc si ista latitudo Heliocentrica Australis dicatur $= \lambda$ et distantia Saturni a Sole $= a$, erit vt ante distantia $S \mathfrak{h} = a \sin. \lambda$ et distantia curtata $\odot S = a \cos. \lambda$, vnde reperitur interuallum $B S = \frac{a \sin. \lambda}{\tan g. \eta}$; quam ob rem si angulum $B \odot S$ vocemus $= \alpha$, erit vt ante $\sin. \alpha = \frac{\tan g. \lambda}{\tan g. \eta}$, et iam longitudo Heliocentrica Saturni erit $= \oslash + \alpha$, ita vt

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. P p etiam

etiam hoc casu ultra terminum B transierit per angulum α , qui ob λ in his locis $= 2^\circ, 3'$, reperitur $= 3^\circ, 25'$; ideoque vera Saturni longitudo Heliocentrica erit $= 11^\circ, 20', 25'$.

§. 22. Inquiramus nunc etiam in eas positiones, quibus planum annuli per ipsam Terram transit. Quodsi ergo ut supra Tab XIII. Saturnum concipiamus super ecliptica in \mathfrak{h} , ubi planum annuli Fig. 7. eclipticam secatur secundum rectam $\Sigma \Theta$, in qua locum Terrae concipiamus in puncto Θ , ductis rectis $S \Theta$ et $\mathfrak{h} \Theta$ recta ΘS dirigetur ad longitudinem Saturni Geocentricam, angulus vero $\mathfrak{h} \Theta S$ referet latitudinem Geocentricam Saturni Borealem, quam designemus per λ' . Hinc ergo si vocemus distantiam Saturni a Terra $\Theta \mathfrak{h} = a'$, erit perpendicularum $\mathfrak{h} S = a' \sin. \lambda'$ et distantia curtata $\Theta S = a' \cos. \lambda'$. Hinc manente η inclinatione annuli ad eclipticam, in triangulo $\mathfrak{h} S \Sigma$ fiet intervallum $S \Sigma = \frac{a' \sin. \lambda'}{\tan. \eta}$, quod per ΘS diuisum dabit sinum anguli $\Sigma \Theta S$, quem si vocemus α' , erit $\sin. \alpha' = \frac{\tan. \lambda'}{\tan. \eta}$.

§. 23. Quia igitur hac positione recta $\Theta \Sigma$ dirigetur versus nodum ascendentem, cuius longitudo est $\mathcal{O} = 5^\circ, 10'$, planum annuli per ipsam Terram transibit, quando longitudo Saturni Geocentrica fuerit $= \mathcal{O} + \alpha'$. Hinc autem facile patet, si in eadem directione $\Sigma \Theta$ producta Saturnus versetur circa nodum annuli descendentem cum latitudine Australi, tum pariter planum annuli per Terram transire, quando longitudo Geocentrica Saturni fuerit $= \mathcal{O} + \alpha'$. Casus autem, quem hic consideravimus, quo latitudo Saturni fuit Borealis, contigisse observatus est 1774 April 4, quo tempore annulus cerni desit, quod sine dubio aliquo tempore ante appulsum Terrae ad lineam nodorum euenisse censendum est. At vero Ephemerides pro hoc tempore ostendunt longitudinem Saturni Geocentricam $= 5^\circ, 21', 7'$ cum latitudine Boreali $2^\circ, 27'$, ita ut sit $\lambda' = 2^\circ, 27'$; unde sumpto

sumpto $\eta = 31^\circ$ reperitur angulus $\alpha' = 4^\circ, 4'$; erat igitur $\delta\delta + 4^\circ, 4' = 5^\circ, 21^\circ, 7'$ vnde sequitur fuisse $\delta\delta = 5^\circ, 17^\circ, 3'$ id quod egregie conuenit.

§. 24. Quoniam autem valde probabile est veram disparitionem aliquot diebus tardius euenisse, si ponamus hoc contigisse die 7^{mo} Aprilis, vbi longitudo Geocentrica Saturni fuit $5^\circ, 20^\circ, 55'$ cum latitudine eadem $2^\circ, 27'$, vt ante oritur $\alpha' = 4^\circ, 4'$. Posito igitur $\delta\delta + 4^\circ, 4' = 5^\circ, 20^\circ, 55'$ oritur $\delta\delta = 5^\circ, 16^\circ, 51'$, ita vt hoc tempore longitudo nodi aliquanto minor flatuenda videatur.

§. 25. At vero post istud tempus Aprilis annulus Saturni delituit vsque ad diem 1 Iulii, quo demum rursus apparere incepit, dum annulus iuterea faciem obscuram versus Terram direxit. Pro hoc autem tempore Ephemerides ostendunt, longitudinem Saturni Geocentricam fuisse $= 5^\circ, 20^\circ, 43'$ cum latitudine Boreali $\lambda' = 2^\circ, 12'$, vnde colligitur angulus $\alpha' = 3^\circ, 39'$; hincque concluditur $\delta\delta + 3^\circ, 39' = 5^\circ, 20^\circ, 43'$, sicque fiet $\delta\delta = 5^\circ, 17^\circ, 4'$. Quia autem nullum est dubium, quin verum momentum, quo Terra per planum annuli transiit, hunc terminum aliquot diebus praecefferit, si assumamus hoc contigisse mense Iunii d. 27, quo tempore longitudo Saturni erat $= 5^\circ, 20^\circ, 28'$ hincque verus valor pro longitudine nodi prodiret $\delta\delta = 5^\circ, 16^\circ, 49'$, vnde satis probabile videtur. illo tempore veram longitudinem nodi ascendentis annuli fuisse $5^\circ, 16^\circ, 50'$ quae circiter quadrante vnus gradus minor est, quam Astronomi supposuerunt.

§. 26. Praeterea vero eadem tempestate annulus Saturni primum disparere coepit An. 1773 Octob. 11, quo tempore longitudo erat $5^\circ, 20^\circ, 28'$ cum latitudine Boreali $1^\circ, 55'$; vnde colligitur angulus $\alpha' = 3^\circ, 11'$. Sicque erat

P p 2

$\delta\delta + 3^\circ,$

$\odot + 3^\circ, 11' = 5^\circ, 20', 28'$, ideoque $\odot = 5^\circ, 17', 17'$. Sin autem ponamus veram disparitionem aliquanto tardius euenisse, scilicet die 15 Octob. tum valor ipsius \odot adhuc maior prodiret. Sequens reapparitio autem contigit, An. 1774 Ian. 11, postquam planum annuli per Solem transiit, quo tempore longitudo Saturni Heliocentrica erat $5^\circ, 21', 3'$, cum latitudine Boreali $2^\circ, 9'$. Hinc ergo pro nostra formula est $\lambda = 2^\circ, 9'$, vnde reperitur angulus $\alpha' = 3^\circ, 34'$, ita vt fuerit $\odot + 3^\circ, 34' = 5^\circ, 21', 3'$, ideoque $\odot = 5^\circ, 17', 29$. Cum autem exquisitissimis instrumentis ista reapparitio multo citius obseruata fuisset, sequitur longitudinem nodi notabiliter minorem fuisse, quam modo inuenimus, id quod cum determinationibus, quas ex longitudinibus Geocentricis concludimus, egregie conspirat.

Tab. XIII.

§. 27. Examinemus nunc etiam eas Saturni posi-

Fig. 8. tiones, quibus facies annuli illuminata a Terra auertitur, ideoque annulus pariter conspici nequit. Versetur igitur Saturnus in \mathfrak{h} , vnde ad planum eclipticae demittatur perpendiculari $\mathfrak{h} S$, hincque ad rectam $\odot A$ normalis $S P$; tum vero vocetur distantia Saturni a Sole $\odot \mathfrak{h} = a$ eiusque latitudo Heliocentrica $S \odot \mathfrak{h} = \lambda$, eritque $S \mathfrak{h} = a \sin. \lambda$ et $\odot S = a \cos. \lambda$. Supra autem iam inuenimus, planum annuli eclipticam secare secundum rectam $\Sigma \Theta$, ita vt sit interuallum $S \Sigma = \frac{a \sin. \lambda}{\tan g. \eta}$.

§. 28. Vocemus porro longitudinem Saturni a recta $\odot A$ computatam, siue angulum $A \odot S = \Phi$, et quia distantia $\odot S = a \cos. \lambda$, erit interuallum $S P = a \cos. \lambda \sin. \Phi$. Statuamus autem hoc interuallum maius esse quam $S \Sigma$, ita vt recta $\Sigma \Theta$ in dextram partem a recta $\odot A$ cadat, quod ergo eueniet, si fuerit $a \cos. \lambda \sin. \Phi > \frac{a \sin. \lambda}{\tan g. \eta}$ siue $\sin. \Phi > \frac{\tan g. \lambda}{\tan g. \eta}$. Hac igitur positione facies annuli sinistrorsum

ver-

vergens a Sole illuminabitur, eritque interuallum

$$P \Sigma = a \cos. \lambda \sin. \Phi - \frac{a \sin. \lambda}{\tan. \eta},$$

ideoque per hypothesin posituum.

§. 29. Quodsi iam hoc tempore Terra vbicunque ad dextram partem rectae $\Sigma \Theta$, veluti in T, existat, ei facies annuli obscura obuertetur, annulusque hic erit inuisibilis; hoc ergo continget, quando recta T Q, ad directionem $\odot A$ normaliter ducta, maior fuerit quam interuallum P Σ . Hanc ob rem statuamus distantiam Terrae a Sole $\odot T = b$ eiusque longitudinem a recta $\odot A$ computatam, seu angulum $A \odot T = \theta$, eritque interuallum T Q $= b \sin. \theta$; quam ob rem criterium, quo annulus Saturni ob hanc causam spectari non poterit, in hoc consistet, quando fuerit

$$b \sin. \theta > a \cos. \lambda \sin. \Phi - \frac{a \sin. \lambda}{\tan. \eta}, \text{ existente } \sin. \Phi > \frac{\tan. \lambda}{\tan. \eta}.$$

§. 30. Ad has condiciones clarius perspiciendas ponamus distantiam Saturni a Terra $T \mathfrak{h} = t$, latitudinem vero Geocentricam seu angulum $S T \mathfrak{h} = \lambda'$, fietque $S \mathfrak{h} = t \sin. \lambda'$ et $T S = t \cos. \lambda'$. Supra autem inuenimus $S \mathfrak{h} = a \sin. \lambda$ sicque nunc erit $a \sin. \lambda = t \sin. \lambda'$, ideoque $t = \frac{a \sin. \lambda}{\sin. \lambda'}$. Iam ex T ducatur recta T V ipsi $\odot A$ parallela, eritque angulus V T S longitudo Saturni Geocentrica ab eodem termino \mathfrak{S} computata, quem angulum ergo vocemus $= \omega$, hincque erit interuallum S V $= t \cos. \lambda' \sin. \omega$ et T V $= t \cos. \lambda' \cos. \omega$. Cum igitur sit T V $= Q P$ ob $\odot P = a \cos. \lambda \cos. \Phi$ et $\odot Q = b \cos. \theta$ erit $t \cos. \lambda' \cos. \omega = a \cos. \lambda \cos. \Phi - b \cos. \theta$. Quia igitur erat $t = \frac{a \sin. \lambda}{\sin. \lambda'}$, inde nascitur haec aequatio:

$$a \sin. \lambda \cos. \lambda' \cos. \omega = a \sin. \lambda' \cos. \lambda \cos. \Phi - b \sin. \lambda' \cos. \theta$$

ex qua colligitur

$$b = \frac{a \cos. \lambda \cos. \Phi}{\cos. \theta} - \frac{a \sin. \lambda \cos. \lambda' \cos. \omega}{\sin. \lambda' \cos. \theta} \text{ siue}$$

$$b = \frac{a \cos. \lambda \cos. \Phi - a \sin. \lambda \cos. \lambda' \cos. \omega}{\cos. \theta}.$$

§. 31. Quoniam igitur istud phoenomenon, quod consideramus, duas condiciones postulat, quarum prior est

$\sin. \Phi > \frac{\tan g. \lambda}{\tan g. \eta}$, posterior vero $b \sin. \Theta > a \cos. \lambda \sin. \Phi - \frac{a \sin. \lambda}{\tan g. \eta}$,
 si hic loco b valorem modo inuentum substituamus, pro-
 dibit $\tan g. \theta (\cos. \lambda \cos. \Phi - \sin. \lambda \cot. \lambda' \cos. \omega) > \cos. \lambda \sin. \Phi - \frac{\sin. \lambda}{\tan g. \eta}$.
 Praeterea vero notandum est, ob $SV = t \cos. \lambda' \sin. \omega$ esse
 $PV = a \cos. \lambda \sin. \Phi - t \cos. \lambda' \sin. \omega$, cui cum interuallum
 $TQ = b \sin. \theta$ aequetur erit

$b \sin. \theta = a \cos. \lambda \sin. \Phi - t \cos. \lambda' \sin. \omega$ siue
 $a \tan g. \theta (\cos. \lambda \cos. \Phi - \sin. \lambda \cot. \lambda' \cos. \omega) = a \cos. \lambda \sin. \Phi - t \cos. \lambda' \sin. \omega$,
 inuenimus autem $t = \frac{a \sin. \lambda}{\sin. \lambda'}$, quo valore substituto erit
 $\tan g. \theta (\cos. \lambda \cos. \Phi - \sin. \lambda \cot. \lambda' \cos. \omega) = \cos. \lambda \sin. \Phi - \sin. \lambda \cot. \lambda' \sin. \omega$,
 unde $\tan g. \theta$ ex calculo extirpabitur; posteriorque conditio
 ad hanc formam reducetur; $\cot. \eta > \cot. \lambda' \sin. \omega$.

§. 32. Haec autem multo facilius sine tantis amba-
 gibus hoc modo inueniri possunt. Cum sit $ST = a \sin. \lambda$,
 angulus vero $ST = \lambda'$, erit recta $TS = \frac{a \sin. \lambda}{\sin. \lambda'}$. Iam quia
 posuimus angulum $STV = \omega$, erit $SV = \frac{\lambda \sin. \omega}{\sin. \lambda'}$, quod
 interuallum minus esse debet interuallo $S\Sigma = \frac{a \sin. \lambda}{\tan g. \eta}$, quan-
 doquidem volumus locum Terrae T ad dextram partem
 rectae $\Theta\Sigma$ incidere, ita vt esse debeat $S\Sigma > SV$; haec
 igitur conditio praebet

$\cot. \eta > \cot. \lambda' \sin. \omega$, siue $\tan g. \lambda' > \tan g. \eta \sin. \omega$
 ideoque $\sin. \omega < \frac{\tan g. \lambda'}{\tan g. \eta}$.

§. 33. Hac aequatione igitur continetur posterior
 conditio, cum prior postulasset, vt sit $\sin. \Phi > \frac{\tan g. \lambda}{\tan g. \eta}$. Sic-
 que harum conditionum altera definitur per longitudinem
 Saturni Heliocentricam Φ et latitudinem pariter Heliocen-
 tricam λ , cum inclinatione annuli ad eclipticam $= \eta$, qua
 esse debet $\sin. \Phi > \frac{\tan g. \lambda}{\tan g. \eta}$; altera vero conditio simili modo
 definitur per longitudinem Saturni Geocentricam ω et la-
 titu-

titudinem pariter Geocentricam $= \lambda'$, vna cum inclinatione annuli $= \eta$, qua esse debet $\sin. \omega < \frac{\tan. \lambda'}{\tan. \eta}$. Cum igitur per alteram esse debeat $\tan. \eta > \frac{\tan. \lambda}{\sin. \phi}$, per alteram vero $\tan. \eta < \frac{\tan. \lambda'}{\sin. \omega}$, necesse est vt sit $\frac{\tan. \lambda'}{\sin. \omega} > \frac{\tan. \lambda}{\sin. \phi}$.

§. 34. Hic autem probe notandum est vtramque Saturni longitudinem tam Heliocentricam quam Geocentricam computari debere a nodo ascendente Ω , quem hoc tempore aestimamus circiter 5° , $17'$, haeque conditiones eo redeunt, vt si fuerit $\sin. \phi > \frac{\tan. \lambda}{\tan. \eta}$, esse debeat $\sin. \omega < \frac{\tan. \lambda'}{\tan. \eta}$; vnde patet, si fuerit $\omega = 0$, posteriorem conditionem adimpleri; atque adeo multo magis, quando fuerit longitudo ω negatiua; ex quo facile intelligere licet, si in contraria positione fuerit $\sin. \phi < \frac{\tan. \lambda}{\tan. \eta}$, tum requiri vt sit $\sin. \omega > \frac{\tan. \lambda'}{\tan. \eta}$. Neque etiam difficile erit has determinaciones ad eos casus extendere, quibus latitudo Saturni est Australis, ideoque negatiua respectu prioris. Quoniam autem hoc euenit circa nodum descendentem ϑ , vbi longitudes etiam a ϑ computari conuenit, etiam sinus pro negatiuis haberi oportet, ita vt formulae inuentae etiam pro hoc casu valeant.

§. 35. Quo haec clarius perspiciantur perpendamus casum, quo annulus Saturni ideo fuit inconspicuus, quia faciem obscuram Terrae obuertebat, id quod euenisseprehendimus inter disparitionem A. 1774. die 4 Aprilis, et reappearancem sequentem die 1. Iulii factam. In hoc igitur intervallo eligamus tempus quoddam medium veluti diem 1. mensis Iunii, pro quo tempore tabulae Astronomicae praebent longitudinem Saturni Heliocentricam $= 5^{\circ}$, $25'$, $55''$, vnde longitudo a nodo hoc computata erit $\phi = 0^{\circ}$, $8'$, $54''$, latitudo vero Heliocentrica $\lambda = 2^{\circ}$, $14'$. At vero Ephemerides pro hoc tempore ostendunt longitudinem Saturni Geocentricam 5° , $19'$, $27''$, ideoque $\omega = 0^{\circ}$, $2'$, $27''$ cum latitudine Boreali Geocentrica $\lambda' = 2^{\circ}$, $18'$.

§. 36. Super his elementis calculo instituto reperitur $l \sin. \phi = 9, 189519$ at $l \frac{\tan. \lambda}{\tan. \eta} = 8, 812277$; vtique igitur erat $\sin. \phi > \frac{\tan. \lambda}{\tan. \eta}$. Deinde vero habebimus

$$l \sin. \omega = 8, 630911 \text{ at } l \frac{\tan. \lambda'}{\tan. \eta} = 8, 825065$$

sicque vtique erat $\sin. \omega < \frac{\tan. \lambda'}{\tan. \eta}$; vnde causa patet, cur annulus hoc tempore fuerit inuisibilis.

§. 37. Euoluamus etiam obseruationes disparitionum et reapparitionum circa nodum descendentem factas; quoniam autem hoc seculo tum temporis Saturnus Soli fuit propinquus, tales obseruationes non institutae reperiuntur. At vero praeterito seculo huiusmodi obseruationes reperiuntur a Galileo factae, qui anulum disparuisse obseruauit Anno 1612 die 10 Iunii; deinde autem mense Septembri iterum apparere coepisse; quam ob rem pro his temporibus loca Saturni tam Heliocentrica, quam Geocentrica computemus. Reperitur autem pro die 10 Iunii longitudo Saturni Heliocentrica $11^{\circ}, 11', 19''$ cum latitudine Australi $= 1^{\circ}, 58'$; longitudo vero Geocentrica $= 11^{\circ}, 17', 22''$ pariter cum latitudine Australi Geocentrica $= 1^{\circ}, 59'$.

§. 38. Hinc patet, hoc tempore planum annuli per Terram transiisse; vnde ex hac obseruatione longitudo nodi descendentis annuli ϑ poterit concludi per formulam supra datam $\sin. \alpha' = \frac{\tan. \lambda'}{\tan. \eta}$, vbi est $\lambda' = 1^{\circ}, 59'$; vnde reperitur $\alpha' = 3^{\circ}, 18'$, quamobrem esse oportet $\vartheta + 3^{\circ}, 18' = 11^{\circ}, 17', 22''$ ideoque $\vartheta = 11^{\circ}, 14', 4''$, quae longitudo deficit a longitudine praesenti $11^{\circ}, 17'$ quantitate circiter 3 gr. ita vt ab illo tempore vsque ad 1774 nodi annuli processerint per angulum circiter 3 gradum, cum tamen praecessio aequinoctiorum pro intervallo 162 annorum sit tantum $2^{\circ}, 16'$. Supra autem iam notauimus hoc tempore longitudinem lineae nodorum aliquanto minorem censerì debere.

§. 39. Computemus etiam locum Saturni pro initio Septembris, ac reperiemus longitudinem Saturni Heliocentricam $\equiv 11^{\circ}.14', 3'$ cum latitudine Heliocentrica Australi $2^{\circ}, 2'$. Patet igitur hac tempestate planum annuli per Solem transiisse. Examinemus etiam observationes antiquas circa nodum ascendentem factas, ut eas cum nouissimis observationibus comparare queamus, inter quas potissimum occurrit reapparitio annuli a Hugenio observata An. 1656 die 13 Octob. pro quo tempore erat longitudo Saturni Heliocentrica $\equiv 5^{\circ}.26', 43'$ cum latitudine Boreali $\equiv 2^{\circ}, 17'$; ex quo patet ante hoc tempus planum annuli non per Solem transire potuisse, unde locum Geocentricum Saturni computari oportet. Reperitur autem pro hoc tempore longitudo Solis $\equiv 6^{\circ}, 20', 46'$, unde colligitur longitudo Saturni Geocentrica $\equiv 5^{\circ}, 28', 58'$, quae cum sit multo maior quam $5^{\circ}, 20'$, mirum non est, hoc tempore annulum Saturni apparuisse, cum multo ante iam apparuisse debuerit. Verum quia hoc tempore elongatio Saturni a Sole tantum erat 21° , manifestum est ante hoc tempus ne ipsum Saturnum quidem cerni potuisse, ita ut ex hac observatione nihil ad institutum nostrum concludi queat. Caeterum nostra Theoria iam ita est confirmata, ut vberiori confirmatione non egeat.

§. 40. Quoniam illustris *Du Séjour* in opere suo: *Essai sur les phénomènes relatifs aux disparitions périodiques de l'anneau de Saturne*, momenta apparitionis et disparitionis ex ratione inter motus medios Saturni et Terrae modo satis ingenioso derivauit, qui calculos non parum molestos postulauit, adiungamus hic sequens problema geometricum, cuius solutio viam sternet satis facilem ista momenta determinandi.

Problema.

Si tam Terra, quam Saturnus orbitas circulares in eodem plano motu vniiformi describere concipiantur, inuestigare

gare momenta, quibus longitudo Saturni Geocentrica datam tenuerit directionem, veluti $5^{\circ}, 20^{\circ}$.

Solutio.

§. 41. Sit media distantia Saturni a Sole $a = 96897$ dum media Terrae a Sole distantia sumitur $= 10000$. Deinde cum intervallo vnus anni, quo Terra 360 gr. absoluit, Saturnus motu medio conficiat $12^{\circ}, 14', 6''$, erit celeritas angularis Terrae ad celeritatem angularem Saturni vt $29,423 : 1$ pro quo numero scribamus n .

Tab. XIII. §. 42. Repraesentet nunc maior circulus orbitam Saturni, minor vero orbitam Terrae, ita vt sit

$$\odot A = a = 96897 \text{ et } \odot a = b = 10000.$$

Iam recta $\odot a A$ eam teneat directionem, cui longitudo Geocentrica Saturni debeat esse parallela. Quibus positis pro tempore, quo Saturnus haerebat in A , quaeratur locus Terrae, qui fuerit in D , existente angulo $a \odot D = \delta$ hinc Saturnus processerit in S per angulum $A \odot S = \phi$ atque interea Terra ex D peruenerit in T , eritque angulus $D \odot T = n\phi$ ideoque angulus $A \odot T = \delta + n\phi$. Atque nunc recta TS sit parallela rectae $\odot A$, ita vt definiiri debeat angulus ille ϕ , cui longitudo Geocentrica TS ipsi $\odot A$ parallela respondeat.

§. 43. Hunc in finem ad directionem fixam $\odot A$ ex S et T ducantur normales Ss et Tt , quas ergo inter se aequales esse oportet; est vero interuallum $Ss = a \sin. \phi$, interuallum vero $Tt = \sin. (\delta + n\phi)$, vnde habetur haec aequatio: $a \sin. \phi = b \sin. (\delta + n\phi)$, ex qua pro quouis angulo dato δ erui oportet angulum ϕ ; haecque est eadem aequatio quam illustri Dominus *Du Séjour* felicissimo successu resoluit, vbi obseruauit, hanc aequationem interdum tres continere radices reales, quarum inuestigatio vtique calculos fatis prolixos requirebat.

§. 44. Istos autem calculos euitare poterimus, si quaestionem innertamus, et pro singulis angulis Φ respondentes angulos δ quaeramus. Quaeri igitur oportet angulum δ ex hac aequatione: $\sin.(\delta+n\Phi)=\frac{a}{b}\sin.\Phi$, ubi est $\frac{a}{b}=9,6897$ et $n=29,423$. Hinc igitur angulos Φ continuo a 0 per intervalla 10 minut. increfcere affumamus; quem in finem notetur esse $n.1^{\circ}=29^{\circ},25'$, ideoque $n.10'=4^{\circ},54'$. Sumto igitur $\Phi=0$, erit quoque $\sin.\delta=0$, ideoque δ vel $=0$ vel $=180^{\circ}$. Sit igitur $\Phi=10'$ et calculus ita instituitur

$$/ \sin.10' = 7,4637255$$

$$\text{add. } / \frac{a}{b} = 0,9863103$$

$$8,4500358$$

ergo $\delta+n.10'=1^{\circ},36'$ vel $\delta+n.10=-1^{\circ}78',24'$; hinc primo $\delta=-3^{\circ},18'$ vel $\delta=176^{\circ},48'$. Simili modo reliqui casus sunt computati, hincque sequens tabella est nata, quae pro quouis angulo Φ binos valores anguli δ exhibet.

Φ	δ	δ	Φ	δ	δ
0'	0'	0'	0'	0'	0'
10	— 3°, 18	176°, 48	— 10	3°, 18	— 176°, 48
20	— 6, 35	166, 59	— 20	6, 35	— 166, 59
30	— 9, 51	160, 27	— 30	9, 51	— 160, 27
40	— 13, 8	153, 56	— 40	13, 8	— 153, 56
50	— 16, 24	147, 24	— 50	16, 24	— 147, 24
1°, 0	— 19, 41	140, 51	— 1°, 0	19, 41	— 140, 51
1, 10	— 22, 57	134, 19	— 1, 10	22, 57	— 134, 19
1, 20	— 26, 14	127, 48	— 1, 20	26, 14	— 127, 48
1, 30	— 29, 26	121, 12	— 1, 30	29, 26	— 121, 12
1, 40	— 32, 39	114, 37	— 1, 40	32, 39	— 114, 37
1, 50	— 35, 52	108, 2	— 1, 50	35, 52	— 108, 2
2, 0	— 39, 5	101, 25	— 2, 0	39, 5	— 101, 25
2, 10	— 42, 15	94, 47	— 2, 10	42, 15	— 94, 47

Φ	δ	δ	Φ	δ	δ
2°, 20'	-45°, 24'	88°, 8'	-2°, 20'	45°, 24'	-88°, 8'
2, 30	-48, 32	81, 28	-2, 30	48, 32	-81, 28
2, 40	-51, 39	74, 47	-2, 40	51, 39	-74, 47
2, 50	-54, 43	68, 3	-2, 50	54, 43	-68, 3
3, 0	-57, 47	61, 17	-3, 0	57, 47	-61, 17
3, 10	-60, 48	54, 30	-3, 10	60, 48	-54, 30
3, 20	-63, 46	47, 40	-3, 20	63, 46	-47, 40
3, 30	-66, 42	40, 48	-3, 30	66, 42	-40, 48
3, 40	-69, 34	33, 52	-3, 40	69, 34	-33, 52
3, 50	-72, 23	26, 53	-3, 50	72, 23	-26, 53
4, 0	-75, 9	19, 49	-4, 0	75, 9	-19, 49
4, 10	-77, 49	12, 41	-4, 10	77, 49	-12, 41
4, 20	-80, 25	5, 29	-4, 20	80, 25	-5, 29
4, 30	-82, 53	-1, 51	-4, 30	82, 53	+1, 51
4, 40	-85, 15	-9, 17	-4, 40	85, 15	+9, 17
4, 50	-87, 27	-16, 53	-4, 50	87, 27	+16, 53
5, 0	-89, 28	-24, 42	-5, 0	89, 28	+24, 42
5, 10	-91, 14	-32, 44	-5, 10	91, 14	+32, 44
5, 20	-92, 39	-41, 7	-5, 20	92, 39	+41, 7
5, 30	-93, 33	-50, 1	-5, 30	93, 33	+50, 1
5, 40	-93, 36	-59, 46	-5, 40	93, 36	+59, 46
5, 50	-91, 35	-71, 35	-5, 50	91, 35	+71, 35
5, 51	-91, 6	73, 2	-5, 51	91, 6	+73, 2
5, 52	-90, 30	74, 36	-5, 52	90, 30	+74, 36
5, 53	-89, 43	76, 21	-5, 53	89, 43	+76, 21
5, 54	-88, 38	78, 24	-5, 54	88, 38	+78, 24
5, 55	-86, 47	81, 13	-5, 55	86, 47	+81, 13

§. 45. Ex hac iam tabula per inuersionem condamus nouam, quae pro singulis valoribus ipsius δ ostendat valores respondentes anguli Φ ; ubi quidem sufficiet singulos valores posituios ipsius δ percurrisse, quandoquidem
mani-

manifestum est, cuilibet valori negativo ipsius δ eodẽ angulos Φ mutatis signis respondere debere. Angulos autem δ continuo secundum quinque gradus augeamus; neque enim difficile erit per interpolationem conuenientes angulos Φ assignare. Ita si fuerit $\delta = 0$, statim patet, fore etiam $\Phi = 0$; deinde etiam respondet angulus $\Phi = + 4^{\circ}, 27'$, cuius negativum $- 4^{\circ}, 27'$ pariter respondet. Tum vero si sumamus $\delta = 5^{\circ}$, ex posteriore tabula colligimus fore $\Phi = - 15'$; at ex priore tabula colligitur $\Phi = 4^{\circ}, 20'$, posterior insuper dat $\Phi = - 4^{\circ}, 34'$. Porro si sumamus $\delta = 10'$, posterior tabula statim dat $\Phi = - 30'$; prior tabula dat $\Phi = 4^{\circ}, 13'$; praeterea vero posterior columna praebet $\Phi = - 4^{\circ}, 41'$. Hocque modo ulterius per quinque gradus ascendendo construximus sequentem tabulam, quae pro singulis angulis positivis δ indicat respondentes valores ipsius Φ .

Valor anguli δ	Valores anguli Φ		
	I.	II.	III.
0°	0'	- 4°, 27'	4°, 27'
5	- 15	- 4, 34	4, 20
10	- 30	- 4, 41	4, 13
15	- 45	- 4, 48	4, 6
20	- 1°, 0	- 4, 54	3, 59
25	- 1, 16	- 5, 1	3, 52
30	- 1, 32	- 5, 8	3, 45
35	- 1, 48	- 5, 14	3, 38
40	- 2, 3	- 5, 20	3, 30
45	- 2, 19	- 5, 25	3, 23
50	- 2, 35	- 5, 30	3, 16
55	- 2, 51	- 5, 35	3, 8
60	- 3, 7	- 5, 40	3, 1
65	- 3, 23	- 5, 45	2, 54
70	- 3, 41	- 5, 50	2, 47

Valor anguli δ	Valores anguli Φ		
	I.	II.	III.
75°	-4°, 0'	-5°, 52'	2°, 40'
80	-4, 20	-5, 55	2, 32
85	-4, 40	-5, 55	2, 24
90	-5, 5	-5, 52	2, 17
95	—	—	2, 9
100	—	—	2, 1
105	—	—	1, 54
110	—	—	1, 47
115	—	—	1, 39
120	—	—	1, 31
125	—	—	1, 23
130	—	—	1, 16
135	—	—	1, 9
140	—	—	1, 1
145	—	—	53
150	—	—	46
155	—	—	38
160	—	—	30
165	—	—	23
170	—	—	16
175	—	—	11
180	—	—	0

§. 46. Ex hac tabula apparet, quam diu angulus δ minor fuerit quam 94, ei ternos valores ipsius Φ respondere, binos scilicet negativos et vnum positium; statim autem atque hunc limitem superauerit, tum binos valores priores fieri imaginarios, tertios autem continuo decrefcere, donec pro angulo $\delta = 180^\circ$ penitus euanescent. Quaestio hinc nascitur non parum curiosa: ubi existat iste limes, vel

vel ubi ambo priores valores ipsius δ fiant imaginarii? Ad hanc quaestionem resoluendam ponamus breuitatis gratia $\frac{a}{b} = m$, ut nostra aequatio sit $m \sin. \Phi = \sin. (\delta + n \Phi)$, quae duas radices habebit inter se aequales, quando differentiando fuerit $m \cos. \Phi = n \cos. (\delta + n \Phi)$. Addantur harum aequationum quadrata; ut prodeat $m m = n n (\cos. \delta + n \Phi)^2 + (\sin. \delta + n \Phi)^2$. Statuamus hic $\sin. (\delta + n \Phi) = z$, eritque aequatio nostra $m m = n n (1 - z z) + z z$, vnde colligitur $z z = \frac{n n - m m}{n n - 1}$. Cum igitur sit $m = \frac{a}{b} = 9,6897$ et $n = 29,423$, erit $z z = \frac{771,92}{864,71}$, ideoque $1 z = 9,9753227$. Quare cum sit $z = \sin. (\delta + n \Phi)$, erit $\delta + n \Phi = 70^\circ, 52'$. Quia autem est $\sin. \Phi = \frac{z}{n}$ erit $\Phi = 5^\circ, 35'$, ideoque $n \Phi = 164, 14$, hincque concluditur $\delta = -93^\circ, 22'$, qui limes etiam valet pro valoribus posituiis ipsius Φ . Caeterum haec tabula tantum ad valores posituios anguli δ est accommodata; neque vero opus est pro valoribus negatiuis tabulam peculiarem condere, quoniam hoc casu tantum signa angulorum Φ mutari debent.

§. 47. Operae pretium erit hos valores anguli Φ ^{Tab. XIII.} per lineam curuam aspectui exponere. Hunc in finem ^{Fig. 10.} capiantur anguli δ super recta indefinita tanquam axe, super quo respondeat punctum O valori $\delta = 0$; vnde valores posituii dextrorsum, negatiui vero sinistrorsum abscindantur; atque manifestum est, quam diu abscissae vtrique fuerint minores quam 94° , singulis abscissis ternas applicatas respondere, ultra vero hos limites ramos simplices ad axem accedere cumque attingere ad $+180^\circ$, qui duo termini in vnum coalescere sunt censendi, quia totus axis figurae integram circuli peripheriam refert; totus igitur tractus istius curuae maxime est memorabilis.

Tab XIII.

Fig. II.

§. 48. Ope tabulae autem, quam dedimus, facile omnia phaenomena apparitionis et disparitionis annuli Saturni cognosci poterunt. Constituta enim epocha, qua planum annuli Saturni per ipsum Solem transit, ubi Saturnus versetur in \mathfrak{h} , pro hoc tempore quaeratur locus Terrae in sua orbita quam hic circulus $A M B N$ referat; ac si elongatio Terrae a Saturno non maior fuerit, quam 94° , tria dabuntur momenta, quibus Terra per planum annuli transit, siue ante siue post epocham. Sin autem elongatio Terrae a loco Saturni limitem illum 94° excedat, tum angulo Φ vnicus tantum valor conuenit, siue semel tantum Terra per planum annuli transibit, siue ante siue post epocham constitutam. Quoniam vero in ipsa epocha annulus pariter euanesceat, priori casu omnino quatuor habebuntur momenta disparitionis, posteriori vero casu etiam nunc duo talia momenta occurrunt.

§. 49. Quo singula momenta melius perpendi queant, in orbita Terrae vtrunque a termino A abscindantur arcus $A M$ et $A N$ circiter 94° , hocque modo tota Terrae orbita in quatuor portiones diuiditur, quarum binis superioribus ob tres valores ipsius Φ quatuor disparitiones respondebunt; portionibus vero inferioribus tantum duae. Hinc in genere obseruasse iuuabit, semper a prima disparitione vsque ad secundam annulum prorsus inuisibilem manere; at vero a disparitione secunda vsque ad tertiam annulus se ostendere poterit, nisi hoc temporis intervallum sit nimis exiguum. Denique a tertia disparitione vsque ad quartam iterum nullum annuli vestigium conspici poterit. Quando autem tempore epochae locus Terrae in inferiores portiones incidit, ubi duae tantum disparitiones locum habent, per totum hoc temporis intervallum annulum nequitquam aspicere licebit, propterea quod interea facies annuli obscura Terrae obuertitur.

§. 50.

§. 50. Consideremus primo casum, quo Terra in prima portione A M in T versatur, dum Saturnus in h reperitur; sitque angulus $\Lambda \odot T = 45^\circ$; quo facto quatuor momenta disparitionis secundum temporis ordinem disposita erunt I^o. $-5^\circ, 20'$; II^o. $-2^\circ, 19'$; III^o. $0^\circ, 0'$ et IV^o. $+3^\circ, 23'$. Primum igitur momentum epocham antecedit, tempore circiter 5 mensium cum semisse, quandoquidem Saturnus singulis mensibus per unum gradum progreditur. Fuerit igitur Saturnus hoc tempore in s' , ac Terra reperiatur in t' ; ita ut recta $s't'$ ipsi $\Lambda \odot$ sit parallela, et tempus, quo ex t' per N, A usque in T procedit, sit quasi $5\frac{1}{2}$ mensium. Secundum momentum contigit etiam ante epocham ad $-2^\circ, 19'$, quo tempore ergo Saturnus fuerit in s' , Terra autem in t'' , atque dum Terra ex t' ad t'' progreditur, quod intervallo trium mensium eveniet, annulus hoc tempore prorsus invisibilis manebit. Tertium momentum in ipsam epocham cadit, ubi Saturnus erat in h et Terra in T $= t'''$, quod $2\frac{1}{2}$ mensibus post praecedens sequetur; ita ut in hoc intervallo annulus spectari possit. Quartum denique momentum disparitionis incidit post epocham circiter $3\frac{1}{2}$ mens. quo tempore Saturnus fuerit in s^{IV} , Terra autem in t^{IV} per quod totum temporis intervallum annulus aspectum nostrum effugiet, quia iterum eius facies obscura Terrae obuertitur.

§. 51. Quodsi Terra tempore epochae reperiatur in parte antecedente A N, Phaenomena erunt prorsus similia, quoniam tantum ordinem temporum inuerti oportet, ita ut, quae Phaenomena epocham praecedebant, nunc eam insequantur et contra. At si Terra circa momentum epochae in ipso puncto A versetur, tum primum disparitionis momentum respondebit loco Saturni $-4^\circ, 27'$ ideoque epocham praecedit circiter $4\frac{1}{2}$ mensibus. Secundum autem momentum ex nostra tabula incidet in $\Phi = 0$, quod ergo
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. R r cum

cum tertio momento conueniet. Quantum denique momentum respondet loco Saturni $4^{\circ}, 27'$, ideoque epocham sequetur post $4\frac{1}{2}$ mensibus. Cum igitur interuallum inter secundum et tertium momentum, quo annulus iterum in conspectum prodire posset, hic euanescat, per totum interuallum a primo usque ad quartum momentum elapsum, hoc est spatium circiter 9 mensium, annulus penitus visui nostro subtrahetur.

Tab. XIII.
Fig. 12. §. 52. Contemplemur nunc casum, quo, dum Saturnus haeret in \mathfrak{h} , Terra reperiatur in portione inferiore MB, puta in T, existente angulo $A \odot T = 135^{\circ}$, cui angulo vnicus valor Φ respondet, scilicet $1^{\circ}, 9'$; ita vt hic duo habeantur momenta disparitionis: primum quo Saturnus in \mathfrak{h} et Terra in T reperiatur; alterum vero momentum continget post $1\frac{1}{2}$ menses, vbi locus Saturni fuerit in s et Terra in t; atque per istud temporis interuallum annulus erit inconspicuis; postea vero perpetuo se spectandum praebebit. At si Terra in portione BN fuisset versata, momentum disparitionis prius epocham antecederet, a quo, usque ad epocham, annulus erit inuisibilis. Denique si tempore epochae Terra in ipso puncto B versetur, ambo momenta coalescent; et spatium priuationis annuli in nihilum redigetur. Quia autem hoc tempore Saturnus in ipsa coniunctione Solis versatur, per satis longum tempus ne Saturnum quidem aspicere licebit, neque ergo hoc casu vlla disparitio percipi poterit.

§. 53. Examinemus nunc etiam iuxta nostram tabulam Phaenomena, quae circa An. 1774. obseruari debuerunt, vbi vidimus planum annuli per Solem transiisse An. 1774. Ian. 11, pro quo tempore epocha nostra statui debet, longitudine Saturni Heliocentrica existente $5, 21^{\circ}$. Hoc autem tempore longitudo Solis erat $9^{\circ}, 20'$ ideoque locus Terrae $3^{\circ}, 20'$, qui ergo praecessit locum Saturni interuallo $2^{\circ}, 1'$, ita vt fuerit $\delta = -61^{\circ}$.

Mutatis

Mutatis ergo signis nostrae tabulae momenta disparitionis respondebunt locis Saturni I°) 3°, 7'; II°) 5°, 40'; III°) — 3°, 1' quatuor igitur momenta disparitionis ordine temporis disposita erunt.

I°) $\Phi = -3^\circ, 1'$, II°) $\Phi = 0$, III°) $\Phi = 3^\circ 7'$ et IIII°) $\Phi = 5^\circ, 40'$.

§. 54. Repraesentemus haec Phoenomena in Fig. 13. Tab. XII. vbi T sit locus Terrae, existente angulo $\angle A\odot F = 61^\circ$, at- Fig. 13. que prima disparitio epocham antecessit circiter 3 mensibus, quo tempore Terra erat in t^I , Saturnus vero in s^I . Hoc igitur tempus incidit in 1773. Octob. 15. prorsus uti supra retulimus. Quoniam igitur secundum momentum incidit in ipsam epocham, per totum spatium ab 11. Octob. usque ad 11. Ianuar. annulus mansit inuisibilis; ab epocha autem usque ad tertium momentum quod tribus mensibus tardius contigit, ideoque circa diem 11. April. incidit, annulum aspicere licuit, donec Terra fuerit in t^{III} et Saturnus in s^{III} . De hinc autem usque ad quartum momentum annulus visui effugere debuit, quod contigit, elapsis circiter duobus mensibus cum semisse, vbi Terra erat in t^{IV} et Saturnus in s^{IV} , id quod egregie convenit cum ipsis observationibus supra allatis.

§. 55. Possumus etiam per integras Saturni reuolutiones siue progredi siue regredi; dum enim Saturnus totum circulum, siue 360° , absoluit, Terra interea percurrit $\approx 360^\circ$ hoc est 29 integras reuolutiones ac insuper 152° ; quare cum circa epocham 1774. fuerit $\delta = -61^\circ$; pro epocha sequente, quae incidet circa in An. 1803, erit $\delta = 91^\circ$, ideoque contingent quatuor momenta disparitionis, pro quibus erit 1°) $\Phi = -5^\circ, 53'$; 2°) $\Phi = -5^\circ, 2'$; 3°) $\Phi = 0$ et 4°) $\Phi = 2^\circ, 17'$. A primo autem momento usque ad secundum effluxerant circiter 25 dies, per quod tempus annulus erit inconspicuus; deinde vero cernetur per temporis intervallum circiter 5 mensium; ac tum iterum disparebit per spatium duorum mensium cum semisse.

§. 56. Possumus vero etiam regredi per integram Saturni reuolutionem, ac perueniemus ad An. 1744, cuius epochae tempore erat $\delta = -213$ et addita tota periphæria, siue 360° , prodibit $\delta = 147$; tum ergo tantum duo momenta occurrerunt, scilicet $\Phi = 0$ et $\Phi = 53'$, sicque ista disparitio tantum per 26 dies durabit. Regrediamus nunc denuo per integram reuolutionem ac perueniemus ad An. 1715, tum autem erat $\delta = -5^\circ$, pro quo tempore quatuor momenta dabant $1^\circ. \Phi = -4^\circ, 20'$; $2^\circ. \Phi = 0$; $3^\circ. \Phi = 15'$ et $4^\circ. \Phi = 3^\circ, 34'$, quae interualla satis exacte cum observationibus conueniunt: perfectus vero consensus ideo expectari non debet, quod utrumque motum tanquam uniformem spectauimus, haecque etiam est causa, cur per semireuolutiones Saturni progredi non liceat. Verum pro huiusmodi epochis, ubi Saturnus circa nodum ascendentem sui annuli versabatur, dummodo pro vna tali epocha locus Terrae innotescat, hinc per integras reuolutiones procedendo omnia Phaenomena, quae nodo descendenti respondent, ubi longitudo Heliocentrica figi potest ad $11^\circ, 21'$, nostra tabula pari modo declarabit.

SOLVITIO
PROBLEMATIS ASTRONOMICI,
DE INVENIENDO LOCO HELIOCENTRICO COME-
TAE EX DATO LOCO EIVS GEOCENTRICO,
SI PRO COGNITIS HABEANTVR LOCVS
NODI ET INCLINATIO ORBITAE,
IN QVA COMETA MOVETVR.

Auctore

L E X E L L.

§. I.

Elementa quibus motus alicuius Cometae in orbita sua perfecte determinantur, numero habentur sex, illorum bina referuntur ad situm plani, in quo haec orbita iacet, stabiliendum, reliqua vero ipsam indolem orbitae in isto plano descriptam, continent. Perspicuum autem est, planum orbitae quoad situm suum perfecte determinari, si cognitus fuerit situs intersectionis huius plani cum ecliptica, itemque angulus, quem hoc planum cum ecliptica constituit; seu quod idem est, si locus lineae Nodorum et inclinatio orbitae ad Eclipticam, cognoscantur. Quum igitur haec Elementa, quae situm plani inuoluunt, ad ipsa indole orbitae descriptae non pendeant; ad Theoriam Cometarum ex observationibus deducendam, sane multum conducere, si Methodus aliqua constaret, qua locus Nodi et inclinatio orbitae independenter a reliquis Elementis investigari possent, tum enim his binis Elementis cognitis, reliqua eo facilius determinarentur. Quamvis autem eiusmodi Methodus, saltem quae omni rigore Geocentrico procedat, nondum sit cognita; tamen haud vsu carebit, ostendisse, quomodo istis binis Elementis cognitis

Cometae, locus eius Heliocentricus inuestigari debeat; ex quo si tria eiusmodi loca Heliocentrica ope trium Geocentricorum fuerint inuenta, deinceps ipsa orbita Cometae omnimode determinatur.

Tab. XI. §. 2. In egregio opere Illust. *Euleri* de orbita Cometae An 1769, praeter plurimas alias valde sublimes disquisitiones circa Theoriam Cometarum, elegans omnino huius Problematis solutio occurrit, hinc superflua quidem haberi possent, quae hac occasione de isto Problemate adducere constitui, nisi aliquod compendium calculi inuoluerent; praetereaue iam mihi liceat hoc Problema ex instituto euoluere et explicare, dum Illust. *Eulero* tantum in animo erat, eius solutionem proposito suo conuenientem, attulisse. Caeterum quae de hoc Problemate docentur, etiam tum insignem habere poterunt usum, quando loca Planetarum obseruata, cum Tabulis conferri debent.

§. 3. In plano Eclipticae ducatur VSE , quae representet lineam nodorum, sit locus Solis in S et pro tempore quodam dato, locus terrae in T , Cometae in C ; tum ex C in planum Eclipticae demittatur normalis CB , et CE perpendicularis ad lineam nodorum, atque iungantur SC , SB , TC , TB , quarum haec producta occurrat lineae nodorum in V . Porro ducantur EB , ST , quae sibi inuicem occurrant in F , et iungantur VC , FC . Quum igitur CB sit normalis ad planum Eclipticae et CE perpendicularis ad lineam nodorum SE , erit quoque BE perpendicularis ad SE , unde angulus $CEB = i$, dabit inclinationem orbitae ad planum Eclipticae. Porro ob datam lineam nodorum et locum Terrae, dabitur angulus $EST = \eta$, tumque ex obseruationibus cognoscetur angulus $STB = \theta$, seu elongatio inter locum Solis et Cometae a Terra visum, nec non latitudo Cometae Geocentrica,

centrica, nimirum $\angle CTB = \lambda$. Ex his Elementis cognitis una cum interuallo $ST = c$, iam inuestigari debent anguli CSE , BSE , CSB , et distantia SC , quae Elementa sequentibus litteris indigitemus Φ , ω , τ , v .

§. 4. Quamvis pluribus modis inuestigatio incognitarum Φ , ω , τ , v suscipi queat, tamen pro nostro instituto praecipuis conducit, ut hanc inuestigationem ab angulo Φ incipiamus. Sit Triangulum Sphaericum DGH ita comparatum, ut arcus DG sit mensura anguli CSE (Fig. 5.), nec non DG , GH mensurae angulorum CST , EST , hincque erunt anguli D , G , H in triangulo Sphaerico respectiue aequales angulis, quos plana CSE , CST , EST inter se constituunt; unde proprietates trianguli Sphaerici DGH , facili negotio ad angulos CSE , CST , EST et inclinationes planorum, CSE , CST , EST traduci possunt. Inclinatione igitur planorum CST , EST per π indicata, erit angulus H in triangulo Sphaerico $= \pi$; est vero per Elementa Trigon. Sphaericae

$$\cot. H = \frac{\sin. GH. \cos. DG. - \cos. GH. \sin. DG. \cos. G}{\sin. DG. \sin. G},$$

hinc si pro GH , DG , et G substituantur η , Φ , i , consequemur $\cot. \pi = \frac{\sin. \eta \cos. \Phi - \cos. \eta \sin. \Phi \cos. i}{\sin. \Phi \sin. i}$. Simili ratione demonstrabitur esse $\cot. \pi = \cot. \lambda \sin. \theta$, fiet igitur

$$\cot. \lambda \sin. \theta = \frac{\sin. \eta \cot. \Phi}{\sin. i} - \cos. \eta \cot. i,$$

hincque colligitur

$$\cot. \Phi = \frac{\cot. \lambda \sin. \theta \sin. i + \cos. \eta \cos. i}{\sin. \eta} = \cot. \eta \left(\frac{\cot. \lambda \sin. \theta \sin. i + \cos. i}{\cos. \eta} \right).$$

§. 5. Quum haec solutio ex Elementis Trigonometriae Sphaericae sit deducta, aliam meris Elementis Geometriae superstructam ipsi subiungere; haud praeter rem erit. Quandoquidem itaque in triangulo SVT sit $SV : TV = \sin. \theta : \sin. \eta$ et in triangulo BTF , $BF : BT = \sin. \theta : \cos. \eta$,
fiet

fiet $\cot. \eta = \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{EF} = \frac{SE}{EF}$, est enim in Triangulo FSE,
 tang. $\eta = \frac{EF}{SE}$. Quum vero sit, $\frac{SE}{EF} = \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{BF}$, fiet $\frac{SE}{EF} \cdot \frac{BF}{SE} = \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{BF}$
 et pro BF adhibendo EF-EB, $SE - \frac{SE \cdot EB}{EF} = \frac{SV}{TV} \cdot BT$,
 hincque

$$\frac{SE}{CE} = \frac{SE}{EF} \cdot \frac{EB}{EC} + \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{CE} = \frac{SE}{EF} \cdot \frac{EB}{EC} + \frac{SV}{TV} \cdot \frac{CB}{CE} \cdot \frac{BT}{CB}$$

Nunc vero habemus ob triangula CES, CBE, CFE, CTB
 rectangula:

$$\frac{SE}{CE} = \cot. \Phi; \frac{EB}{EC} = \cos. i; \frac{SE}{EF} = \cot. \eta; \frac{CB}{CE} = \sin. i; \frac{BT}{CB} = \cot. \lambda$$

tumque uti supra $\frac{SV}{TV} = \frac{\sin. \theta}{\sin. \eta}$; consequimur itaque

$$\cot. \Phi = \cot. \eta \cos. i + \frac{\cot. \lambda \sin. \theta \cdot \sin. i}{\sin. \eta}$$

§. 6. Quo huius formulae vsus facilior in computo
 adhiberi queat, ponamus $\cot. \Psi = \frac{\cot. \lambda \sin. \theta}{\cos. \eta}$; critique

$$\cot. \Phi = \cot. \eta (\cot. \Psi \sin. i + \cos. i) = \cot. \eta \frac{\sin. (i + \Psi)}{\sin. \Psi},$$

quae formula pro computo instituendo valde est concinna;
 cacterum etiam Geometrice hae formulae admodum ele-
 ganter inueniuntur sequentem in modum. Ob triangula
 CBF, CBT rectangula, fiet tang. CFB: tang. CTB = BT: BF,
 est vero

$$BT: BF = \sin. BFT: \sin. BTF = \cos. \eta \cdot \sin. \theta, \text{ hinc} \\ \text{tang. CFB} (= \text{tang. } \Psi) : \text{tang. } \lambda = \cos. \eta \cdot \sin. \theta.$$

Porro habetur tang. Φ : tang. $\eta = CE: FE$ ob triangula
 FES, CES ad E rectangula, est vero in triangulo CEF
 $CE: FE = \sin. CFE: \sin. ECF = \sin. \Psi: \sin. (i + \Psi)$,
 ob $CEF = i$, fiet igitur tang. Φ : tang. $\eta = \sin. \Psi: \sin. (i + \Psi)$.

§. 7. Quoniam angulus Ψ , prouti anguli λ et θ ,
 siue positive siue negative accipiantur, positivos et negati-
 vos valores inducere potest, necessum est, ut breui explica-
 tione perspicuum reddatur, quatenus formula quolibet in
 casu

casu pro $\cot. \Phi$ adhiberi debeat. Supponamus igitur ante omnia, angulum $\eta = EST$ esse acutum, ita ut eius tam sinus, quam cosinus habeantur positivi, eritque perspicuum angulum ψ positivum haberi, quoties ambo anguli λ et θ , sunt siue positivi, siue negativi; negativum vero istum angulum esse, si posito alterutro angulorum λ vel θ positivo, alter fuerit negativus. Si iam concipiatur recta FTS producta in T' , angulus $\theta = STB$ censebitur esse positivus, quoties cadit ad eandem plagam respectu lineae ST , ac angulus EST ceciderit, id quod evenit, quoties locus Cometae ad Eclipticam reductus cadit vel intra angulum EST vel intra angulum EST' . Sin vero punctum B cadat vel intra angulum TSV , seu $T'SV$, angulus θ negative accipi debet. Porro si Latitudines Cometae in plano CES , habeantur positivae, in eodem plano infra ESF continuato, erunt negativae. Denique anguli Φ , dum computantur a linea ES versus plagam oppositam anguli ESC , habentur negativi.

§. 8. His observatis, iam facile est formulas exhibere, quae pro omni situ punctorum C et B , valorem anguli Φ exprimant. Nimirum si punctum B cadat intra angulum EST , ubi et θ , et λ habentur positivi, valebit formula supra inuenta $\cot. \Phi = \cot. \eta \frac{\sin. (i + \psi)}{\sin. \psi}$. Deinde si B cadat intra angulum VST , manebit λ positivus, angulus θ fiet negativus, ideoque et ψ , unde formula nostra erit $\cot. \Phi = \cot. \eta \frac{\sin. (\psi - i)}{\sin. \psi}$. Hic igitur duo occurrunt casus, prouti vel $\psi > i$, vel $\psi < i$, in priori angulus Φ est acutus, in posteriori obtusus. Iam si B reperiatur intra angulum EST' , manebit θ positivus sed λ fiet negativus, ut et anguli ψ et Φ , pro illo igitur casu formula erit $\cot. \Phi = \cot. \eta \frac{\sin. (i - \psi)}{\sin. \psi}$, ubi iterum prout

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. S s $i > \psi$

$i > \psi$ vel $i < \psi$, angulus Φ esse potest vel acutus, vel obtusus. Denique si B cadat intra angulum $T'SV$, erunt ambo θ et λ negatiui, tumque formula nostra erit

$$\cot. \Phi = - \cot. \eta \frac{\sin. (i + \psi)}{\sin. \psi},$$

ta vt pro hoc casu angulus Φ semper sit obtusus.

§. 9. Antequam vltcrius progrediamur, Corollaria nonnulla valorem anguli Φ respicientia adferre, haud praeter rem erit.

I. Si in valore $\cot. \Phi$ ponatur $i = 0$, hoc est, si planum orbitae cum ipsa Ecliptica coincidat, fiet $\cot. \Phi = \cot. \eta$, seu quia η hoc in casu plane arbitrarium habet valorem, idem de Φ tenendum, hoc igitur in casu vsus nostri Problematis adhiberi nequit.

II. Ponatur $i = 90^\circ$, eritque tum $\cot. \Phi = \frac{\cot. \lambda \sin. \theta}{\sin. \eta}$.

III. Si fuerit $\eta = 0$, hoc est si terra in ipsa linea nodorum reperiatur, fiet $\cot. i = - \cot. \lambda \sin. \theta$, ideoque tam $\cot. \lambda \sin. \theta \sin. i + \cos. \eta \cos. i$, quam $\sin. \eta$ euanesceat, quamobrem valor $\cot. \Phi$ eo in casu erit indeterminatus.

IV. Si ponatur $\eta = 90$, fiet $\cot. \Phi = \cot. \lambda \sin. \theta \sin. i$.

V. Si statuatur $\theta = 0$, fiet $\cot. \Phi = \cot. \eta \cos. i$, eoque in casu valor anguli Φ , non dependet ab obseruata Latitudine Geocentrica.

VI. Posito $\theta = 90$, fit $\cot. \Phi = \frac{\cot. \lambda \sin. i + \cos. \eta \cos. i}{\sin. \eta}$.

VII. Denique si $\eta + \theta = 180^\circ$, fit $\sin. \eta = \sin. \theta$; $\cos. \eta = - \cos. \theta$, hincque $\cot. \Phi = \cot. \lambda \sin. i + \cot. \eta \cos. i$, et ob $\cot. \psi = \cot. \lambda \tan. \eta$;

$$\cot. \Phi = \cot. \eta \frac{\sin. (i + \psi)}{\sin. \psi} = \cot. \lambda \frac{\sin. (i + \psi)}{\cos. \psi}.$$

§. 10. Inuento angulo Φ , angulus $\omega = BES$ facile determinari potest, quum enim sit $\tan. \omega = \frac{BE}{SE}$, praeterea-
que

que habeatur $\frac{BE}{SE} = \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CE}{SE}$, vbi $\frac{BE}{CE} = \cos. CEB = \cos. i$ et $\frac{CE}{SE} = \text{tang. } \Phi$, fiet $\text{tang. } \omega = \text{tang. } \Phi \cdot \cos. i$, hincque $\cot. \omega = \frac{\sin. \theta \cdot \text{ang. } i \cdot \cos. \lambda}{\sin. \eta} + \cot. \eta$, quae formula caeteroquin hunc in modum elici potest. Perinde ac supra (5) demonstrabitur, esse $\frac{SE}{EF} = \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{EB}$, hinc fiet $\frac{SE \cdot BF}{EF \cdot EB} = \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{EB}$, est vero ob $BF = EF - EB$, $\frac{SE \cdot BF}{EF \cdot EB} = \frac{SE}{EB} - \frac{SE}{EF}$, hincque $\frac{SE}{EB} = \frac{SE}{EF} + \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{EB} = \frac{SE}{EF} + \frac{SV}{TV} \cdot \frac{BT}{CB} \cdot \frac{CB}{EB}$, vnde ob $\frac{SE}{EB} = \cot. \omega$, $\frac{SE}{EF} = \cot. \eta$, $\frac{SV}{TV} = \frac{\sin. \theta}{\sin. \eta}$, $\frac{BT}{CB} = \cot. \lambda$, $\frac{CB}{EB} = \text{tang. } i$, prodit $\cot. \omega = \cot. \eta + \frac{\sin. \theta \cdot \cot. \lambda \cdot \text{ang. } i}{\sin. \eta}$. Pro faciliiori computo huius formulae, poni quidem posset $\cot. \gamma = \frac{\sin. \theta \cdot \cot. \lambda \cdot \text{ang. } i}{\sin. \eta}$, vnde fieret $\cot. \omega = \cot. \eta + \cot. \gamma = \frac{\sin. (\gamma + \eta)}{\sin. \gamma \sin. \eta}$; verum mox aliam formulam pro ω computando, multo concinniore suppediabitur.

§. 11. Scilicet in formula $\cot. \omega = \cot. \eta + \frac{\sin. \theta \cdot \cot. \lambda \cdot \text{ang. } i}{\sin. \eta}$, ponatur $\cot. \pi = \cot. \lambda \sin. \theta$, eritque $\cot. \omega = \cot. \eta + \frac{\cot. \pi \cdot \text{ang. } i}{\sin. \eta}$, hinc $\cot. \omega - \cot. \eta = \frac{\cot. \pi \cdot \text{ang. } i}{\sin. \eta}$, vnde fit $\frac{\sin. (\eta - \omega)}{\sin. \omega} = \frac{\text{tang. } i}{\text{tang. } \pi}$ et proinde $\frac{\sin. \omega - \sin. (\eta - \omega)}{\sin. \omega + \sin. (\eta - \omega)} = \frac{\text{ang. } \pi - \text{tang. } i}{\text{ang. } \pi + \text{tang. } i}$, siue $\text{tang. } (\omega - \frac{1}{2} \eta) = \text{tang. } \frac{1}{2} \eta \frac{\sin. (\pi - i)}{\sin. (\pi + i)}$,

quae formula ob datos angulos η , π et i , dabit valorem ipsius ω . Caeterum hac quoque ratione ad formulam istam $\frac{\sin. (\eta - \omega)}{\sin. \omega} = \frac{\text{tang. } i}{\text{tang. } \pi}$ peruenire licet. Ex puncto D (Fig. 6.) in basin trianguli Sphaerici GH demittatur arcus normalis DK, tumque facili attentione adhibita patebit, esse arcum GK mensuram anguli $ESB = \omega$, arcum HK mensuram anguli $BST = \eta - \omega$, nec non DK mensuram anguli $CSB = \pi$. Iam vero est in triangulo Sphaerico DGH: $\text{tang. } H : \text{tang. } G = \sin. GK : \sin. HK$, ideoque $\text{tang. } \pi : \text{tang. } i = \sin. \omega : \sin. (\eta - \omega)$.

§. 12. Si loco anguli ω , quaeratur $\eta - \omega$, habebitur
 $\cot. (\eta - \omega) = \cot. \eta + \frac{\tan. \lambda \cot. i}{\sin. \eta \sin. \theta}$. Tum vero, si quaerere
 lubet angulum $S B T$, qui est $= 180^\circ - \theta - \eta - \omega$, habe-

bimus $\tan. (\theta + \eta - \omega) =$

$$\frac{\tan. (\theta + \eta) - \tan. \omega}{1 + \tan. (\theta + \eta) \tan. \omega} = \frac{\cot. \omega - \cot. (\theta + \eta)}{1 + \cot. (\theta + \eta) \cot. \omega} = \frac{\cot. \pi \tan. i + \cot. \eta - \sin. \eta \cot. (\theta + \eta)}{\cot. \pi \tan. i \cot. (\theta + \eta) + \cot. \eta \sin. \eta}$$

 hincque

$$\tan. (\theta + \eta - \omega) = \frac{\cot. \pi \tan. i \sin. (\eta + \theta) + \sin. \theta}{\cot. \pi \tan. i \cot. (\eta + \theta) + \sin. \theta}.$$

Huius formulae computum inire, si volupe fuerit, videtur
 id facillime fieri posse, si statuatur $\tan. \delta = \frac{\cot. \pi \tan. i}{\sin. \theta} \sin. (\eta + \theta)$,
 tumque $\tan. \varepsilon = \frac{\cot. \pi \tan. i}{\cot. \theta} \cot. (\eta + \theta)$, tum enim erit:

$$\begin{aligned} \tan. (\theta + \eta - \omega) &= \tan. \theta \left(\frac{\tan. \delta + 1}{\tan. \varepsilon + 1} \right) = \tan. \theta \frac{\cot. \varepsilon}{\cot. \delta} \frac{\cot. (45 - \delta)}{\cot. (45 - \varepsilon)} \\ &= \tan. (\eta + \theta) \frac{\sin. \varepsilon}{\sin. \delta} \frac{\sin. (45 + \delta)}{\sin. (45 + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

§. 13. Angulus $C S B = \tau$, subsidio anguli $C S E$
 vel $B S E$ determinari potest, quum enim sit $\sin. \tau = \frac{C B}{C S}$
 $= \frac{C B}{C E} \cdot \frac{C E}{C S}$, fiet $\sin. \tau = \sin. \Phi \sin. i$, deinde ob
 $\tan. \tau = \tan. C S B = \frac{C B}{S B} = \frac{C B}{E B} \cdot \frac{E B}{S B}$, erit $\tan. \tau = \tan. i \sin. \omega$;
 inuento igitur alterutro angulorum Φ vel ω , angulus τ fa-
 cili negotio determinatur. Independentem quidem a valo-
 ribus angulorum Φ et ω , angulus τ quaeri potest, verum
 complicatio omnino tum eius reperitur expressio, erit enim

$$\cot. \tau^2 = \frac{r}{\sin. \eta^2} (\cot. \pi^2 + 2 \cot. \pi \cot. i \cot. \eta + \cot. i^2),$$

quod sequentem in modum demonstratur. Ob

$$\cot. \omega = \cot. \eta + \frac{\cot. \pi \tan. i}{\sin. \eta}, \text{ fit}$$

$$1 + \cot. \omega^2 = \frac{1}{\sin. \omega^2} = 1 + \cot. \eta^2 + 2 \frac{\cot. \pi \tan. i \cot. \eta}{\sin. \eta^2} + \frac{\cot. \pi^2 \tan. i^2}{\sin. \eta^2},$$

hincque

$$\cot. \tau^2 = \frac{\cot. i^2}{\sin. \omega^2} = \frac{r}{\sin. \eta^2} (\cot. i^2 + 2 \cot. \pi \cot. i \cot. \eta + \cot. \pi^2).$$

§. 14. Pro inveniendâ distantia $C S$ variae tradi
 possunt formulae, quarum praecipuas haec recensebimus.

Quum

Quum sit $CS = \frac{CE}{\sin. \Phi}$, tumque

$$EC = \frac{BE}{\cos. i}, \text{ fiet } CS = \frac{BE}{\sin. \Phi \cos. i} = - \frac{BV \sin. (\eta + \theta)}{\sin. \Phi \cos. i},$$

est enim $BE = BV \sin. EVB$, existente $\sin. EVB = -\sin. (\eta + \theta)$.

Porro ob $\text{tang. } CVB = \frac{CB}{BV} = \frac{CB}{BE} \cdot \frac{BE}{BV}$, erit $\text{tang. } CVB = -\text{tang. } i \cdot \sin. (\eta + \theta)$, tum vero est

$$\text{tang. } CVB \cdot \text{tang. } CTB = BT : BV, \text{ feu}$$

$$BT : BV = -\text{tang. } i \sin. (\eta + \theta) : \text{tang. } \lambda, \text{ tumque}$$

$$TV : BV = \text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta) : \text{tang. } \lambda.$$

Hinc quum sit

$$TS : TV = -\sin. (\eta + \theta) : \sin. \eta, \text{ colligitur}$$

$TS : BV = -\sin. (\eta + \theta) (\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta)) : \text{tang. } \lambda \sin. \eta$
ideoque ob

$$TS = c, -BV \sin. (\eta + \theta) = \frac{-c \text{tang. } \lambda \sin. \eta}{\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta)}$$

et denique

$$CS = v = - \frac{BV \sin. (\eta + \theta)}{\sin. \Phi \cos. i} = \frac{c \text{tang. } \lambda \sin. \eta}{\sin. \Phi \cos. i (\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta))}.$$

Vt haec formula pro computo ineundo facilius reddatur, ponamus $\cot. \zeta = \cot. \lambda \sin. (\eta + \theta)$, fietque

$$\text{tang. } \lambda = \text{tang. } \zeta \sin. (\eta + \theta), \text{ hinc}$$

$$\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta) = \sin. (\eta + \theta) (\text{tang. } \zeta + \text{tang. } i) = \frac{\sin. (\eta + \theta) \sin. (\zeta + i)}{\cos. \zeta \cos. i},$$

erit igitur

$$v = \frac{c \text{tang. } \lambda \sin. \eta \cos. \zeta}{\sin. \Phi \sin. (\eta + \theta) \sin. (\zeta + i)} = \frac{c \sin. \eta \sin. \zeta}{\sin. \Phi \sin. (\zeta + i)}.$$

Hac quoque ratione res absoluetur, vt ponatur

$$\text{tang. } \xi = -\text{tang. } i \sin. (\eta + \theta);$$

tum enim erit

$$\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta) = \text{tang. } \lambda - \text{tang. } \xi = \frac{\sin. (\lambda - \xi)}{\cos. \lambda \cos. \xi},$$

hinc $v = \frac{c \sin. \lambda \sin. \eta \cos. \xi}{\sin. \Phi \cos. \lambda \cos. \xi (\lambda - \xi)}$, verum hanc formulam prior elegantia multum antecellit. Caeterum huius formulae demon-

stratio Geometrica sequens erit: ob $\text{tang. } \xi = -\text{tang. } i \sin. (\eta + \theta)$ erit $\xi = \text{ang. } CVB$, hinc $\lambda - \xi = VCT$, quare $\sin. \lambda : \sin. (\lambda - \xi) = VC : VT$. Porro ob $-\frac{\sin. (\eta + \theta)}{\sin. \eta} = \frac{ST}{VT}$, fit $-\sin. (\eta + \theta)$

$= \frac{ST}{VT} \cdot \sin. \eta$, hincque $\frac{BE}{BV} = \frac{ST}{VT} \cdot \sin. \eta$ et $r = \frac{ST \cdot BV}{VT \cdot BE} \cdot \sin. \eta$,
 nec non $CE = \frac{CE \cdot ST \cdot BV \cdot \sin. \eta}{VT \cdot BE} = ST \cdot \frac{VC}{VT} \cdot \frac{BV}{VC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \sin. \eta$,
 vnde ob $CE = CS \sin. \Phi = v \sin. \Phi$, $ST = c$, $\frac{VC}{VT} = \frac{\sin. \lambda}{\sin. (\lambda - \xi)}$,
 $\frac{BV}{VC} = \cos. \xi$, $\frac{EB}{CE} = \cos. i$, prodibit $v \sin. \Phi = \frac{c \sin. \lambda \sin. \eta \cos. \xi}{\cos. i \sin. (\lambda - \xi)}$.

§. 15. Sequenti autem ratione, formula meo quidem iudicio maxime concinna pro $v = CS$ inuenitur. In triangulo SCV , est $CS : VS = \sin. CVE : \sin. SCV$, tumque in triangulo STV habetur

$VS : ST = \sin. \theta : -\sin. (\eta + \theta) = \sin. STV : \sin. EVB$,
 hinc erit

$$CS : ST = \sin. CVE \cdot \sin. STV : \sin. SCV \cdot \sin. EVB.$$

Iam igitur si exprimatur angulus CVE per κ , fiet $SCV = \Phi - \kappa$, vnde erit

$$v : c = \sin. \kappa \sin. \theta : -\sin. (\Phi - \kappa) \sin. (\eta + \theta) \text{ hincque } v = -\frac{c \sin. \kappa \sin. \theta}{\sin. (\Phi - \kappa) \sin. (\eta + \theta)}.$$

Quum vero sit

$$\text{tang. } CVE = \text{tang. } \kappa = \frac{CE}{EV} = \frac{CE}{EB} \cdot \frac{EB}{EV}, \text{ fiet}$$

$$\text{tang. } \kappa = -\frac{\text{tang. } (\eta + \theta)}{\cos. i}, \text{ ope cuius formulae angulus } \kappa \text{ de-}$$

terminatur. At tamen quum in his valoribus distantiae v angulus Φ ingreditur, quaeritur merito an non detur formula pro v , quae ex meris quantitibus cognitis conflata sit? Huiusmodi igitur formulam licet prioribus aliquanto sit complicatior, nunc ultimo tandem loco adferemus. Ex consideratione trianguli CST consequimur:

$$CS^2 = ST^2 - 2ST \cdot TC \cdot \cos. STC + TC^2 = ST^2 (1 - \frac{2TC}{ST} \cdot \cos. STC + \frac{TC^2}{ST^2}),$$

est vero

$$TC \cdot TB = r : \cos. CTB, \text{ tumque ob}$$

$$TB : BV = \text{tang. } CVB : \text{tang. } CTB,$$

$$TB : TV = \text{tang. } CVB : \text{tang. } CTB - \text{tang. } CVB \text{ et quia}$$

$$TV : TS = \sin. TSE : \sin. TVE, \text{ colligitur demum}$$

$$TC :$$

TC:TS=tg.CVB.sin.TSE:cof.CTB. si. TVE(tg.CTB-tg.CVB).
Hinc quum fit tang. C V B. = - tang. $i \sin. (\eta + \theta)$,
T S E = η , C T B = λ et sin. T V E = - sin. $(\eta + \theta)$,
consequemur :

TC:TS = tang. $i \sin. \eta$: cof. λ (tang. $\lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta)$),
tum vero ob

cof. S T C = cof. S T B. cof. C T B = cof. θ cof. λ ,
demum fiet

$$v^2 = \frac{c^2}{\cos^2 \lambda} \left(\cos^2 \lambda - \frac{2 \text{tang. } i \sin. \eta \cos. \theta \cos. \lambda^2}{\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta)} + \frac{\text{tang. } i^2 \sin. \eta^2}{\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta)^2} \right).$$

Euolutione autem facta, haec formula sequentem formam
paulo commodiorem adipiscitur :

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\text{tang. } \lambda^2 (1 + \sin. \eta^2 \text{tang. } i^2) + 2 \text{tang. } \lambda \text{tang. } i \sin. \theta \cos. \eta + \text{tang. } i^2 \sin. \theta^2}{(\text{tang. } \lambda + \text{tang. } i \sin. (\eta + \theta))^2}.$$

§ 16. Vt vsus formularum in praecedentibus allatarum eo magis illustretur, exemplo quodam earum applicationem ostendisse iuuabit. Supponamus igitur pro Cometa Anni 1770, Longitudinem Nodi descendens fuisse $10^{\circ}.12'$ et inclinationem orbitae $1^{\circ}.33'.20''$, tumque ex obseruato huius Cometae loco Geocentrico die 15 Iunii 1770. $23^h.22^m$, quaeratur eius Locus Heliocentricus, qui determinatur ope anguli Φ et distantiae v . Erat autem pro tempore allato, Longitudo Cometae obseruata $9^{\circ}.2'.51'.49''$ et Latitudo Borealis $6^{\circ}.57'.45''$, tumque Longitudo Solis $2^{\circ}.24'.43'.44''$, et Logar. distantiae Solis a terra = 0,0069950. Hinc obtinebimus $180^{\circ} - \theta = 8^{\circ}.8'.5''$, $\eta = 47^{\circ}.16'.16''$, $\lambda = 6^{\circ}.57'.45''$, $i = 1^{\circ}.33'.20''$ et Log. $c = 0,0069950$, critque calculus pro inueniendis angulo Φ et distantia v , vt sequitur :

L. tang.

$\begin{aligned} \text{L. tang. } \lambda &= 9,0867877 \\ \text{L. fin. } \theta &= 9,1507600 \\ \hline &9,9360277 \\ \text{L. cof. } \eta &= 9,8315690 \\ \hline \text{L. tang. } \psi &= 9,7675967 \\ \psi &= 30^\circ. 21'. 11'' \\ i &= 1. 33. 20 \\ \hline \psi + i &= 31. 54. 31 \\ \hline \text{L. tang. } \eta &= 0,0344657 \\ \text{L. fin. } \psi &= 9,7035724 \\ \hline &9,7380381 \\ \text{L. fin. } (i + \psi) &= 9,7230992 \\ \hline \text{L. tang. } \Phi &= 0,0149389 \\ \Phi &= 45^\circ. 59'. 7' \\ \kappa &= 39. 8. 48 \\ \hline \Phi - \kappa &= 6. 50. 19 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{L. tang. } (\eta + \theta) &= 9,9104820 \\ \text{L. cof. } i &= 9,9998399 \\ \hline \text{L. tang. } \kappa &= 9,9106421 \\ \hline \text{L. } c &= 0,0069950 \\ \text{L. fin. } \theta &= 9,1507600 \\ \hline &9,1577550 \\ \text{L. } \frac{\sin. \kappa}{\sin. (\eta + \theta)} &= 0,0000955 \\ \hline &9,1578505 \\ \text{L. fin. } (\Phi - \kappa) &= 9,0758136 \\ \hline \text{L. } v &= 0,0820369 \end{aligned}$
---	---

Inuento angulo Φ , angulus ω facile determinatur ope formulae $\text{tang. } \omega = \text{tang. } \Phi \text{ cof. } i$, unde pro casu allato $\omega = 45^\circ. 58'. 29''$; verum quum eiusmodi incidere possint casus, vbi tantum anguli ω inuestigatio suscipienda est, videamus quomodo subsidio formulae §. 11. allatae, valor ipsius ω quaerendus sit.

$$\begin{aligned} \text{L. } \frac{\text{tang. } \lambda}{\sin. \theta} &= 9,9360277 \text{ hinc ob } \text{tang. } \pi = \frac{\text{tang. } \lambda}{\sin. \theta}, \\ \pi &= 40^\circ. 47'. 57'', \text{ tumque} \\ \pi - i &= 39^\circ. 14'. 37'' \text{ et } \pi + i = 42^\circ. 21'. 17''. \end{aligned}$$

Porro

Porro calculus erit

$$\begin{array}{rcl}
 \text{L. tang. } \frac{1}{2} \eta & = 9,6411056 & \text{hinc } \omega - \frac{1}{2} \eta = 22. 20. 21 \\
 \text{L. fin. } (\pi - i) & = 9,8011422 & \frac{1}{2} \eta = 23. 38. 8 \\
 & \underline{9,4422478} & \omega = 45. 58. 29 \\
 \text{L. fin. } (\pi + i) & = 9,8284786 & \\
 \text{L. tang. } (\omega - \frac{1}{2} \eta) & = 9,6137692 &
 \end{array}$$

Demum ex inuento angulo Φ , habetur τ ope formulae $\sin. \tau = \sin. \Phi. \sin. i$, vel ex ω , ope formulae $\tan. \tau = \tan. i \sin. \omega$, vtraque autem pro casu nostro dat $\tau = 1^\circ. 7'. 7''$.

§. 17. Supra obseruauimus quod si angulus η euanescat, hoc est si terra versetur in ipsa linea nodorum, angulum Φ manere indeterminatum, id quod similiter valet de distantia v , nam licet ex formula nostra §. 15. adducta concludi posse videtur, tum haberi $\frac{v^2}{c^2} = 1$; haec conclusio minime valet, quia ob $\frac{v^2}{c^2} = \frac{(\tan. \lambda + \tan. i \sin. \theta)^2}{(\tan. \lambda + \tan. i \sin. \theta)^2}$, vbi $\tan. \lambda + \tan. i \sin. \theta = 0$, tam numerator quam denominator euanescit, ideoque v manebit indeterminatum. Quamuis autem pro tali casu, ex loco Cometae Geocentrico nihil de eiusdem loco Heliocentrico concludere liceat; tamen hac obseruationes maximi momenti habendae sunt, quia ope illarum ex data Logitudine Nodi inclinatio orbitae immediate deducitur, vel saltem si limites intra quos Longitudo Nodi cadere debeat, cogniti fuerint, etiam limites pro inclinatione orbitae eo ipso innotescunt. Sic quum pro Cometa Anni 1770, Longitudo Nodi descendens certe inter $10^\circ. 12'$ et $10^\circ. 13'$ cadat, Longitudo autem Solis pro diebus 3, 4 et 5 Augusti fuerit, pro datis temporibus quibus obseruationes Cometae institutae sunt:

$$4^\circ. 11'. 38''. 13''; 4^\circ. 12'. 34''. 24''; 4^\circ. 13'. 32''. 56'';$$

omnino liquet Terram inter 3 et 5 Augusti in ipsa linea nodo-

rum versatam fuisse. Longitudinibus igitur Solis iam allatis, quum respondeant Longitudines Cometæ obseruatae:

$$3^{\circ}.6^{\circ}.25'.15''; 3^{\circ}.6^{\circ}.47'.24''; 3^{\circ}.7^{\circ}.14'.0''$$

et Latitudines

$$53'.25''; 55'.33''; 58'.52'';$$

hinc pro inclinationibus planorum per Solem, Terram et Cometam transeuntibus, sequentes inuenientur valores:

$$1^{\circ}.32'.37''; 1^{\circ}.34'.59''; 1^{\circ}.39'.23''.$$

Hinc igitur iam concludere licet, si locus Nodi contineatur inter hos limites $10^{\circ}.12'$ et $10^{\circ}.13'$, certe inclinationem orbitæ comprehendi inter $1^{\circ}.32'.20''$ et $1^{\circ}.37'$; adeo vt si Longitudo Nodi cum præcisione 10 Minutorum determinari possit. inclinatio orbitæ determinationem admittat, cui vix 20 aut 30 secundorum error inesse queat.

§. 18. Operæ nunc quoque pretium erit, vt dispiciamus quantum anguli Φ valor, ex erroribus, qui siue in ipsis obseruationibus, siue in Elementis orbitæ assumtis, Longitudine Nodi et inclinatione, deprehenduntur, immutari debent. Hunc in finem formula

$$\cot. \Phi = \cot. \eta \left(\frac{\cot. \lambda \sin. \theta \sin. i}{\cos. \eta} + \cos. i \right)$$

differentietur, positis η, θ, λ, i variabilibus, eritque

$$-\frac{d\Phi}{\sin. \Phi^2} = -\frac{d\eta}{\sin. \eta^2} \left(\cot. \lambda \sin. \theta \cos. \eta \sin. i + \cos. i \right) - d\theta \frac{\cot. \lambda \cos. \theta \sin. i}{\sin. \eta} \\ + d\lambda \cot. \eta \left(\frac{\cot. \lambda \sin. \theta \cos. i}{\cos. \eta} - \sin. i \right) - \frac{d\lambda}{\sin. \lambda^2} \cdot \frac{\sin. \theta \sin. i}{\sin. \eta}.$$

$$\text{Siue ob } \frac{\cot. \lambda \sin. \theta \cos. \eta \sin. i + \cos. i}{\sin. \eta^2} = \cot. \Phi \cot. \eta + \cos. i,$$

$$\cot. \eta \left(\frac{\cot. \lambda \sin. \theta \cos. i}{\cos. \eta} - \sin. i \right) = \cot. \Phi \cot. i - \frac{\cot. \eta}{\sin. i},$$

$$-\frac{d\Phi}{\sin. \Phi^2} = -d\eta \left(\cot. \Phi \cot. \eta + \cos. i \right) + di \left(\cot. \Phi \cot. i - \frac{\cot. \eta}{\sin. i} \right) \\ - d\theta \frac{\cot. \lambda \cos. \theta \sin. i}{\sin. \eta} - \frac{d\lambda}{\sin. \lambda^2} \frac{\sin. \theta \sin. i}{\sin. \eta}.$$

Ex his formulis manifesto colligitur, valorem $d\Phi$, ex omnibus $d\eta, di, d\theta, d\lambda$ eo maiorem euadere, quo minor sit

sin.

sin. η ; nam in formula priori, vbique factor est $\frac{1}{\sin. \eta}$, qui ergo eo euadit maior, quo minor fuerit angulus η . Porro partes ipsius $d\Phi$ quae ex $d\eta$ et di oriuntur, crescent in ratione sin. θ et cot. λ ; pars ipsius $d\Phi$ ex $d\theta$ oriunda, crescet in ratione cos. λ , cos. θ , sin. i et pars ex $d\lambda$ emergens in ratione reciproca sin. λ , directa vero sin. θ , sin. i . Hinc iterum generaliter concludere licet, errorem $d\Phi$ eo prodire maiorem, quo latitudo obseruata fuerit minor.

§. 19. Quum sit $\frac{c}{v} = \frac{\sin. \Phi \cos. i / \tan. \lambda + \tan. i \sin. (\eta + \theta)}{\tan. \lambda \sin. \eta}$
 $= \frac{\sin. \Phi \cos. i}{\sin. \eta} (1 + \cot. \lambda \tan. i \sin. (\eta + \theta))$, inde differentiando colligitur, $-\frac{dv}{v} = +d\Phi \cot. \Phi - di \tan. i - d\eta \cot. \eta$
 $\frac{(d\eta + d\theta) \cos. \lambda \tan. i \cos. (\eta + \theta)}{1 + \cot. \lambda \tan. i \sin. (\eta + \theta)} - \frac{d\lambda \cos. i \sin. i \sin. (\eta + \theta) + di \sin. \lambda \cos. \lambda \sin. (\eta + \theta)}{\sin. \lambda^2 \cos. i^2 (1 + \cot. \lambda \tan. i \sin. (\eta + \theta))}$,
 vbi si pro $d\Phi$ substituatur eius valor in superiori § per $d\eta$, $d\theta$, di et $d\lambda$ expressus, consequemur valorem pro dv per variationes datas expressum; verum quum vix sperare liceat formulam hinc emergentem admodum concinnam reddi posse, hanc substitutionem heic instituire, inutile ducimus.

§. 20. Quamuis inuestigatio distantiae Cometae a Terra siue lineae CT proprie ad institutum nostrum non pertineat; tamen formulam pro illa quoque inuenienda adferemus. Quum igitur sit: $CT:TV = \sin. CVT:\sin. VCT$ tumque $TV:ST = \sin. EST:\sin. SVT$, si angulus CVT , vti antea indigitetur per ξ habebimus:

$$CT:ST = \sin. CVT. \sin. EST:\sin. VCT. \sin. SVT \text{ feu}$$

$$CT:ST = -\sin. \xi. \sin. \eta:\sin. (\lambda - \xi) \sin. (\eta + \theta), \text{ vbi est}$$

$$\tan. \xi = -\tan. i. \sin. (\eta + \theta); \text{ quare etiam fiet}$$

$$CT:ST = \cos. \xi \sin. \eta:\sin. (\lambda - \xi) \cot. i = \tan. i \cos. \xi \sin. \eta:\sin. (\lambda - \xi).$$

Ex quo omnino patet de hac distantia nihil iudicari posse, si terra in ipsa linea nodorum versetur; tum enim puncta V et T coincident, adeoque erit $\lambda = \xi$, quare sin. η et sin. $(\lambda - \xi)$ simul euanescent, ita vt ratio $CT:ST$ maneat indeterminata.

TENTAMEN ASTRONOMICVM
DE TEMPORIBVS
PERIODICIS COMETARVM
ET SPECIATIM DE TEMPORE REVOLVTIONIS
COMETAE, A. 1770 OBSERVATI.

Auctore
L E X E L L.

§. 1.

Quemadmodum vix quisquam Astronomiae gnarus est, qui dubitauerit Cometas in orbitis Ellipticis circa Solem circumferri, ideoque statis temporibus ad eadem vnde egressi fuerint loca, reuerti; ita simul fatendum est, ob perplurimas casque grauissimas rationes dubium videri posse, vtrum ex obseruationibus alicuius Cometae prima vice obseruati, tempus eius Periodicum determinari queat? Id autem facilius intelligemus, si praecipuum discrimen quod inter orbitas Cometarum et Planetarum intercedit, perpendamus; scilicet orbitae Planetarum ad figuram circularem proxime accedunt valdeque parua excentricitate instructae sunt, orbitae vero Cometarum Ellipticae ob insignem Excentricitatem, in exiguis earum portionibus cum figuris Parabolicis prope coincidunt. Etiam si igitur ex obseruationibus Planetarum eorum tempora Periodica concludere liceret, inde minime inferri potest, eundem laborem pro Cometis aeque feliciter succedere; quin potius si hic labor pro Planetis non omnimodam certitudinem praebat, facile colligitur, cum pro Cometis susceptum conclusiones tanto incertiores suppeditare.

§. 2.

§. 2. Notum autem est, Astronomos dum in temporibus Periodicis Planetarum determinandis, occupati fuerunt, necessum non habuisse, ut huiusmodi laborem susciperent; quippe quum via magis directa, ex ipsis observationibus haec tempora Periodica concludi possent. Verum pro Cometis, quorum tempora Periodica plerumque valde magna esse oportet, hoc admodum raro succedit; inter observatos nimirum 63 Cometas, quorum Elementa habentur cognita, non nisi tres sunt, de quibus tempus revolutionis ex observationibus innotuerit. Scilicet praeter notissimum Cometam Halleii, qui Annis 1456, 1531, 1607, 1682, 1759 observatus fuit, cuiusque igitur tempus Periodicum inter 76 et 77 annos concluditur; Cometae annis 1264 et 1556 observati respectu Elementorum conveniunt, tum vero de Cometa anno 1532 observato constat, quod parum differat ab eo, quem Anno 1661 observatum novimus, unde binos hos ultimo commemoratos Cometas annis 1848 et 1789 ad sua Perihelia reuersuros esse, sperare licet.

§. 3. Methodi quibus Astronomi uti solent, in computandis motibus cometarum, etiamsi prolixae et parum expeditae sint, earum tamen culpa minime fit, ut determinatio temporis Periodici horum Astrorum tantis difficultatibus prematur; quin potius certissimum est, quod si Methodus aliqua directa detegi posset, computandi motus Cometarum in orbitis Ellipticis, hanc determinationem breviorum eo ipso quidem, sed non certiorum fieri. Est enim, ut dixi, huius difficultatis ratio, in eo quaerenda, quod orbitae Cometarum valde sint excentricae, unde evenit, ut haec Astra non nisi brevi tempore, et quidem in confiniis ipsius Perihelii, e Tellure nostra sint conspicua; ita ut portiones orbitarum, quas interea circa Solem describunt, non nisi minimas partes ellipsium ab ipsis descripta-

rum, constituent. Caeterum haec Astra plerumque lumine multo debiliori, quam Planetæ, prædita esse solent et Atmosphaera quadam circumdata; quo fit ut observationes, quibus loca horum Astrorum Geocentrica determinantur, non omnimodo certitudine gaudere soleant.

§. 4. Propter insignem excentricitatem, quæ in orbitis Cometarum locum habet, Astronomis usu receptum esse consuevit, ut has orbitas in computo tamquam lineas Parabolicas contemplentur; nam pro exiguis portionibus Ellipsium valde excentricarum, haud difficulter Parabolæ inveniuntur, quæ in his portionibus cum Ellipsis modo dictis coincidunt. Quod si itaque orbitæ Parabolicæ adeo exacte observationibus satisfaciant, ut dissensus calculi et observationum nullibi duo aut tria minuta prima excedat, id pro certissimo indicio habendum est, calculum huiusmodi Cometae sub hypothese orbitæ Ellipticæ frustra tentari, ideoque de eius tempore Periodico nihil pronunciari posse; imprimis si hi errores pro observationibus propinquis, modo evadant affirmativi, modo negativi. Sin vero maiores dissensus inter calculum et observationes reperiantur, uti quinque, decem et plurium minutorum primorum, illique pro observationibus tempore proximis eiusdem habeantur nominis; inde sane cum aliqua verisimilitudine concludi potest, pro eiusmodi Cometa calculum orbitæ Ellipticæ cum spe felicitis successus, suscipi posse. Facile autem intelligitur, hoc evenire, quoties aliquis Cometa, tam diu incolis Telluris conspicuus fuerit, ut portio orbitæ eius, interea circa Solem descriptæ, nulla ratione cum Parabola reddi possit coincidens. Operæ igitur pretium est, ut examinemus, quinam sit character distinctivus Cometarum, de quibus eiusmodi spem fovere possumus, ut intervallo temporis satis longo, eorum loca observari possint.

§. 5.

§. 5. Hunc autem characterem merito ex valore distantiae Periheliae deriuandum esse, existimamus. Nam si distantia Perihelii magna sit, hoc est distantiam Solis a Terra, notabili quantitate superet; minime fieri potest, vt Cometa tempore suae apparitionis, quod plerumque inter tres, vel quatuor menses concluditur, portionem suae orbitae satis notabilem describat. Contra autem si distantia Perihelii sit valde exigua, vtpote minor quinta parte distantiae telluris a Sole, raro euenit vt Cometa tum in ipso Perihelio obseruari queat, ob motum eius tempore Perihelii celerrimum, sed hoc in casu portiones orbitae descriptae, angulos anomaliarum cum distantia Perihelii constituunt valde obtusos. Verum hoc infra magis perspicue explicabitur, dum primum binas attulerimus Tabellas, quarum prima exhibet, tempus quod Cometa pro data distantia perihelii in partibus distantiae Telluris a Sole, expressa, adhibet ad conficiendum angulum anomaliae 90° a Perihelio computatum; altera vero suppeditat angulum a Perihelio computatum quem Cometa, pro data iterum distantia Perihelii, dato interuallo trium mensium, conficit.

Distant.

Distant. Perihel.	Temp. pro anom 90°.	Angulus pro temp. 90 Dier.
2, 0	309 ^d , 9844	40°. 38'
1, 9	287, 0287	43. 18
1, 8	264, 6693	46. 16
1, 7	242, 9227	49. 31
1, 6	221, 8068	53. 5
1, 5	201, 3408	56. 58
1, 4	181, 5461	61. 14
1, 3	162, 4463	65. 53
1, 2	144, 0677	70. 55
1, 1	126, 4398	76. 23
1, 0	109, 5961	82. 14
0, 9	93, 5747	88. 30
0, 8	78, 4205	94. 50
0, 7	64, 1862	102. 5
0, 6	50, 9356	109. 26
0, 5	38, 7481	117. 8
0, 4	27, 7259	125. 14
0, 3	18, 0085	133. 52
0, 2	9, 8025	143. 24
0, 1	1, 0959	154. 52
0, 075	- - - -	158. 24
0, 050	- - - -	162. 30
0, 025	- - - -	167. 36

§. 6. Sunt quidem hae Tabulae hypothefi orbitarum Parabolicarum accommodatae, eo tamen non obstante, ex illis de portionibus orbitarum Ellipticarum reapse descriptarum, iudicium rite formari potest. Nam pro prima earum facile liquet, orbitam Cometae Ellipticam, intra angulum anomaliae 90° a perihelio cum Parabola faltem
tam

tam prope conuenire, vt errores in hanc Tabulam derivandi vix vnum et alterum diem excedant. In secunda autem Tabula, pro exiguis valoribus distantiae periheliae, errores insignes locum habere possent; verum in his casibus certo statuere licet excentricitatem eo magis increfcere, quo distantia Perihelii euadat minor, vnde vtcunque excentricitas fuerit comparata, in hac Tabula error vnum vel alterum gradum pro anomalia vix superabit.

§. 7. Ex inspectione Tabulae allatae liquet, si distantia Perihelii excedat 1, 5 distantiae telluris mediae a Sole, interuallo trium mensium non nisi angulum 57° a Perihelio circa Solem describi, et pro anomalia 90° fere septem requiri menses; quare vix spes est, Cometam cuius vel tanta, vel maior est distantia Perihelii, tamdiu obseruari posse, vt de vera eius orbita Elliptica aliquid concludere liceret. Ex hoc genere non nisi duo adsunt Cometae obseruati, prior qui a 31 Iulii anni 1729 vsque ad 21 Ianuarii 1730 apparuit et cuius distantia Perihelii habetur 4, 1; alter, qui Anno 1747 a 30 Augusti vsque ad 5 Decembris obferratus habetur et cuius distantia Perihelii erat 2, 3. Facile autem intelligitur Cometas ad hanc classem pertinentes rarius in Terra esse debere conspicuos, et quidem fieri posse, vt nonnulli eorum propter debilitatem luminis in Periheliis visum nostrum plane praeterfugiant.

§. 8. Si distantia perihelii Cometae cuiuspiam fuerit exigua, vtpote minor quam 0, 2, seu quinta parte distantiae mediae telluris a Sole, interuallo trium mensium arcus vix 50° gradus a Cometa describetur, si nimirum seponatur tempus, quo Cometa in confiniis Perihelii versatur. Nam posita distantia Perihelii praecise 0, 2 Cometa adhibebit 10 dies ad describendum angulum 90° a Perihelio, deinde vero reliqui 80 dies impendentur ad conficiendum angulum 53° ; ideoque si Cometa isto priori interuallo decem dierum non
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I. V v fuerit

fuerit obseruatus, ex reliquis obseruationibus insequentibus vix quicquam de orbitae excentricitate concludi poterit. Praeterea satis tuto statuere licet, imminuta distantia Perihelii excentricitatem orbitae increfcere, hincque eius determinationem eo ipso tanto euadere incertio-rem. Quamvis igitur Cometae ex hoc genere, satis longo temporis interuallo conspicui esse soleant, tamen eapropter nihilo certius de eorum tempore Periodico quicquam definiri potest. Inter Cometas qui ad hoc genus referuntur, praeprimis attentionem merentur, qui annis 1680, 1744, 1769 apparuerunt, quippe quorum caudae insigni longitudine erant conspicuae. Primus vero eorum, inter omnes Cometas hucusque obseruatos, minimam habet distantiam Perihelii $= 0,00612$; quodsi igitur supponamus huius Cometae tempus Periodicum fuisse tantum centum annorum, habebitur eius excentricitas $= 0,999716$, quae valde prope ad vnitatem accedit. Hinc si iam intelligatur pro hoc valore Excentricitatis in quarta solummodo figura vnitatem esse aberratum, ita vt sit excentricitas $= 0,9998$, fiet tempus Periodicum 169 annorum, quod enormiter a priori differt. De Cometa Anni 1769 per varios calculos colligere posse mihi visus sum, quod eius tempus Periodicum proxime esse debeat 450 annorum; verum simul perspexi, hoc non nisi cum incertitudine fere centum annorum statui posse. Quod si igitur ex hac classe aliquis adsit Cometa, cuius tempus Periodicum definire liceat, erit fortassis ille, qui Anno 1744 obseruatus fuit; quippe quum eius obseruationes ipso tempore Perihelii institutae adsint; verum tamen plurimae adsunt dubitandi rationes an pro isto quoque Cometa, tempus reuolutionis cum sufficienti exactitudine vnus vel alterius anni determinationem admittat.

§ 9. His perpensis intelligitur, Cometas quorum distantiae periheliae inter 0,2 et 1,0 continentur, ita esse
com-

comparatos, vt si interuallo aliquot mensium eorum obseruationibus inuigilare liceat, spes aliqua adsit, quod computus verarum orbitalium Ellipticarum felicem sortiatur successum. Nam si intelligatur Cometam aliquem, cuius distantia Perihelii ex: causa ponatur esse 0,4 a tempore Perihelii, per integros tres menses esse obseruatum; hic Cometa interea angulum circa Solem describet 125° , ideoque eo interuallo temporis, in tam diuersis orbitae suae locis versabitur, vt vix Linea Parabolica inueniri posse videatur, quae cum portione orbitae descriptae perfecte coincidat, nisi si haec orbita valde insignem habeat excentricitatem. Plerique sane Cometae quorum hucusque institutas habemus obseruationes, ad hanc classem referendi sunt; verum valde tamen pauci eorum tam diu obseruati habentur, vt ex obseruationibus de excentricitatibus orbitalium quicquam concludere liceret. Nam si Catalogum Cometarum obseruatorum percurramus, vix vltra octo aut nouem ex hoc genere inueniemus Cometas, qui durante eorum apparitione angulum 70° circa Solem descripserint, et si Cometas ante seculum nostrum obseruatos excludamus, quippe quorum obseruationes omnino incertiores sunt, quam vt inuestigationi excentricitatis inferuire queant, inter huius Seculi Cometas non nisi quatuor vel quinque habentur, pro quibus spes adsit, vt eorum tempus Periodicum ex obseruationibus elici queat. Horum in numero primum sane tuctur locum Cometa Anni 1759; verum quum eius tempus Periodicum iam aliunde satis habeatur cognitum, inutilis foret opera, quae in Temporis huius Periodici inuestigatione ex obseruationibus deducenda adhiberi posset. Interim quum huius Cometae adsint obseruationes interuallo quinque mensium inter se distantes; nullus dubito, quin earum ope tempus Periodicum, saltem valde prope determinationem admittat.

§. 10. Cometa, qui Anno 1770 apparuit, cum pluribus nominibus attentionem Astronomorum mereatur, tum eo praecipue, quod a primo tempore suae apparitionis die 14 Iunii vsque ad vltimam eius obseruationem die 2 Octobris factam, circa Solem descripserit angulum 170° maiorem, vnde sane tanto maiorem spem fouere licet, orbitae eius ellipticae determinationem, successu haud esse carituram. Huic autem spei hoc ipso insigne accedit incrementum, quod Elementa quae a pluribus Astronomis pro motu huius Cometae in orbita Parabolica inventa fuerint, cum obseruationibus conciliari nulla ratione potuerint. Scilicet Elementa quibus obseruationes a die 14 Iunii vsque ad 29 Iunii, satis exacte implentur; non solum ab obseruationibus die 30 Iunii atque 1 et 3 Iulii institutis vehementer abludunt; sed quod principale hac in quaestione est, nec melius cum obseruationibus secundae apparitionis a 2 Aug. vsque ad 2 Octobris institutis, conciliari possunt. Et vicissim si quaeratur orbita parabolica, quae obseruationibus mense Augusti factis salisfaciat, illa non modo ab obseruationibus mense Iunii institutis, sed etiam illis, quae mense Septembris factae habentur, vehementer dissentiens reperietur. Tum denique orbita Parabolica, quae obseruationibus mense Septembris satisfecerit, admodum a reliquis praecedentibus differet, quemadmodum hoc a Celebris Astronomo Vpfaliensi *Prosperin*, in Commentario de motu Cometae Anni 1770, Tomo II. Nouor. Actorum Societ. Vpfaliensis inserto, euidenter comprobatum est.

§. 11. Quum igitur his rationibus valde probabile redderetur, orbitam huius Cometae non solum a figura Parabolica abludere, sed etiam excentricitatis quantitatem per obseruationes adeo inter se diffitas, concludi posse; operae pretium mihi visum est, huius Cometae motum in orbita Elliptica computare, cuius inuestigationis breuem delineationem

nem Lectoribus Astronomiae curiosis, iam tradere animus est. Ante omnia igitur ne frustraneum prorsus susciperem laborem, primum tentamine facto ipse explorare constitui, an non orbita Parabolica inueniri posset, quae tribus observationibus huius Cometae satisfaceret, quarum binae. quantum fieri posset, vtrunque a Perihelio erant remotae, tertia vero prope ipsum tempus Perihelii instituta; at mox perspexi huiusmodi orbitam Parabolicam nulla ratione inueniri posse. Computum igitur huius Cometae in orbita Elliptica adgressurus, praeprimis mihi cogitandum erat de eligenda Methodo, huic instituto apta, existimaui autem vix aliam pro praesenti ratione commodiorem eligi posse, quam illam cuius ideam exhibuit Illust. *Eulerus* in III. Parte egregii sui Operis de Cometa A. 1769. Consistit vero haec Methodus in eo, vt si inter Elementa Cometae, positio nodi et inclinatio orbitae proxime saltem habeantur cognita, reliqua eius Elementa ope trium observationum determinantur. Primum enim ex datis loco nodi et inclinatione orbitae, pro vnoquoque loco Cometae Geocentrico, inueniri potest elongatio Cometae heliocentrica a Nodo, vti etiam distantia eius a Sole, idque siue ea ratione, quam Illust. *Eulerus* loco modo citato tradidit, siue etiam ope formularum, quas exposui in Schediasmate huic Volumini Actorum inserto de loco Heliocentrico Cometae ex Geocentrico deducendo. Inuentis vero sic tribus elongationibus a Nodo, vna cum distantibus a Sole ipsis respondentibus, per formulas ab Illust. *Eulero* traditas, inueniuntur parameter orbitae, excentricitas, elongatio Perihelii a Nodo, tumque demum ipsum tempus Perihelii. quod tempus ex tribus observationibus deriuatum, idem prodire debet, si longitudo Nodi et inclinatio orbitae rite fuerint determinata; sin vero hoc minus eueniat, per falsas positiones detegatur, quantum

locus Nodi et inclinatio immutari debeant, vt perfectus prodeat consensus.

§. 12. Pro hoc autem instituto eo magis conducebat, hanc adhibere Methodum, quod valores pro positione Nodi et inclinatione orbitae Elementis Parabolicis accommodatae, licet prorsus verae non essent, nec tamen enormiter a veritate abluere posse viderentur. In primo igitur a me instituto calculo, tres hypotheses pro loco Nodi et inclinatione orbitae adhibui, ita comparatas:

	I.	II.	III.
Locus Nodi Descend.	$10^{\circ}.15^{\circ}.50'$	$10^{\circ}.15^{\circ}.20'$	$10^{\circ}.15^{\circ}.50'$
Inclin. orbitae	$1^{\circ}.45'.0''$	$1^{\circ}.45'.0''$	$1^{\circ}.44'.30''$

tumque facta combinatione observationum die 15 Iunii et 2 Augusti institutarum, cum illis quae 29 Sept. 1 et 2 Octobr. factae sunt, inueni sumto medio trium conclusionum, pro correctione Longitudinis Nodi 2' Min. prima et pro correctione inclinationis 5 Min. prima, vtramque correctionem diminutivam. Verum quum hae correctiones ultra hypotheses assumptas caderent, facile perspexi eas valde esse posse erroneas; ideoque ex hoc primo calculo nihil aliud concludere mihi licuit, quam quod Longitudo Nodi proxime circa $10^{\circ}.13^{\circ}$. subsisteret,

§. 13. Deinde vero facile perspexi, modo pro hoc Cometa cognita fuerit Longitudo Nodi, ex ipsis observationibus inclinationem orbitae deduci posse; hunc enim in finem adhibeantur observationes illis diebus institutae, quibus probabiliter colligi potest terram in ipsa linea Nodorum versatam fuisse; quo enim tempore terra per lineam Nodorum transit, planum quod per centra Solis, terrae et cometae transit, ipsum planum orbitae constituet, eiusque igitur inclinatio ad

ad Eclipticam inuenietur ope elongationis apparentis Cometae a Sole e terra visae, et Latitudinis Geocentricae. Hac igitur ratione pro locis Nodi constitutis, inclinationes crunt, vt sequens Schema declarat:

Loc. ☿	Inclin. obseru.
10 ^s . 16° 14' 50"	1° 48' 9"
15. 28. 26	44. 37
14. 30. 6	41. 25
13. 32. 56	39. 23
12. 34. 24	34. 59

Hinc igitur in sequenti calculo meo, quatuor his vsus sunt hypothefibus:

I.	II.	III.	IV.
Long. ☿ = 10 ^s . 16°;	10 ^s . 15°;	10 ^s . 14°;	10 ^s . 13°
Inclin. orb. = 1° 47';	1° 44';	1° 41';	1° 38'

quibus adhibitis varias institui combinationes, primum obseruationum diebus 15 Iunii, 2 Aug. 1 Octob. institutarum, deinde obseruationum diebus 2 Aug. 14 Aug. 10 Octob., tum obseruationum diebus 15 Iunii, 14 Aug. 1 October factarum, ex quibus liquido mihi constitit maximum consensum pro Tempore Perihelii oriri, si locus Nodi statuatur 10^s. 13°. Sic ex vltima harum combinationum, tres adhibitae obseruationes pro quatuor nostris hypothefibus, temporis Perihelii sequentes praebent valores:

I. 11, 6882 Aug.	12, 2369	12, 7288	12, 4916
II. 8, 7149	10, 3736	11, 6270	12, 2873
III. 5, 3236	7, 6547	9, 7737	11, 0194

Hinc igitur nouo argumento confirmatum est, Longitudinem Nodi 10^s. 13° non excedere, quin potius hac quantitate aliquanto esse minorem.

§. 14. Quum iam aliquatenus de loco Nodi probabilis coniectura formari potuerit, denuo quatuor hypothesefes considerandas duxi, inter quas hic locus certo contineri debebat, pro singulis autem binas adhuc hypothesefes circa inclinationem orbitae vno minuto primo inter se discrepantes; quippe quum ex obseruationibus satis patefceret, loco Nodi bene constituto, incertitudinem circa inclinationem orbitae vnum minutum primum non excedere posse. Hae autem octo hypothesefes se habebant, vti sequens Schema indicat:

Loc. ☿	10°. 14°;	10°. 13°;	10°. 12°;	10°. 11°
Incl. orb.	1°. 40';	1°. 36'. 40'';	1°. 33'. 20'';	1°. 30'. 0''
	1°. 41';	1°. 37'. 40'';	1°. 34'. 20'';	1°. 31'. 0''

His itaque hypothesibus constitutis, combinationes obseruationum inter se duorum generum, institui. Primum enim obseruationes prima huius Cometae apparitione, mense Iunii factas, cum illis comparandas duxi, quae partim proxime circa ipsum tempus Perihelii, tumque versus vltimum tempus apparitionis, diebus 29 Sept. 1 et 2 Octob. factae erant; facile enim perspexi ex combinatione harum obseruationum maxime tutas et certas conclusiones de Elementis Cometae formari posse, quum portio orbitae circa Solem interea descriptae respondeat angulo anomaliae 170° excedenti. Combinationes autem obseruationum ex quibus conclusiones derivatas infra adducere constitui, numero decem habebantur sequentes:

I.	15 Iunii,	10 Aug.	1 Octob.
II.	15 - -	10 (β)	1 - -
III.	15 - -	14 -	1 - -
IV.	15 - -	12 -	1 - -
V.	15 - -	11 -	1 - -
VI.	15 - -	11 -	2 - -

VII.	17	Iunii,	11	Aug.	2	Octob.
VIII.	15	-	-	28	-	2 - -
IX.	29	-	-	28	-	2 - -
X.	22	-	-	19	-	29 Septemb.

§. 15. Vtunque autem certae esse possent conclusiones, ex combinationibus allatis deductae, tamen contra illas, id moueri poterat dubium, quod motus Cometae circa finem mensis Iunii et initium Iulii, dum Cometa in vicinia telluris versabatur, aliquam fortassis perturbationem ab actione telluris sit perpeffus, ita vt portio orbitae, quam durante secunda apparitione descripserit Cometa, non prorsus respici debeat, tamquam continuatio orbitae in prima apparitione descriptae. Ne igitur istud dubium moram hoc in negotio facefferet, obseruationum durante secunda apparitione factarum, combinationes quoque institui decem sequentes :

I.	7	Aug.	26	Aug.	1	Octob.
II.	7	-	28	-	1	- -
III.	11	-	28	-	2	- -
IV.	11	-	26	-	2	- -
V.	12	-	26	-	1	- -
VI.	12	-	26	-	2	- -
VII.	10	-	26	-	29	Septemb.
VIII.	10	-	28	-	29	- -
IX.	7	-	31	-	1	October.
X.	7	-	31	-	29	Septemb.

Licet autem conclusiones ex his combinationibus deductae, non aeque bene inter se consentirent, ac illae quae ex prioribus erant elicited, tamen hic dissensus maior non reperiabatur, quam vt harum conclusionum ope, tam I ongitudo Nodi, quam inclinatio orbitae, quorum Elementorum examen, *Acta Acad. Imp. Sc. Tom. I. P. I.* X x hoc

hoc calculo mihi imprimis erat propositum, sufficienti cum exactitudine determinarentur.

§. 16. Antequam vero conclusiones ex vtriusque generis combinationibus deductas, adferam, primum specimine quodam illustrare conueniet, quem in modum ad eas perductus sum. Sit igitur proposita combinatio nostrae prioris classis prima, pro qua ex nostris hypothesebus, tres observationes dierum 15 Iunii, 10 Aug. et 1 Octob., sequentes dant pro tempore Perihelii expressiones:

Positis quatuor hypothesebus prioribus:

I. 12, 2894 Aug.	13, 0808	13, 7523	14, 5136
II. 11, 5670	12, 7611	13, 7624	14, 6295
III. 10, 6453	12, 5489	14, 4316	16, 1312

Adhibitis quatuor hypothesebus posterioribus:

I. 11, 3363 Aug.	12, 2061	13, 0018	13, 6140
II. 10, 3628	11, 7964	12, 7118	13, 8347
III. 10, 9063	12, 5269	14, 3821	16, 1056

Ex inspectione horum numerorum mox liquet, pro tempore Perihelii valores maxime consentientes cadere inter hypotheseb secundam et tertiam, et calculo exactius instituto, quum pro his hypothesebus sint Longitudines ϑ 10°. 13°, 10°. 12°, quibus in prioribus respondent inclinationes orbitae 1°. 36'. 40'', 1°. 33'. 20'' et in posterioribus 1°. 37'. 40''; 1°. 34'. 20''; inuenietur perfectum fere consensum oriri, si Longitudo ϑ supponatur 10°. 12°. 18', inclinatione existente 1°. 34'. 0''. Deinde autem reliqua Elementa pro nostris hypothesebus determinata, ita corrigenda sunt, vt his valoribus loci Nodi et inclinationis accommodentur. Similis ratio est cum determinatione Elementorum pro combinationibus secundae classis, quarum igitur specimen heic adferre, non nimis e re est.

§. 17.

§. 17. Sequitur nunc vt conclusiones ex nostris combinationibus deductas ob oculos ponamus, quod sequentibus binis Tabulis commodissime fiet, quarum prior conclusiones prioris classis, posterior secundae classis sequelas exhibet:

Elementa Cometae anni 1770 ex decem combinationibus prioribus deducta:

	Long. ☿.	Inclin.	Perihel. a ☿.	Log. Se miparam.	Log. Diff. Perihel.	Long. Ex. centricit.	Temp. Period.	Temp. Perihel.
I.	4 ^s . 12 ^o . 18 ^u	1 ^o . 34 ^l . 0 ^u	44 ^o . 6 ^l	0,0810	9,8295	9,8946	5,6 An.	13,88
II.	12. 3	33. 50	44. 19	0,0805	9,8308	9,8905	5,3	13,95
III.	11. 59	34. 0	44. 23	0,0808	9,8302	9,8925	5,4	13,85
IV.	11. 52	33. 30	44. 29	0,0804	9,8308	9,8902	5,3	13,90
V.	12. 10	33 20	44. 10	0,0800	9,8315	9,8881	5,3	14,00
VI.	12. 25	33. 40	44. 4	0,0805	9,8316	9,8885	5,2	14,18
VII.	12. 25	33. 40	43. 59	0,0804	9,8316	9,8884	5,2	14,13
VIII.	12. 50	34. 40	43. 36	0,0815	9,8290	9,8970	5,8	13,66
IX.	12. 54	35. 10	43. 25	0,0814	9,8284	9,8980	5,8	13,37
X.	11. 42	34. 20	44. 35	0,0805	9,8292	9,8941	5,5	13,57
Med.	4. 12. 18	1. 34. 0	44. 7	0,0807	9,8303	9,8923	5,4	13,85

Elementa eiusdem Cometae ex decem combinationibus

nostris posterioribus deducta:

	Long. ☿.	Inclin. orbit.	Perihel. a ☿.	Log. Se miparam.	Log. Diff. Perihel.	Log. Ex. centricit.	Temp. Period.	Temp. Perihel.
I.	4 ^s . 12 ^o . 18 ^u	1 ^o . 34 ^l . 30 ^u	43. 37 ^l	0,0789	9,8280	9,8932	5,4 An.	13,25
II.	12. 17	34. 20	44. 0	0,0806	9,8291	9,8946	5,5	13,58
III.	12. 36	35. 20	42. 54	0,0764	9,8272	9,8893	5,2	12,80
IV.	12. 42	35. 40	42. 58	0,0770	9,8267	9,8918	5,3	12,70
V.	12. 6	35. 40	43. 4	0,0749	9,8259	9,8888	5,1	12,30
VI.	12. 24	36. 40	42. 26	0,0727	9,8245	9,8870	5,0	11,60
VII.	12. 16	33. 50	44. 18	0,0821	9,8319	9,8916	5,4	13,80
VIII.	12. 12	33. 40	44. 17	0,0814	9,8297	9,8950	5,6	13,95
IX.	12. 18	34. 40	43. 16	0,0768	9,8274	9,8898	5,2	12,98
X.	12. 10	34. 10	44. 15	0,0817	9,8294	9,8964	5,7	13,71
Med.	4. 12. 20	1. 34. 5	43. 31	0,0782	9,8280	9,8912	5,3	13,07

§. 18. Antequam calculum inirem, cuius subsidio haec elementa inuenta sunt, probabili quidem coniectura assequi poteram, orbitam Cometæ fatis sensibilibiter a figura Parabolica differre, minime tamen mihi persuadere ausus fuisssem, vt pro tempore Periodico valorem adeo inexpectatum, ne dicam incredibilem prorsus, inuenirem. Mirum certe vnicuique videri debet, Cometam cuius tam breue sit tempus resolutionis, Astronomorum hucusque adeo effugisse attentionem, vt non nisi vnica vice Anno 1770 obseruari potuerit; vtcunque autem grauis hinc oriatur dubitandi ratio, ex altera parte fatendum est, vix fieri posse, vt dum ex tam variis obseruationibus, modisque adeo diuersis inter se comparatis, pro tempore Periodico elicuerimus conclusiones valde inter se conspirantes, istae conclusiones prorsus erroneae sint et omni verisimilitudine destituantur. Siquidem autem hoc esset, ipsae obseruationes grauissimorum errorum incusari deberent, quod quum pleraeque earum saepius repetitae habeantur, et ab Astronomo solertissimo institutae sint, omnino ne suspicari quidem fas est.

§. 19. Elementa ex decem prioribus combinationibus elicitæ, tam egregie inter se consentiunt, vt vix maior consensus desiderari debeat, vnde his Elementis tanto certior conciliatur fides; hunc autem consensum inde potissimum deriuandum esse censemus, quod portio orbitae, quae heic in computum venit, valde magna sit, dum adeo 170° anomaliae complectatur; vnde omnino fieri necesse est, vt omnes valores parametri, excentricitatis et reliquorum Elementorum, cum tanto maiori exactitudine elicitaë fuerint. Praeterea ipsa Methodus, qua per falsas positiones, veri valores pro loco Nodi et inclinatione orbitae determinantur, hoc in casu rite procedit; quia diuersis hypothesibus propositis, Longitudinum Nodi et inclinationum orbitae, secundum progressionem Arithmeticam procedentium, etiam Ele-

Elementa orbitae his hypothefibus accommodata fere fecundum progressionem Arithmeticam procedunt; ita vt fi exacte cognoscantur locus Nodi et inclinatio orbitae, reliqua Elementa his conformiter, faltem fine metu sensibilis erroris, determinentur. Sic quum pro combinatione noſtra claffis prioris quarta, hypothefes quatuor priores pro Log. Semiparametri dent valores fequentes:

0,0880654; 0,0839740; 0,0798597; 0,0757719
qui proxime progressionem Arithmeticam fequuntur; facile perfpicitur pro Longitudine Nodi $10^{\circ} 11'. 30''$ et inclinatione orbitae $1^{\circ} 35'. 0''$, quae positio hypothefibus fecundae et tertiae, praecife medio interiacet, fine fenfibile errore Logar. Semiparametri ftatui poffe $= 0,0819168$.

§. 20. Quoniam vis Methodi noſtrae in eo confiftit, vt illi valores pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae veritati conformes effe cenſeantur, quibus adhibitis expreffiones pro tempore Perihelii ex tribus obſervationibus deductae prorfus redduntur conſpirantes; dubium vtique videri poffet, an haec Methodus rite adhibeatur, iis in caſibus, dum Cometa tam prope ad tellurem accedit, vt ob actionem telluris motus Cometae aliquantam ſubire potuerit perturbationem; tum enim fieri poteſt, vt illae obſervationes, quae huic perturbationi anteriores ſunt, aliud exhibere debeant tempus Perihelii, quam obſervationes, quae perturbatione iam ceſſante factae ſunt; verum tamen quum haec perturbatio eius effe poſſit indoles, vt tam diu motum Cometae tantum afficiat, ac actio telluris in eum ſenſibilis ſit, cacterumque Cometae loca ante et poſt hanc perturbationem vix ſenſibili modo differre poſſint, ab illis, in quibus Cometa verſaretur, ſi actio telluris nulla eſſet; fieri vtique poteſt, vt tempus Perihelii ex vtriuſque generis obſervationibus non multum reperiatur discrepans. Dein-

de quum calculo hoc suscepto nondum euidenter esse potuerimus conuicti, Cometam hunc a Tellure aliquam perturbationem passum fuisse, calculus noster saltem inferuiet ad ostendendum quaenam locum haberent Elementa, si perturbatio ista prorsus nulla esset. Denique si ex Elementis nostris, per decem combinationes posteriores determinatis, reperiantur pro loco Nodi et inclinatione orbitae, valores eodem modo determinati, ac in Elementis prioribus; Elementa ista priora, saltem pro valoribus semiparametri, Excentricitatis et tempore Periodico, proxime veritati erunt consentanea. Et quod praeprius ultimum hoc Elementum attinet, modo innotuerit, valores pro loco Nodi et inclinatione orbitae inter Hypotheses nostras secundam et tertiam reperiri, calculi isti priores declarabunt quibus limitibus hoc tempus Periodicum comprehenditur.

§. 21. Elementa ex decem combinationibus nostris posterioribus elicitā, non quidem aeque bene inter se conspirant, ac illa quae ex prioribus combinationibus deducuntur; nec tamen eorum dissensus tantus est, ut impedire queat, quin media ex his Elementis sumpta proxime veritati consentanea habeantur. Quod autem hic maiores discrepantiae prodierint, fieri necessum erat, quia portio orbitae inter observationes in his combinationibus adhibitas, angulum anomaliae vix 90° gradibus maiorem excipiat; indeque etiam fit, ut valores semiparametri, Excentricitatis et reliquorum Elementorum, qui in his calculis pro singulis hypothesibus reperiuntur, non amplius in progressionē Arithmetica procedant, ita ut nostra procedendi ratio pro determinandis Elementis, pro casu praesenti tantam exactitudinem non praebet ac pro prioris generis combinationibus. Sic ex: causa pro combinatione huius classis prima, quatuor hypothesēs priores dant hos pro semiparametro Logarithmos:

0,0854290; 0,0855435; 0,0823411; 0,0774660,
qui multum a progressionem Arithmetica abludunt. Fieri
igitur utique potest, ut valores reliquorum Elementorum,
in nostra Tabula valoribus loci Nodi et inclinationes accom-
modati, non prorsus exacte se habeant, et licet forsan
quodam artificio interpolatio huic instituto accommodata
inueniri potuerit; tamen hanc operam suscipere minime
necessarium duximus, quia hisce calculis nihil amplius in-
tendimus, quam ut pro loco Nodi et inclinatione orbitae
valores proxime veros detegeremus. Huius autem voti
compotes nos factos fuisse, vix dubium esse potest, si per-
pendatur omnem incertitudinem quae circa locum Nodi,
se prodit, in prioribus calculis vix vnum gradum super-
gredi, in posterioribus autem 36 minuta prima non exce-
dere; unde tuto colligi posse videtur medios valores allatos,
haud ultra 5, aut ad summum 10 minuta prima, esse incertos.
Idem iudicium de valoribus pro inclinatione orbitae locum
habet, ubi in prioribus calculis summa discrepantia est
1'. 50" et pro posterioribus 3 minutorum; caeterum si se-
mel locus nodi bene constitutus fuerit, inclinatio orbitae
ex ipsis observationibus colligi potest, uti mox ostendemus.

§. 22. Vtcumque autem minus exacte determinata
haberentur reliqua Elementa ex decem posterioribus com-
binationibus deriuata, id tamen dubium valores Temporis
Periodici vix tangit; quippe quum pro diuersis hypothesi-
bus, hi valores non admodum discrepantes reperiantur; sic pro
combinatione prima huius classis, quatuor priores hypothe-
ses, pro Tempore Periodico sequentes dant valores:

Anni 7, 5; 6, 8; 5, 6; 4, 6,

quatuor autem posteriores: 3, 3; 4, 2; 4, 2; 3, 8.

Eadem ratione combinatio sexta, hos praebet valores octo
hypo-

hypothefibus accommodatos: 6, 1; 7, 0; 6, 8; 6, 4,
4, 7; 5, 5; 5, 8; 5, 6.

Hinc igitur patet, modo locus Nodi et inclinatio proxime innotescant, de Tempore Periodico vix vllum esse dubium. At haec iterum Elementa tanto certius determinabuntur, quo maiores adfunt differentiae inter expreffiones pro tempore Perihelii fingulis hypothefibus accommodatas, id quod denuo exemplo combinationis primae illustrabimus:

Exprefiones pro tempore Perihelii:

ex obferuatione

- I. Aug. 12, 6028; 13, 4652; 14, 0339; 14, 3931
- II. 10, 7176; 12, 6823; 14, 1755; 15, 3772
- III. 9, 4561; 12, 3959; 14, 6165; 16, 3997

et ex quatuor hypothefibus posterioribus:
per obferuationem

- I. Aug. 6, 1773; 10, 3918; 11, 8805; 12, 8235
- II. 6, 6760; 10, 2983; 12, 4281; 13, 9736
- III. 0, 5657; 8, 8989; 12, 1642; 14, 5065

ex quibus omnino liquet, positionem veritati consentaneam inter hypothefem fecundam et tertiam reperiri.

§. 23. Supposito igitur quod Longitudo Nodi defcendentis fit $10^{\circ} 12'. 20''$, ex calculis noſtris inclinatio orbitae inter $1^{\circ} 34'$ et $1^{\circ} 34'. 50''$ contineri videbatur; vt vero adhuc certiores de hoc Elemento euaderemus, per Methodum §. 13. deſcriptam, explorare conſtituimus, quae-
nam inclinatio propoſitae Longitudini Nodi reſponderet. Hunc in finem adhibuimus obſeruaciones diebus 3 et 4 Auguſti inſtitutas, tumque inuenimus, propoſitis locis terrae, inclinationes planorum per Solem, Terram et Cometam tranſeuntium, ſe habere vt ſequitur:

Long.

Long. terrae.	Inclin. Plani.	Hinc pro Long. terrae.
Pro 3 Aug. $10^{\circ} 11' 39''.36''$	$1^{\circ} 31' 40''$	$10^{\circ} 12' 20'$ Inclination.
$11. 39. 47$	$1. 31. 58$	$1^{\circ} 35'. 5''$
Pro 4 Aug. $12. 34. 45$	$1. 36. 16$	$1. 34. 13$
$12. 35. 25$	$1. 36. 31$	$1. 34. 18$
$12. 36. 3$	$1. 36. 47$	$1. 33. 54$
$12. 36. 35$	$1. 35. 6$	$1. 35. 10$
$12. 37. 39$	$1. 35. 29$	$1. 35. 22$
		$1. 35. 36$
		$1. 33. 53$
		$1. 34. 11$

Med. 1. 34. 37

Vbi valores inclinationis allati per interpolationem observationum diebus 3 et 4 Aug. factarum, singulas binas earum inter se combinando, eliciuntur. Nunc itaque satis tuto concludere posse existimauimus, inclinationem orbitae, quae loco Nodi $10^{\circ} 12' 20''$ respondet, sine sensibili errore statui posse $1^{\circ} 34' 30''$, quibus ideo Elementis deinde in reliquis calculis vsi sumus.

§. 24. Postquam bina Elementa, pro situ plani in quo Cometa motum suum peragit, fuerint determinata, ad indaganda reliqua elementa, quae ipsam naturam orbitae in isto plano descriptae respiciunt, Methodis ab illa, qua haecenus vsus eram, paulo diuersis, vtendum esse existimaui; cognitis nimirum binis Elementis modo dictis, binae sufficient observationes ad reliqua Elementa inuestiganda. Pro hoc igitur instituto, primum observationes ab initio primae apparitionis nostri Cometae factas, cum illis quae diebus 29 Sept. 1 et 2 Oct. institutae sunt, comparandas esse censeui. Quum itaque ex Longitudine Nodi et inclinatione orbitae cognitis, pro vnaquaque Cometae observatione, eius elongatio a Nodo et distantia a Sole facili computo eliciatur; iam binas adhibendo observationes, habebimus cognita differentiam anomaliarum, vt et distantias

tias a Sole, quare si insuper distantia Perihelii fuerit data, ipsa orbita Cometae perfecte habebitur determinata; tum autem si haec distantia Perihelii non prorsus exacte fuerit supposita, eius correctio ita instituenda est, ut tempus Perihelii ex binis observationibus, idem prodeat. Potuisset quidem aliud quoque elementum orbitae heic pro cognito assumi, verum praesens quidem casus praeprimis requirere videbatur, ut distantia Perihelii eligeretur, siquidem observationes, quae inter se comparantur, vtrinque fere 90° a Perihelio distitae sunt.

§. 25. Deinde comparisonem instituendam esse existimaui, observationum prope ipsum tempus Perihelii factarum, cum illis quae diebus 29. Sept. 1 et 2 Octob. institutae sunt; ubi quum iterum pro binis locis Cometae, haberentur distantiae a Sole et angulus illis interceptus, si insuper Excentricitas cognoscatur, orbita Cometae omnino erit determinata. Heic autem excentricitatem praecipue pro Elemento cognito habendam censui, quia neque Semiparameter nec distantia Perihelii, cum aliquo commodo pro cognitis haberi possent. Nam in observationibus prope Perihelium factis, distantia Cometae a Sole parum a distantia Perihelii differt, tumque iterum pro angulis anomaliae ad 90° vergentibus distantia a Sole cum semiparametro redditur congruens; unde si in observationibus minimi errores sint commissi, insignes producere poterunt aberrationes, si Elementum pro cognito habeatur, quod proxime consentit cum illis, quae per observationes habentur data. Caeterum alia occasione, harum disquisitionum enucleationem in his actis proponere licebit, nunc quidem fuisse brevem earum ideam, nostro proposito convenientem tradidisse.

§. 26. Quoniam valde operosum fuisset, si calculos iuxta Methodos iam commemoratas ad finem perduxissem, pro

pro meo instituto sufficere existimaui, si vtriusque generis calculos inter se compararem, vt ea ratione valores proxime veros, pro Elementis orbitae, semiparametro, distantia Perihelii et elongatione Perihelii a Nodo elicerem. Quum igitur in calculis posterioris generis, binis hypothefibus excentricitatis, eorum Logarithmis existentibus 9,887; 9,897, vsus fuiffem et ex octodecim combinationibus, hos pro distantia Perihelii eliciuiffem Logarithmos:

I. Hyp.	II. Hyp.	I. Hyp.	II. Hyp.
9,8310	9,8311	9,8308	9,8306
9,8310	9,8311	9,8282	9,8280
9,8310	9,8311	9,8282	9,8280
9,8317	9,8318	9,8310	9,8311
9,8310	9,8309	9,8310	9,8311
9,8310	9,8309	9,8284	9,8283
9,8284	9,8283	9,8284	9,8283
9,8284	9,8283	9,8299	9,8305
9,8308	9,8306	9,8299	9,8305

medio sumto pro vtraque hypothefi Logarithmus distantiae Periheliae inuenietur 9,8300, quem igitur faltem haud multum erroneum vel inde concludere potui, quia immediate pro obferuationibus diebus 11, 12 et 14 Aug. id est proxime circa tempus Perihelii institutis, habeantur Logarithmi distantiarum Cometae a Sole 9,8289; 9,8312; 9,8311; ita vt Logarithmus distantiae Periheliae certe inter hos limites 9,829 et 9,831 concludatur. In prioribus igitur calculis, quum binae effent constitutae hypothefes pro distantia Perihelii, Logarithmis existentibus 9,829 et 9,830; nunc adhibendos esse censui angulos anomaliarum quae obferuationibus d. 29 Sept. 1 et 2 Octob. factis ex posteriori hypothefi responderent, quorum fequentes habebantur valores:

pro 29 Sept.	pro 1 Octob.	pro 2 Octob.
80°. 22'. 16"	81°. 58'. 27"	82°. 25'. 13"
80. 24. 36	82. 2. 2	28. 54
80. 20. 51	81. 56. 1	22. 45
Med. 80. 22. 34	81. 54. 30	21. 17
	Med. 81. 57. 43	82. 24. 32

§. 27. Hinc pro Logarithmo semiparametri, posito Logarithmo distantiae Periheliae 9, 830 ex prioris generis calculis sequentes habentur valores :

0,0812	0,0814	0,0811	0,0811
0,0812	0,0808	0,0809	0,0803
0,0813	0,0813	0,0810	0,0814
0,0814	0,0812	0,0805	0,0806
0,0814	0,0811	0,0804	0,0810

ex quibus medius est 0,0810. Tum vero adhibitis pro 29 Sept. 1 et 2 Octob. anomalis supra allatis, calculi posterioris generis pro Logarithmo semiparametri valores praebent sequentes :

29 Sept.	1 Oct.	2 Oct.
0,0810	0,0806	0,0806
	0,0805	0,0807
	0,0806	0,0813
	0,0814	0,0806
	0,0808	0,0810
	0,0816	0,0809
	0,0810	

inter quos medius valor est 0,0809.

§. 28. Deinde pro invenienda elongatione Perihelii a Nodo, iterum duplici argumento vti sumus, primum etenim in calculis prioris generis, elongationes locorum Cometae a Nodo, pro observationibus dierum 15, 17, 22 et 29 Iunii, comparaui cum angulis anomaliarum ex calculo deductis; subtracta scilicet elongatione Cometae a Nodo ab anomalia, remanebit elongatio Nodi a Perihelio; conclusiones hoc modo inuentas sequens Schema indicat :

Elong.

Elong. Com.	pro ^o 15 Iunii.	17 Iunii.	22 Iunii.	29 Iunii.
a ☿:	46°. 17'. 45"	44°. 47'. 54"	40°. 42'. 14"	34°. 12'. 7"
Anom:	90. 23. 8	88. 49. 14	84. 41. 13	78. 8. 30
	90. 22. 53	88. 50. 18	84. 42. 12	78. 9. 38
	90. 21. 56	88. 50. 41	84. 43. 26	
	90. 20. 56	88. 51. 34	84. 40. 41	
	90. 26. 51	88. 48. 27	84. 47. 47	
	90. 21. 30	88. 55. 39		
	90. 20. 29			

Hinc eliciuntur pro elongatione ☿ a Perihelio isti valores:

44°. 5'. 23"	44°. 1'. 20"	43°. 58'. 59"	43°. 56'. 23"
5. 8	2. 24	43. 59. 58	43. 57. 31
4. 11	2. 47	44. 1. 12	
3. 11	3. 40	43. 58. 27	
9. 6	0. 33	44. 5. 33	
3. 45	7. 45		
2. 44			

inter quos^{us} medius valor est circiter 44°. 2'. 30", quem tamen iusto maiorem esse existimamus. Ex secundi generis calculis, posito quod anomaliae pro 29 Sept. 1 et 2 Oct. supra determinatae rite se habeant, primum invenientur anomaliae pro observationibus dierum 10, 11, 12, 14, 15 etc. Aug., siue proxime circa ipsum tempus Perihelii factis; tum vero datis quoque Elongationibus Cometae a nodo, quae his observationibus competunt, habebuntur valores pro elongatione Perihelii a nodo sequentes:

10 Aug. 44°. 0'. 32"	11 Aug. 44°. 1'. 55"	14 Aug. 44°. 1'. 4"	19 Aug. 44°. 0'. 42"
44. 1. 53	44. 0. 40	44. 0. 30	44. 1. 53
		44. 1. 53	
10 Aug. (β) 44. 0. 34	12 Aug. 44. 0. 42		
44. 1. 53	44. 1. 53	15 Aug. 44. 0. 40	
Y y 3		inter-	

inter quos valor medius est circiter $44^{\circ}.1'.12''$, quem iam propius ac priorem ad veritatem accedere, eo magis persuasi sumus, quod valores ex quibus elicitus est, multo melius inter se conspirent, ac illi quorum ope priorem deduximus.

§. 29. Si Logarithmus semiparametri statuatur 0,0810 et Logarithmus distantiae Periheliae 9,830, fiet Logarithmus excentricitatis 9,8934; caeterum ex calculis nostris prioribus pro hypothese secunda ubi Logarithmus distantiae Periheliae = 9,830, medio ex viginti conclusionibus sumto, habebitur Logarithmus excentricitatis 9,8937, qui certe cum priori egregie consentit, ideoque calculis nostris confirmandis inseruit. Interim tamen omnes has conclusiones supra adductas, de valoribus Semiparametri, distantiae Periheliae et elongationis Perihelii a Nodo, uti approximationes tantum ad veritatem considerandas esse censeui, earumque debitas correctiones inueniri posse, dum modi tententur, quibus observationes tam mense Iunii, quam mense Augusti et diebus 29 Sept. 1 atque 2 Octob. ita reddantur consentientes, ut idem praebant tempus Perihelii.

§. 30. Primis igitur tentaminibus hunc in finem institutis, supposui Logarithmos distantiae Periheliae et Semiparametri, uti modo inuentae sunt, tumque inueni observationibus mense Iunii et ad finem secundae apparitionis factis, simul satis bene satisfieri, si ponatur elongatio Perihelii a $28^{\circ}.43'.59''.0''$ et Tempus Perihelii Aug. 13, 75, nec non observationes mense Iunii cum illis, quae circa Perihelium institutae sunt conciliari, posita elongatione $44^{\circ}.1'.0''$ et tempore Perihelii Aug. 13, 80. Verum observationes prope ipsum Perihelii mense Augusti factas, animaduerti non adeo bene cum observationibus ad finem Septembris et initio Octo-

Octobris institutis conciliari, nisi Semiparameter diminuat-
 tur, hinc in vterioribus tentaminibus supposui eius Loga-
 rithmum $= 0,0808$ manentibus valoribus pro Logarithmo
 distantiae periheliae, elongatione Perihelii a Nodo et posi-
 to tempore Perihelii Aug. 13, 75. His Elementis adhi-
 bitis obseruationibus secundae apparitionis a 2 Aug. vsque
 ad 2 Octobris ita quidem satisfieri obseruaui, vt nullibi
 errores obseruationum pro Longitudine $4\frac{1}{2}$ Minuta prima
 excederent; quum tamen hi errores tantum non omnes
 eiusdem essent denominationis, et prope finem Augusti
 maximi euaderent, ad eos diminuendos, multum conducere
 perspexi, si distantia perihelii aliquantum diminueretur.
 Vno igitur et altero tentamine facto, vidi obseruationes
 supra dictas inter se egregie conciliari, si pro Cometa no-
 stro sequentia adhibeantur Elementa:

- I. Long. $\Omega = 4^{\circ} 12'. 20''$
- II. Incl. Orbitae $= 1^{\circ} 34'. 30''$
- III. Log. Semipar. $= 0,0808000$
- IV. Log. Distant. Perih. $= 9,8296000$
- V. Log. Excentric. $= 9,8938725$
- VI. Elongat. Perih. a $\Omega = 43^{\circ} 59'. 40''$
- VII. Tempus Perihelii Aug. 13, 6950.

Tempus Periodicum $= 5,4992$ Anni seu proxime $5\frac{1}{2}$ Anni.
 Tum vero erunt Logarithmi semiaxium principalis et con-
 iugatae $0,4935397$; $0,2871698$.

§. 31. His constitutis Elementis, comparationem in-
 ter loca Cometae ex Theoria deducta et obseruata, sequens
 Tabula demonstrat:

Temp.

Temp. med. Parisin.	Long. Com. obseruat.	Long. ex calculo.	Differ.	Latit. obs. Austr.	Differ. a calculo.
Aug. 2.15 ^o . 3.15 ^o	3 ^o . 6 ^o . 2.32 ^o	3 ^o . 6 ^o . 2.57 ^o	+25 ^o	50'. 7"	-37"
15. 39. 12	- - 2. 58	- - 3. 30	+32	50. 21	-45
3.14. 45. 9	- - 25. 15	- - 25. 17	+ 2	53. 36	-48
15. 19. 43	- - 25. 41	- - 25. 52	+11	52. 56	- 3
15. 24. 9	- - 25. 50	- - 25. 56	+ 6	53. 6	-13
4.14. 12. 48	- - 47. 24	- - 48. 25	+1. 1	55. 44	+ 4
14. 21. 52	- - 48. 43	- - 48. 34	- 9	56. 27	-38
14. 38. 22	- - 49. 0	- - 48. 50	-10	56. 36	-44
14. 54. 12	- - 49. 14	- - 49. 5	- 9	56. 46	-53
15. 7. 35	- - 49. 36	- - 49. 17	-19	55. 46	+ 9
15. 33. 8	- - 50. 8	- - 49. 43	-25	55. 59	- 1
5.14. 38. 43	- 7. 13. 51	- 7. 13. 35	-16	59. 17	-37
14. 55. 3	- - 14. 28	- - 13. 53	-35	59. 26	-44
15. 13. 28	- - 14. 21	- - 14. 17	- 4	59. 31	-47
15. 28. 24	- - 14. 43	- - 14. 33	-10	59. 19	-24
6.14. 29. 42	- - 39. 25	- - 39. 9	-16	1 ^o . 1. 18	- 2
14. 45. 26	- - 39. 48	- - 39. 25	-23	- 1. 12	+ 5
15. 0. 5	- - 40. 8	- - 39. 42	-26	- 1. 41	-22
7.14. 49. 19	- 8. 6. 40	- 8. 6. 16	-24	- 3. 35	+ 2
14. 56. 9	- - 6. 50	- - 6. 23	-27	- 3. 48	-10
8.14. 20. 13	- - 33. 29	- - 33. 18	-11	- 6. 36	-54
14. 20. 29	- - 34. 14	- - 33. 18	-56	- 6. 38	-56
14. 51. 12	- - 34. 13	- - 33. 57	-16	- 6. 40	-57
15. 10. 28	- - 34. 49	- - 34. 21	-28	- 6. 43	-59
9.14. 48. 10	- 9. 4. 30	- 9. 2. 38	-1. 52 *	- 9. 33	-1. 48 *
10.14. 14. 27	- - 32. 36	- - 32. 11	-25	- 9. 13	+14
14. 21. 43	- - 32. 42	- - 32. 20	-22	- 9. 13	+15
14. 30. 23	- - 32. 42	- - 32. 32	-10	- 9. 18	+11
14. 39. 32	3. 9. 32. 57	3. 9. 32. 44	-13	1. 9. 24	+ 5
46. 16	- - 32. 17	- - 32. 53	+36	-10. 4	-34

Temp.

Temp. med. Parisin.	Longit. obseruat.	Com. Longitud. ex calculo.	Differ.	Latit. obs. Austr.	Differ. a calculo.
Aug. 10. 15 ^b . 0 ^l . 49 ^u	3 ^o . 9 ^o . 33 ^l . 9 ^u 3 ^o . 9 ^o . 33 ^l . 10 ^u		+ 1 ^u	1 ^o . 9 ^l . 46 ^u	- 15 ^u
19. 55	- - 33. 52	- - 33. 35	- 17	- 9. 27	+ 5
11. 14. 23. 23	- 10. 3. 2	- 10. 2. 20	- 42	- 10. 51	+ 13
31. 49	- - 3. 18	- - 2. 30	- 48	- 10. 55	+ 9
45. 6	- - 3. 54	- - 2. 48	- 1 ^l . 6	- 12. 13	- 1 ^l . 8
54. 20	- - 4. 9	- - 3. 0	- 1. 9	- 12. 12	- 1 ^l . 7
12. 14. 46. 25	- - 34. 48	- - 34. 17	- 31	- 12. 52	- 28
15. 9. 4	- - 35. 52	- - 34. 48	- 1. 4	- 13. 13	- 48
15. 27. 46	- - 35. 56	- - 35. 12	- 44	- 12. 21	+ 6
15. 30. 25	- - 35. 46	- - 35. 16	- 30	- 13. 32	- 1 ^l . 5
14. 14. 37. 29	- 11. 40. 25	- 11. 39. 49	- 36	- 15. 25	- 35
58. 39	- - 40. 45	- - 40. 18	- 27	- 15. 29	- 38
15. 18. 39	- - 40. 40	- - 40. 47	+ 7	- 15. 32	- 40
28. 39	- - 40. 55	- - 41. 0	+ 5	- 15. 38	- 45
15. 15. 43. 33	- 12. 14. 56	- 12. 14. 45	- 11	- 16. 43	- 47
56. 37	- - 15. 26	- - 14. 55	- 31	- 16. 45	- 49
16. 4. 32	- - 15. 56	- - 15. 14	- 42	- 16. 46	- 49
18. 14. 24. 32	- 13. 59. 24	- 13. 58. 24	- 1. 0	- 18. 35	- 19
14. 43. 23	- 14. 0. 5	- - 58. 52	- 1. 13	- 18. 41	- 25
15. 4. 7	- - 0. 57	- - 59. 24	- 1. 33	- 18. 55	- 38
19. 14. 33. 18	- - 36. 3	- 14. 35. 8	- 55	- 19. 18	- 26
14. 57. 41	- - 36. 41	- - 35. 50	- 51	- 19. 28	- 35
26. 15. 39. 38	- 19. 3. 44	- 19. 2. 4	- 1. 40	- 20. 45	+ 12
16. 16. 4	- 4. 4	- - 3. 1	- 1. 3	- 20. 56	+ 1
28. 14. 44. 8	- 20. 19. 42	- 20. 18. 24	- 1. 18	- 20. 55	+ 6
15. 3. 38	- - 20. 40	- - 19. 2	- 1. 38	- 21. 4	- 3
29. 15. 21. 53	- 21. 0. 3	- - 58. 27	- 1. 36	- 20. 5	+ 55
15. 43. 31	- - 0. 38	- - 59. 1	- 1. 37	- 20. 41	+ 19
16. 3. 59	- - 1. 26	- - 59. 34	- 1. 52	- 20. 40	+ 20
16. 25. 17	- - 2. 8	- 21. 0. 11	- 1. 57	- 20. 39	+ 21

Temp. med. Parisin	Longit. Com. obferuat.	Longit. ex calculo.	Differ.	Latit. obf. Aufr.	Differ. a calculo.
Aug. 30. 14 ^h . 48 ^m . 22 ^s	3 ^h . 21 ^m . 39 ^s . 12 ^u	3 ^h . 21 ^m . 36 ^s . 39 ^u	- 2 ^s . 33 ^u	1 ^o . 20 ^m . 56 ^u	+ 0 ^u
15. 6. 15	- - 40. 5	- - 37. 9	- 2. 56	- 20. 58	- 2
15. 26. 31	- - 40. 27	- - 37. 42	- 2. 45	- 21. 0	- 4
31. 14. 38. 25	- 22. 17. 16	- 22. 15. 42	- 1. 34	- 20. 23	+ 26
15. 19. 4	- - 18. 16	- - 16. 33	- 1. 43	- 20. 25	+ 24
Sept. 4. 15. 5. 20	- 24. 52. 41	- 24. 51. 32	- 1. 9	- 19. 23	+ 42
15. 15. 42	- - 53. 11	- - 51. 48	- 1. 23	- 19. 25	+ 40
15. 32. 12	- - 53. 41	- - 52. 16	- 1. 25	- 19. 31	+ 34
- 48. 29	- - 53. 56	- - 52. 42	- 1. 14	- 19. 34	+ 31
16. 11. 28	- - 54. 11	- - 53. 19	- 52	- 19. 53	+ 11
5. 14. 48. 37	- 25. 31. 7	- 25. 29. 34	- 1. 33	- 19. 45	+ 4
15. 2. 43	- - 31. 7	- - 29. 57	- 1. 10	- 19. 43	+ 6
- 14. 55	- - 31. 25	- - 30. 17	- 1. 8	- 19. 44	+ 5
8. 15. 57. 4	- 27. 26. 32	- 27. 25. 35	- 57	- 18. 23	+ 33
16. 5. 45	- - 26. 47	- - 25. 48	- 59	- 18. 24	+ 32
9. 15. 6. 30	- 28. 3. 19	- 28. 1. 44	- 1. 35	- 18. 22	+ 19
- 22. 5	- - 3. 34	- - 2. 10	- 1. 24	- 18. 23	+ 18
- 37. 23	- - 3. 34	- - 2. 34	- 1. 0	- 18. 24	+ 16
10. 16. 26. 23	- - 40. 26	- - 41. 14	+ 48*	- 19. 4	- 40*
14. 14. 16. 26	4. 1. 4. 36	4. 1. 3. 45	- 51	- 16. 18	+ 36
14. 33. 47	- - 5. 17	- - 4. 11	- 1. 6	- 16. 22	+ 32
15. 0. 21	- - 6. 6	- - 4. 54	- 1. 12	- 16. 23	+ 30
- 42. 21	- - 7. 7	- - 5. 59	- 1. 8	- 16. 25	+ 27
17. 15. 53. 3	- 2. 52. 40	- 2. 51. 32	- 1. 8	- 14. 52	+ 51
16. 5. 15	- - 52. 55	- - 51. 49	- 1. 6	- 14. 52	+ 51
- 13. 53	- - 53. 10	- - 52. 2	- 1. 8	- 14. 53	+ 50
18. 15. 30. 16	- 3. 26. 57	- 3. 25. 29	- 1. 28	- 14. 58	+ 23
- 56. 5	- - 27. 27	- - 26. 8	- 1. 19	- 15. 0	+ 21
16. 9. 58	- - 27. 42	- - 26. 27	- 1. 15	- 15. 2	+ 19

Temp.

Temp. med. Parisin.	Longit. Com. obseruat.	Longit. ex calculo.	Differ.	Latit. obs. Austr.	Differ. a calculo.
Sept. 19. 15 ^b . 19 ^l . 4 ^u	4°. 4°. 0 ^l . 32 ^u	4°. 3°. 59 ^l . 6 ^u	- 1 ^l . 26 ^u	1°. 13 ^l . 2 ^u	+ 1 ^l . 54 ^u
- 29. 50	- - 0. 47	- - 59. 21	- 1. 26	- 13. 2	+ 1. 54
20. 15. 33. 45	- - 34. 17	- 4. 32. 57	- 48	- 12. 35	+ 2. 9
29. 15. 23. 51	- 9. 14. 54	- 9. 15. 8	+ 14	- 10. 16	+ 37 ^u
15. 37. 50	- - 14. 54	- - 15. 25	+ 31	- 11. 35	- 42
16. 39. 30	- - 15. 54	- - 16. 39	+ 45	- 10. 53	- 1
Oct. 1. 15. 23. 22	- 10. 12. 6	- 10. 13. 4	+ 58	- 9. 51	+ 16
16. 33. 22	- - 13. 54	- - 14. 14	+ 20	- 10. 4	+ 1
2. 15. 43. 37	- - 40. 51	- - 41. 29	+ 38	- 10. 4	- 23
16. 38. 50	- - 41. 52	- - 42. 31	+ 39	- 10. 10	- 30

§. 32. Ex hac Tabula satis perspicitur, Elementa nostra adeo bene obseruationibus satisfacere, vt merito dubitare liceat, an maior consensus per alia quaecunque Elementa nostris aliquantum dissimilia obtineri queat. Pro Longitudine scilicet summus error nondum ad tria minuta prima affurgit, in Latitudine vero errores vix minutum primum excedunt; obseruatio enim die 9 Aug. instituta merito pro dubia haberi debet. Pro obseruationibus autem in prima Cometæ apparitione factis, maiores quidem prodeunt dissensus, qui tamen si obseruationes diebus 29 Iunii, 1 et 3 Iulii institutas, exceperis, non omnino pro enor- mibus haberi debent, vti sequens Tabula declarat:

Temp. med. Parif.	Long. obseru.	Long. ex calc.	Differ.
Iunii 15. 11 ^b 23'. 22"	9 ^s . 2°. 51'. 49"	9 ^s . 2°. 57'. 46"	+ 5'. 57"
17. 11. 11. 33	- - 59. 58	- 3. 6. 59	+ 7. 1
20. 10. 40. 48	- 3. 16. 12	- 3. 23. 6	+ 6. 54
21. 10. 27. 45	- - 23. 17	- 3. 28. 9	+ 4. 52
22. 12. 9. 36	- - 33. 43	- 3. 40. 38	+ 6. 55
24. 12. 3. 18	- - 59. 58	- 4. 7. 5	+ 7. 7
25. 13. 27. 55	- 4. 21. 42	- 4. 26. 4	+ 4. 22
27. 13. 13. 17	- 5. 34. 54	- 5. 42. 57	+ 8. 3
28. 10. 46. 34	- 6. 45. 58	- 6. 49. 50	+ 3. 52
29. 11. 59. 26	- 9. 42. 45	- 9. 40. 31	- 2. 14
30. 12. 3. 11	- 20. 24. 28	- 19. 8. 8	- 1°. 16'. 20"
Iulii. 1. 12. 3. 23	1. 25. 41. 48	1. 20. 51. 27	- 4. 50. 21
3. 11. 3. 45	2. 29. 16. 22	2. 27. 18. 0	- 1. 58. 22

Caeterum fateor pro his obseruationibus calculos a me obiter tantum esse institutos. exceptis obseruationibus dier. 15 et 29 Iunii, ita vt non pronunciare ausim differentias inter calculum et obseruationes tales praecise esse, quales haec Tabula exhibet; scilicet pro meo instituto sufficebat, quod salis liquido constet obseruationes diem 29 Iunii praecedentes vix cum illis conciliari posse, quae siue hoc die, siue postmodum institutae sunt. Seposita autem consideratione vltimarum harum obseruationum, reliquae per mensem Iunii institutae, ad consensum cum illis, quae sub secunda Cometae apparitione factae sunt, redigentur, dum elongatio Perihelii a nodo 30 aut 40 scrupulis secundis inuiatur. Verum obseruatio diei 29 Iunii cum illa 15 Iunii, per mutationem quandam leuiorem siue in loco Nodi, siue in elongatione Perihelii a Nodo, non reddi potest consentiens, nisi satis quoque sensibiles mutationes suscipiantur cum semiparametro et distantia Perihelii, tum vero vix am-

amplius spes esse videtur, vt obseruationes secunda apparitione factae, impleantur. Hinc omnino praesumere conuenit, obseruationum pro diebus 30 Iunii 1 et 3 Iulii dissensum a calculo potissimum actioni telluris in nostrum Cometam esse adscribendum, nec alia sane excogitari potest ratio adaequata, vnde errores tam enormes deriuari possent. Simul vero ac supponatur Cometae motum dictis diebus a tellure fuisse perturbatum, nihil plane necesse est, vt solliciti simus de componendis inter se obseruationibus primae et secundae apparitionis, et tum quidem suffecerit Elementa detexisse, quibus posterioris generis obseruationes adim-pleantur.

§. 33. Quum sit semiaxis maior ellipseos, in qua Cometam moueri inuenimus $= 3,115586$ et distantia Perihelii $0,675461$, erit distantia Aphelii $= 5,555711$, et exentricitas in partibus distantiae mediae Solis a Terra $= 2,440125$; hinc perspicitur Cometam nostrum in Perihelio Soli esse propriorem, quam Planetam Venerem, longius autem remotum quam Mercurium; contra vero Cometa in aphelio existens aliquantulo magis a Sole erit remotus quam Iupiter, ideoque orbita Cometae tota intra orbitam Saturni comprehendetur, vti vicissim orbitam Mercurii includit, reliquorum autem planetarum orbitae, partim intra, partim extra ellipsin Cometae iacebunt. Angulus porro anomaliae a Perihelio computatus pro distantia media Cometae a Sole, erit $141^{\circ}.33'.16''$ et tempus quod Cometa impendit ad describendum hunc angulum a Perihelio erit 251,77 Dier., quod si subtrahatur a semissi temporis Periodici 2,7496 Annis, residuum dabit tempus quo Cometa a distantia media ad Aphelium pergit $= 752,53$ Dier. Per aphelium vero Cometam nostrum transisse intelligitur, Anno 1767 die 13, 3964 Nouembris; existente tum Longitudine eius $5^{\text{h}}.26^{\text{m}}.19^{\text{s}}$.

§. 34. Licet Cometa Anni 1770 non sit ex eorum numero, qui in transitu per nodum telluri valde appropinquare possunt; tamen inter omnes hactenus observatos Cometas, nullus est de quo constet, quod propius ad terram accesserit. Quum scilicet elongatio Perihelii a Nodo descendente sit fere 44° , erit distantia Cometae a Sole in Nodo $= 0,77043$, ideoque Cometa in Nodo ab orbita telluris satis erit remotus. At tamen quum inclinatio orbitae huius Cometae ad Eclipticam sit adeo exigua, ut inter ipsos Planetas, praeter Iouem, quisquam non sit, qui minorem habeat inclinationem orbitae, fieri utique potest, ut hic Cometa intervallo a Nodo satis magno ad Telluris orbitam valde prope accedere queat; quod evenire necesse est, quando distantia Cometae a Sole aequalis sit distantiae puncti correspondentis in orbita terrestri. Hinc quia Tempus Perihelii pro Cometa incidebat in 13, 69 Aug. 1770, inuenietur pro 1 Iulii eiusdem Anni angulus anomaliae 76° circiter graduum et distantia Cometae a Sole pro hac anomalia $= 1,0126$, eodem vero tempore erat distantia Solis a Terra $= 1,0167$, unde iam statim liquet Cometam proxime ad terram accedere debuisse, si haec Astra e Sole visa tum temporis quoque in coniunctione fuerint. Erat vero Longitudo terrae $3^\circ.10'$, ideoque elongatio terrae a Nodo e Sole visa 31° circiter, unde quum elongatio Cometae supra habeatur 32° , iam perspicue intelligitur huiusmodi propinquam coniunctionem Cometae et Terrae reapse contigisse. Calculo autem instituto pro temporibus observationum diebus 29, 30 Iunii 1 et 3 Iulii factarum, sequentes inveni valores distantiarum Cometae a Terra:

29 Iunii 0,026079 1 Iulii 0,015601

30 0,017699 3 0,030906

proximam autem distantiam Cometae a Sole fuisse inueni $= 0,015379$, ideoque 65 circiter partem distantiae mediae Solis

Solis a Terra. Ideoque quum distantia haec media, posita parallaxi Solis $8''$, 63 , sit $23900,9$ Semidiametrorum aequatoris terrestris, habetur distantia Cometae proxima a Tellure $= 367,57$ semidiametrorum terrae; parallaxis autem Cometae tum temporis erat $9'$. $22''$, denique distantia Cometae a Tellure non nisi sex vicibus distantiam mediam Lunae a Terra superabat.

§. 35. Per obseruationem Cel. *Messier* die 2 Aug. institutam de magnitudine huius Cometae iudicium ferri potest; inuenit enim Cel. hic Astronomus diametrum nuclei Cometae $45''$, et quum Cometae distantia a tellure tum temporis esset $0,3994$ talium partium, qualium distantia media Solis a tellure ponitur pro vnitate, intelligitur diametrum Cometae ad distantiam huic mediae aequalem e terra visam, aequari debere $18''$, 1 . Si itaque ponatur, parallaxis Solis pro distantia media $8''$, 63 , ideoque diameter terrae $17''$, 26 , perspicitur hunc Cometam magnitudine ipsam tellurem nostram aliquantum superare; saltem quatenus huic obseruationi fidem habere licet, de qua tamen omnimodam exactitudinem sperare non fas est, ob nucleum Cometae non bene terminatum; quicquid autem sit, sufficit nobis quod ex hac obseruatione cognoscatur Cometam nostrum magnitudine ipsam terram fere aequare.

§. 36. Singulares fane et maxime memoratu dignae, istae sunt proprietates nostri Cometae, quod inclinationem orbitae minorem habeat, quam vllus alius reliquorum siue Cometarum, seu Planetarum, Ioue excepto, et quod ad Tellurem nostram vicinior factus sit, quam vllus reliquorum Cometarum, quorum Elementa per obseruationes habentur cognita; verum enim vero quod huic Cometae prae reliquis praecipuum attentionis meritum conciliare

ciliare debet, est ista inexpectata omnino et mira eius proprietas, quod tam breue habeat tempus Periodicum, vt etiam citius suam reuolutionem circa Solem peragat, quam bini Planetarum, Iupiter et Saturnus, id quod ne spe quidem de quopiam Cometarum praesumere licuisset. Confidimus fane, nos in hac inuestigatione tam caute processisse, vt de Cometae Elementis nihil pronuntiare uouerimus antequam omnes et singulas circumstantias, quae pro iis stabiliendis facere possent, penitus expenderimus; interim tamen si cuiuspiam videatur nostra argumenta nondum plenam gignere posse conuictionem, saltem fatebitur illis meritum coniecturae valde verisimilis non esse dene-gandum. Fatemur quidem id praeter omnem expectationem accidisse, vt Cometa tam breui tempore in orbem rediens, non nisi An. 1770 sit obseruatus, nec dubium grauissimum, quod inde contra determinationem Temporis Periodici peti posset, sufficienter soluere nos posse, speramus; quum tamen haec res omnem Astronomorum attentionem mereatur, eam heic proponendam esse existimauimus, eum in finem vt cum tempore veritas vel falsitas nostrae disquisitionis innotescat.

§. 37. Quum inuestigationibus nostris praecipue inferuierint obseruationes diebus 29. Sept. 1 et 2 Octob. institutae, etiam illud dubium moueri posset, quod si his obseruationibus grauiores inessent errores, nostrae determinationes eo ipso erroneae euaderent. Verum hic primum obseruare conuenit, singulis istis diebus binas vel tres institutas fuisse a Cel. *Messier* obseruationes satis bene inter se consentientes, ita vt vix credere fas sit, fortuito euenire potuisse, vt singulae septem obseruationes eodem modo erroneae factae sint; tum vero si loco harum obseruationum illae adhibeantur, quae diebus 18, 19 vel 20 Sept. insti-

institutae sunt, certum est tempus Periodicum adhuc minus inueniri, ita vt conclusiones tum eo mineri probabilitate gauderent.

§. 38. Diximus inuestigationem a nobis propositam, non nisi verisimilitudine sua se commendare, plena autem conuictio hoc in negotio obtinebitur, si demonstrari potuerit, Elementis nostris ita immutatis, vt tempus Periodicum maius euadat, obseruationibus secundae apparitionis errores insignes quinque vel plurium minorum primorum induci; tum enim audacter statuere licebit nostra Elementa rite se habere, saltem quatenus obseruationibus vllam habere liceat fidem. Huiusmodi autem disquisitionem nondum suscipere mihi licuit, quam igitur si in posterum exsecutus fuero, quae per eam mihi innotuerint, Astronomis communicare non intermittam. Interim veniam a lectoribus me petere fas est, quod in describenda mea argumentandi ratione, nimis forsan prolixus fuerim, id autem eam solum ob causam factum est, vt vnicuique pateret, hoc in negotio me nihil temere et praecipitanter statuere voluisse.

§. 39. Denique iam e re quidem esset, vt ostenderem qua ratione ista coeli loca indicari queant, vbi Cometam quaerere necesse sit in proximo eius ad Perihelium accessu, qui An. 1781 contingere deberet; verum quum disquisitio nostra iam fere modum dissertationis excedat, quae hac de re monenda sunt, singulari Dissertatione complecti animus est.



E P I T O M E

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM
PETROPOLI ANNO MDCCLXXVI.

SECUNDVM CALENDARIVM CORRECTVM
INSTITVTARVM.

Auctore

IOANNE ALBERTO EYLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, una cum variatione maxima et statu medio, pro singulis mensibus anni 1776.

Mense	Altitudo maxima		Altitudo minima		Variatio	Medium	Altitudo media
	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	Dig. p. c.	Dig. p. c.
Ianuar.	28. 75	6. } XI. p. m. 8. }	27. 52	24 IV. a. m.	1. 23	28. 13	28. 26
Februar.	28. 28	1. III. p. m.	27. 10	6. IX a. m.	1. 12	27. 72	27. 78
Mart.	28. 38	22. III. p. m.	27. 41	25 IV. a. m.	0. 97	27. 89	27. 92
Apr l.	28. 73	21. Meridie	27. 33	13 IV. a. m.	1. 40	28. 03	28. 03
Maii	28. 53	1. IX a. m.	27. 46	22. VIII. a. m.	1. 07	28. 00	28. 06
Iunii	28. 38	10. IV. p. m.	27. 62	26. Meridie	0. 76	28. 00	28. 04
Iulii	28. 35	26. IX. a. m.	27. 75	10. I. a. m.	0. 60	28. 05	28. 07
Augutt	28. 38	7. XI. a. m.	27. 58	22. V. a. m.	0. 80	27. 98	28. 02
Sept.	28. 29	25. Meridie	27. 57	6. V. a. m.	0. 72	27. 93	28. 00
Octobr.	28. 78	24. Meridie	27. 16	10. VIII a. m.	1. 62	27. 97	28. 26
Nouembr.	28. 87	12. IX. a. m.	27. 02	21 } media 22 } nocte	1. 85	27. 94	28. 15
Decembr.	28. 83	1. III. p. m.	27. 51	24. III. a. m.	1. 32	28. 17	28. 07
Ann o 1776.	28. 87	Nouembr.	27. 02	November	1. 85	27. 94	28. 06

2. Nume-

2. Numerus dierum, quibus altitudo barometri superabat terminos quosdam circa altitudinem 28. poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, horae	ſupra 28. 10 Dies, horae	ſupra 28. 00 Dies, horae	ſupra 27. 90 Dies, horae	ſupra 27. 80 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	16. 6	18. 15	22. 18	26. 12	28. 0	28. 25
Febr.	0. 12	3. 12	6 3	11. 15	15. 0	27. 81
Mart.	3. 12	7. 15	12. 0	17. 18	20. 15	27. 95
April.	8. 21	10. 0	13. 9	18. 15	22. 15	27. 97
Maii	9. 0	14. 12	20. 6	24. 0	25. 12	28. 08
Iunii	5. 18	14. 0	19. 18	22. 6	25. 21	28. 08
Iul.	6. 12	12. 9	20 15	27. 18	30. 6	28. 05
Aug.	7. 12	10. 15	17. 15	23. 6	25. 15	28. 02
Sept.	3. 0	9. 15	16. 21.	22. 3	26. 0	28. 02
Oct.	18. 9	22. 21	24. 18	26. 9	27. 0	28. 33
Nov.	16. 9	18. 18	19. 18	20. 21	22. 9	28. 28
Dec.	7. 12	12. 9	17. 3	22. 3	26. 6	28. 03
Anno 1776.	103. 3	154. 21	211. 0	263 6	295. 3	28. 02

Notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros designare, quorum duodecim pedem regium parisiſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m, verum *poſt meridiem*.

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima Barometri 28. 87: menſe Nouembris die 12 hora ante meridiana 9. Thermom. Deſliſl. 170. Coelum ſerenum; malacia.
2. Altitudo Barometri minima 27.02: itidem menſe Nouembris die 21 media nocte, Thermom. Deſliſl. 151. Coelum obduſtum, nix copioſa, et ventus SO.

3. Variatio maxima 1.85 vel $1\frac{85}{100}$ poll.
4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 27.94.
5. Altitudo barometri media inter omnes obseruatas, seu summa omnium altitudinum per numerum earum diuisa 28.06; quae notabiliter minor est illis, quas praeteritis annis eruimus.
6. Ex secunda tabula patet, mercurium in tubo barometri se sustentasse supra

$28\frac{20}{100}$	poll. per dies	$103\frac{1}{8}$
$28\frac{10}{100}$	poll. per dies	$154\frac{7}{8}$
28.	poll. per dies	211
$27\frac{90}{100}$	poll. per dies	$263\frac{1}{4}$
$27\frac{80}{100}$	poll. per dies	$295\frac{1}{8}$

Vnde concluditur, mercurium per interuallum dimidii anni vel 183 dierum, se sustentasse supra altitudinem $28\frac{2}{100}$ poll. quae iterum minor est altitudine media. Summatim autem deprehendimus, statum barometri hoc 1776 anno multo depressoire fuisse illo, qui annis praeteritis obseruatus fuit.

3. Sequuntur iam obseruationes nonnullae descensuum et ascensuum barometri subitaneorum et notabiliorum.

Mense Ianuario.

- | | | |
|----------------------|---------|-------------------------------|
| d. 9. meridie - - | 28. 75 | } differentia 0. 52 per 24 h. |
| d. 10. hora 6. p. m. | 28. 62 | |
| d. 11. hora 6. p. m. | 28. 10 | |
| d. 13. hora 8. a. m. | 27. 96. | |

Coelum nubibus obductum. Ventus ex oriente: tum vero nix et boreas

d. 16.

d. 16. meridie - - 27. 82 }
d. 17. media nocte 28. 45 } differentia o. 63 per 36. horas.

Coelum serenum. Ventus ex oriente, paulo post malacia

d. 18. meridie 28. 47 }
d. 19. meridie 27. 97 } differentia o. 50. per 24 horas.

Coelum obductum. Ventus e regione W.

d. 24. hora 6. a. m. 27. 52 }
d. 26. meridie - - 28. 43 } diff. o. 91 per 54 horas.

Coelum serenum, malacia

d. 27. hora 9. a. m. 28. 45 }
d. 28. hora 6. a. m. 27. 98 } diff. o. 47 per 21 horas.

Coelum nubilum, malacia

d. 29. hora 3. p. m. 28. 31 }
d. 31. hora 9. a. m. 27. 57 } diff. o. 74 per 42 horas.

Coelum plane obductum, nix et procella e regione NW.

Menſe Februario.

Ian. d. 31. hora 9. a. m. 27. 57 }
d. 1. hora 3. p. m. 28. 28 } diff. o. 71 per 30 horas.

Coelum serenum. Ventus NO

d. 2. meridie 27. 72 diff. o. 56 per 21 horas.

Coelum obductum, nix

d. 5. meridie - - 27. 78 }
d. 6. hora 9. a. m. 27. 16 } diff. o. 62 per 21. horas.

Nix et pluua: procella e plaga SW

d. 11. hora 9. a. m. 27. 45 }
d. 13. hora 9. p. m. 28. 12 } diff. o. 67 per 60 horas.

Coelum obductum, nix cum vento e meridie flante

d. 20. media nocte 27. 98 }
d. 22. hora 9. p. m. 27. 31 } diff. o. 67 per 45 horas.

Nix copiosa: procella ex occidente

d. 25. hora 6. a. m. 27. 35 }
d. 26. hora 6. p. m. 27. 97 } diff. o. 62 per 36. horas.

Coelum erat obductum et ventus leniter flabat ex SO.

d. 27. meridie - - 27. 95 }
d. 28. hora 6. a. m. 27. 43 } diff. o. 52. per 18 horas.

Nix copiosa et ventus ex occidente vehementer flabat.

Menſe Martio.

d. 20. hora 6. p. m. 27. 43 }
d. 22. hora 3. p. m. 28. 38 } diff. o. 95 per 45 horas.

Coclo existente ſereno et vento flante e ſeptentrione

d. 25. hora 4. a. m. 27. 41 diff. o. 97 per 61 horas.

Coelum obductum, nebuſoſum; nix et ventus e meridie

d. 26. hora 9. a. m. 28. 13 diff. o. 72 per 29 horas.

Boreas procelloſus, nix copioſa; tum vero coclum ſerenum

d. 27. meridie 27. 42 diff. o. 71 per 27 horas.

Coelum obducebatur: ningeſat et ventus vehementer flabat e regione NW.

Menſe Aprili.

d. 14. hora 9. a. m. 27. 42 }
d. 15. hora 6. p. m. 28. 13 } diff. o. 71 per 33 horas.

Coelo existente ſereno et vento leniter flante e NW.

d. 16. hora 9. a. m. 27. 82 }
d. 18. hora 3. a. m. 28. 53 } diff. o. 71 per 42 horas.

Coelum nubilum, ventus vehementer flabat e NW.

d. 21. meridie 28. 73 }
d. 24. meridie 27. 75 } diff. o. 98 per 3 dies.

Coelum erat plane ſerenum et ventus leniter flabat e NO.

Menſe

Menſe Maio.

d. 19. hora 6. p. m. 28. 23 } diff. o. 77 per 2½ dies.
d. 22. hora 6. a. m. 27. 46 }

Coelum erat ſerenum et malacia regnabat, tum vero nubibus obducebatur, et pluuiæ cadebat vento vehementer flante ex oriente.

Menſe Auguſto.

d. 12. hora 6. a. m. 28. 29 } diff. o. 64 per 2½ dies.
d. 14. hora 6. p. m. 27. 65 }

Coelum nubibus obductum; pluuiæ copioſa; tonitru et procella e ſeptentrione.

Menſe Septembri.

d. 14. hora 11. p. m. 28. 05 } diff. o. 40 per 7 horas.
d. 15. hora 6. a. m. 27. 65 }

Pluuiæ et procella e regione SW.

d. 16. meridiæ - - - 28. 18 diff. o. 53 per 30 horas.

Coelum ſerenum, malacia

d. 18. meridiæ - - - 28. 05 } diff. o. 42 per 21 horas
d. 19. hora 9. a. m. 27. 63 }

d. 20. hora 9. a. m. 28. 15 diff. o. 52 per 24 horas.

Coelum fuit obductum: pluit abundanter, vento vehementer flante e regione SO.

Menſe Octobri.

d. 30. Sept. media nocte 27. 99 } diff. o. 55 intervallo 36 h.
d. 2. Oct. meridiæ - - 28. 54 }

Coelum nubilum, pluuiæ et malacia

d. 7. meridiæ 28. 14 } diff. o. 98 intervallo 3 dierum.
d. 10. meridiæ 27. 16 }

Coelum obductum, pluuiæ copioſa et auſter procelloſus.

Menſe

Menſe Nouembri.

d. 3. media nocte 28. 30 }
d. 4. media nocte 27. 38 } diff. 0. 92 interuallo 24 horar.

Coelum fuit plane obductum: nixit et pluit abundanter, procella e SW. flante

d. 21. media nocte 27. 02 }
d. 25. hora 3. p. m. 28. 47 } differentia 1. 45 per 87 h.

Coelum maxima parte obductum: nebula, nix et malacia.

Menſe Decembri.

d. 1. meridiē - - 28. 83
d. 3. meridiē - - 28. 58 }
d. 5. hora 4. a. m. 27. 93 } differentia 0. 65 per 40 horas.

Coelum obductum; nix; ventus ex occidente

d. 8. hora 10. p. m. 27. 97
d. 9. hora 4. p. m. 28. 59 diff. 0. 62 interuallo 18 horar.

Coelum nubilum, nix, et ventus ex occidente

d. 10. hora 9. p. m. 28. 09 diff. 0. 50 interuallo 29 horar.

Tempeſtate non variata

d. 14. hora 9. p. m. 27. 75 }
d. 15. hora 2. p. m. 28. 32 } diff. 0. 57 interuallo 17 hor.

Coelum ſerenum et ventus ex occidente

d. 16. hora 9. p. m. 27. 67 diff. 0. 65 interuallo 31 horar.

Coelum obductum erat et ventus vehementer flabat e regione SW.

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae et maximae pro singulis mensibus anni 1776 secundum Calendarium correctum.

Mense.	Altitudo minima.			Altitudo maxima			Different.
	Gradus	die	hora	Gradus	die	hora	
Ianuar.	200	18.	VIII. a. m.	155	31.	IX. p. m.	45. Gr.
Februar.	187	4.	VI. a. m.	145	15.	II. p. m.	42.
Mart.	177	31.	VI. a. m.	142	16.	II. p. m.	35.
April.	176	1.	V. a. m.	136	10.	II. p. m.	40.
Maii	152	2.	X. p. m.	114	10.	II. p. m.	38.
Iunii	141	6.	V. a. m.	114	13.	II. p. m.	27.
Iulii	133	13.	V. a. m.	106	22. } 29. }	II. p. m.	27.
August.	139	28.	VI. a. m.	109	9. } 13. }	II. p. m.	30.
Septembr.	149	21.	VI. a. m.	124	29.	II. p. m.	25.
Octobr.	156	27. } 29. }	VII. a. m.	128	7.	II. p. m.	28.
Nouemb.	172	12.	VII. a. m.	141	4.	X. p. m.	31.
Decembr.	172	8.	VII. a. m.	147	10.	VI. p. m.	25.
Anno 1776.	200	Ianuarius		106	Iulius		94. Gr.

2. Status frigoris et caloris.

Mense.	Dies frigidiore Gradibus.						Dies calidiores Gradibus.					
	190	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150	160
Ianuar.	6	16	27	31	31	31						3
Februar.		3	5	7	18	29					21	24
Mart.			4	14	28	31					16	27
April.			1	6	25	30				7	27	30
Maii					2	16		6	16	26	31	31
Iunii						1		14	30	30	30	30
Iulii							9	28	31	31	31	31
August.							2	16	31	31	31	31
Septembr.						16			15	29	30	30
Octobr.					11	27			2	11	30	31
Nouembr.			1	13	29	30					9	29
Decembr.			1	9	29	31					8	28
Anno 1776.	6	19	39	80	173	242	11	64	125	165	264	325

Ex tabula priori intelligitur, per totum annum fuisse:

1. Altitudinem Thermometri minimam, seu gradum frigoris maximi 200 grad. Delisl. mense Ianuarii die 18, hora ante meridiana VIII^{va}. Barometro tunc temporis momento 28⁴⁷/₁₅₅, coelo existente sereno et malacia perfecta.

2. Altitudinem Thermometri maximam, seu gradum caloris maximi 106 grad. Delisl. mense Augusti, diebus 22^{da} et 29^{na} hora postmeridiana secunda. Fuit autem illa 22^{da} die coelum serenum sed nebulosum: malacia et altitudo Barometri 28²⁰/₁₅₅: hac vero die 29^{na} coelum nubilum, vento flante ex occidente et Barometro existente 28⁸/₁₅₅.

3. Hinc variatio Thermometri maxima 94 grad. secundum Thermometrum Delislilianum.

Tabu-

Tabula secunda ostendit fuisse hoc 1776 anno, dies 173 frigidiores gradu 150, hoc est congelationis naturalis termino, inter quos 80 fuerunt dies, quibus frigus superabat 160 gradus. In his porro numeravimus 39 dies frigidiores gradu 170, 19 dies frigidiores gradu 180 et tandem 6 dies, quibus frigus superabat gradum 190.

Deinde patet ex eadem Tabula, hoc 1776 anno quoad calorem fuisse 264 dies calidiores gradu 150, et 165 dies calidiores gradu 140, inter quos 125 dies annotavimus, quibus calor superabat gradum 130, et 64 dies, quibus transibat gradum 120, tandem 11 dies calidiores gradu 110.

Speciatim frigus observatum fuit intra gradus.

	Dies.
190 et 200 die 6. 15. 17. 18. 20. 26. Ianuarii -	6
180 et 190 die 3. 4. 5. 11. 12. 14. 19. 25. 27. 29. Ian. et die 1. 3. 4. Februarii -	13
170 et 180 die 2. 7 — 10. 13. 16. 21. 24. 28. 31. Ian. die 2. 5. Febr. die 7. 29. 30. 31. Martii; die 1 Aprilis; die 12 Nouembr. et die 8 Decembris - - -	20
160 et 170 die 1. 22. 23. 30 Ian. du 9. 10. Febr. die 4. 5. 6. 9. 10. 22. 25 — 28 Mart. die 2. 14. 15. 21. 22 April. die 9. 11. 13. 14. 17. 18. 23. 24. 25. 28. 29. 30. Nouembr. et die 2. 7. 9. 15. 28 — 31 Decembris - - -	41

Calor autem deprehensus fuit intra gradus:

	Dies.
110 et 100 die 18. 20 — 23. 26 — 29. Iulii et die 9. 13. Aug. - - -	11
120 et 110 die 8. 9. 10. 12. 13. 18. Maii, die 1 — 4. 7 — 13. 20. 21. 23. Iunii, die 1 — 9. 12. 14 — 17. 19. 24. 25. 30. 31. Iulii, die 1. 2. 4 — 8. 10. 11. 12. 14. 17. 18. 23. Augusti - -	53
130 et 120 die 4. 11. 14. 16. 17. 19. 20. 21. 28. 30. Maii. die 5. 6. 14 — 19. 22. 24 — 30. Iunii, die 10. 11. 13. Iulii, die 3. 15. 16. 19 — 22. 24 — 31. Augusti, die 1 — 7. 11. 12. 13. 26 — 30. Septemb. et die 6. 7. Octobris - -	61
140 et 130 die 9. 10. 18. 23. 26. 29. 30. Apri- lis, die 3. 5. 7. 15. 22. 23. 26. 27. 29. 31. Maii, die 8. 9. 10. 14 — 18. 20 — 25. Sept., die 1 — 5. 8 — 11. Octobris - - -	40

Frigus medium hoc anno statui potest 149 graduum et calor medius 140 graduum. Ac si menses aestivos Maium — Octobrem, ab hiemalibus Ian. — April. Nouembr. — Decembr. separamus, reperimus in illis calorem medium fuisse 125 grad. et in his frigus medium 161 gradum.

De Barometro et Thermometro denique monenda sunt sequentia, quae quidem in Tomo XVII. et XVIII. nouorum commentariorum nostrae Academiae amplius narrantur.

Barometrum est simplex; diameter tubi partem decimam pollicis aliquantillum superat; scala diuisa est in pollices, quorum duodecim pedem regium parisiinum constituunt, et cuius pollex iterum subdiuisus est in viginti partes aequales. Eleuatio huius instrumenti supra superficiem mediam Neuae est 18 pedum et locus Barometri distat ab ostio huius fluminis interuallo 5000 circiter pedum.

Thermometrum deslislianum mercurio impletum, aëri versus septentrionem expositum et in tali loco positum est, vt sol id nec directe nec per reuerberationem irradiare possit. Constat autem, in Scala eiusmodi thermometri deslisliani, calorem aquae bullientis per ciphram, et punctum congelationis aquae naturalis per numerum 150 indicari.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

	Mala-	Vent	Vent	Procel-	Nord	N	O	Ost	S-O	Sud	S-W	West	N-W	Varia-
Mense	cia	lenis	fortis	lofus										bilis
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar.	5	18	5	3	5	6	6	0	0	0	1	8	5	0
Febr.	1	14	10	4	1	1	0	6	10	6	4	1	1	0
Mart.	4	16	8	3	9	0	7	1	2	5	5	2	0	0
April.	4	19	6	1	8	3	4	3	1	1	5	5	0	0
Maii	8	18	5	0	6	4	5	5	4	1	2	4	0	0
Iunii	6	14	9	1	0	8	8	1	3	2	4	1	3	3
Iulii	5	17	8	1	0	8	9	2	5	2	2	1	2	2
Aug.	5	19	4	3	0	6	2	2	5	4	8	0	4	4
Sept.	5	10	11	4	2	0	2	3	2	7	6	6	2	2
Oct.	5	18	7	1	2	1	3	5	6	4	5	4	1	1
Nov.	7	14	4	5	2	1	2	8	7	2	2	6	0	0
Dec.	0	14	13	4	1	1	5	3	2	8	5	3	0	0
Anno 1776.	5	191	90	30	36	39	56	39	47	11	56	18	12	

Hinc perspicitur, hoc anno 1776 maxime regrassé ventos ex oriente et occidente flantes, tum vero Austrum, deinde ventum e regione S—W. Porro patet hunc annum minus ventosum fuisse anno proxime praeterlapso: malaciae frequentius observatae fuerunt mensibus, Maii, Novembris et Iunii: procellae et venti vehementiores verum frequentius occurrunt mensibus Decembris, Septembris et Februarii.

In specie autem hoc anno procellae flabant et regione.

	dies
Nord. die 21. 25. Mart.	2.
N—O. die 13. Ian.	1.
Ost. die 20. Decembris	1.
S—O. die 18. Aug. d. 4. Sept. d. 10. Oct. d. 19. December	4.
Sud. die 14. Iun. d. 15. Aug. d. 17. 18. Nou.	4.
S—W. die 5. 6. 11. Febr. d. 5. Mart. d. 16. Apr. d. 30. Iul. d. 14. Aug. d. 15. Sept. d. 4. Nou. d. 11. 13. Decembris	11.
West. die 23. Febr. d. 20. Sept. d. 5. Nou.	3.
N—W. die 30. 31. Ian. d. 21. Sept. d. 6. Nou.	4.

IV. Constitutio Coeli.

Mense.	Coelum ferenum	Coelum obductum	Nebulo- sum	Pluvia	Nix
	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar.	9.	13.	3.	0.	6.
Februar.	1.	16.	2.	10.	17.
Martii	5.	15.	3.	2.	16.
Aprilis	10.	5.	3.	6.	12.
Maii	7.	7.	5.	16.	1.
Iunii	14.	3.	1.	8.	—
Iulii	10.	1.	5.	8.	—
Augusti	10.	12.	6.	17.	—
Septemb.	10.	6.	5.	10.	—
Octobr.	6.	11.	3.	9.	2.
Nouemb.	4.	14.	3.	1.	17.
Decemb.	2.	19.	0.	4.	15.
Anno 1776.	88.	122.	39.	91.	86.

Numerus dierum serenorum hoc anno notabiliter minor fuit, quam praeteritis quatuor annis: excelebant autem quoad serenitatem coeli menses Iunii, Iulii et Aprilis. Ac frequentius pluit mense Augusti et Maii et nix copiosa cecedit praesertim mense Februarii, Nouembris, Martii et Decembris.

V. Reliqua phaenomena.

Grando cecidit diebus 3: die scilicet 20. Februarii, die porro 19. Aprilis et denique die 22. Iunii.

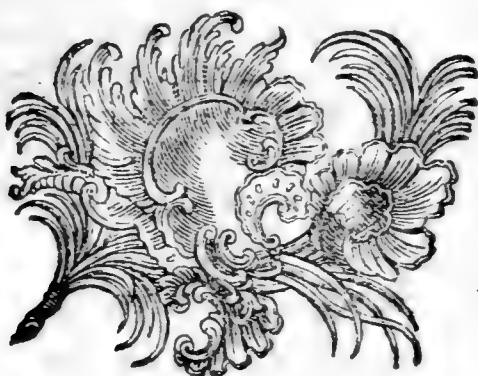
Tonuit decies, et quidem longinque die 9. 11. 14. Maii die 26. Iunii, porro die 5. 12. 13. 15. Augusti. In
vicinia

vicinia autem versabatur tonitru die 22. Iunii et die 28 Iulii.

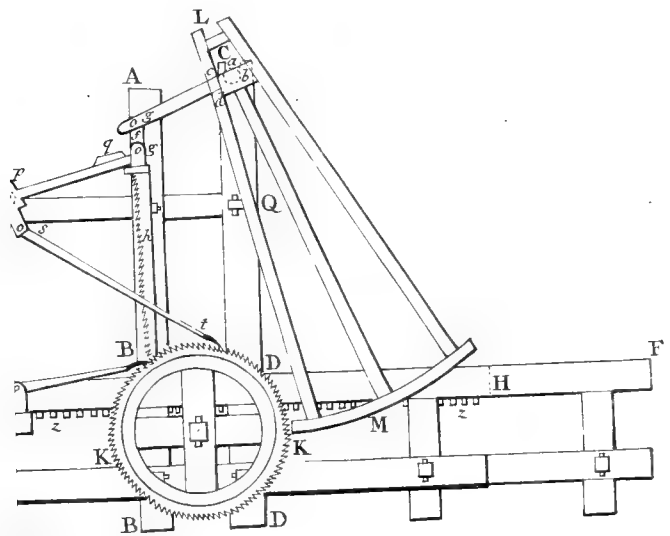
Aurorae boreales obseruatae fuerunt 12: et quidem 3 per-
lucidae die 28. Martii, d. 5. Septembris et d. 7.
Octobris. Reliquae 9 aurorae boreales debiliores an-
notabantur d. 18. Ianuarii, d. 9. Martii, d. 3. 8.
9. 16. 19. 23. Septembris et d. 6. Octobris.

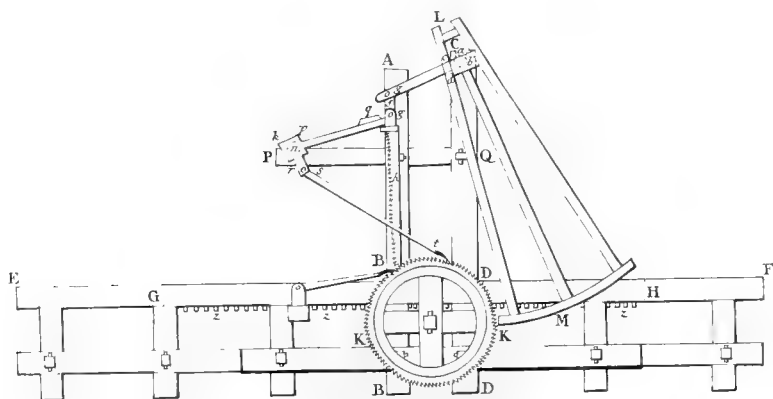
Parhelia d. 17. et 27. Ianuarii, d. 23 Octobris et d. 8.
Decembris.

Flumen Neua a glacie liberatum fuit d. 25. Aprilis, post-
quam per spatium 165 dierum glacie obductum per-
stitit. Tum vero d. 12. Nouembris maxima parte per-
frigescebat et 17 eiusdem mensis vbique glacie ob-
ducebatur, postquam ergo per 200 dies a glacie li-
beratum mansit.



e l'Acad. Imp^{le} des Sciences A.1777. P. I. Pl. I.





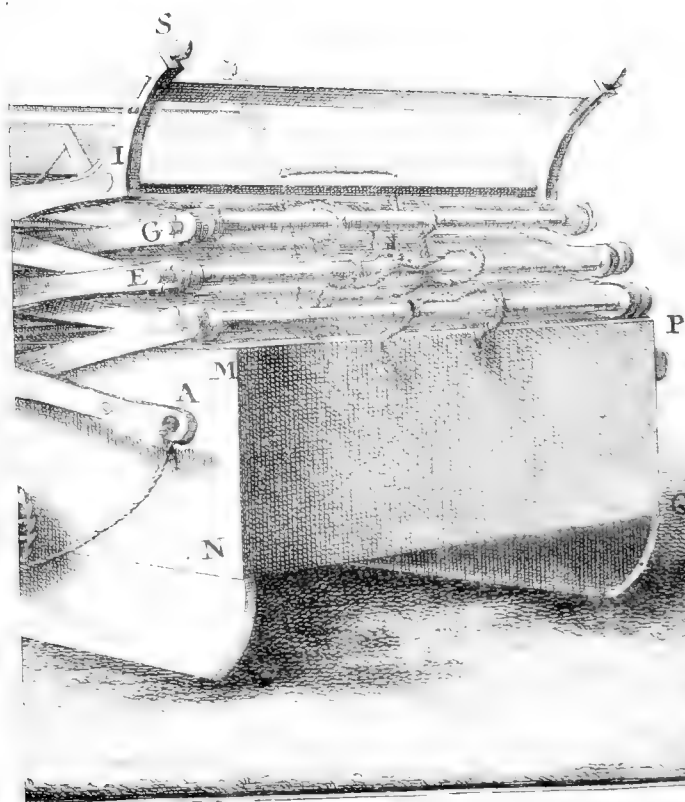


Fig 1

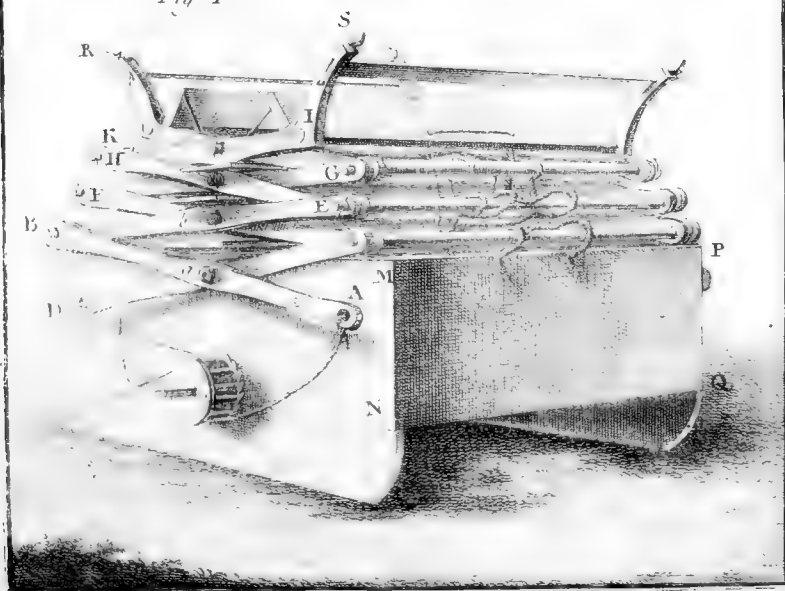


Fig. 2.

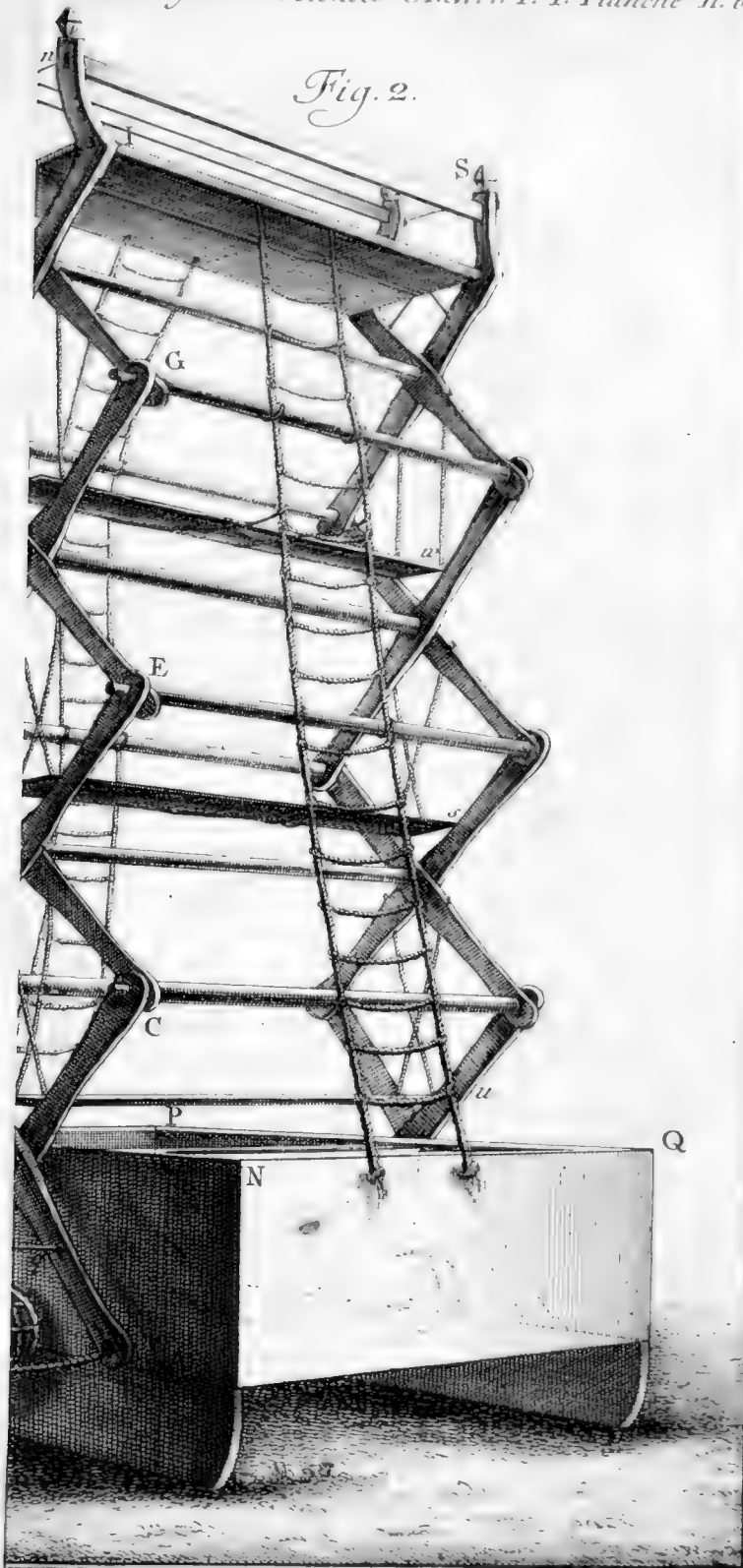


Fig. 2.

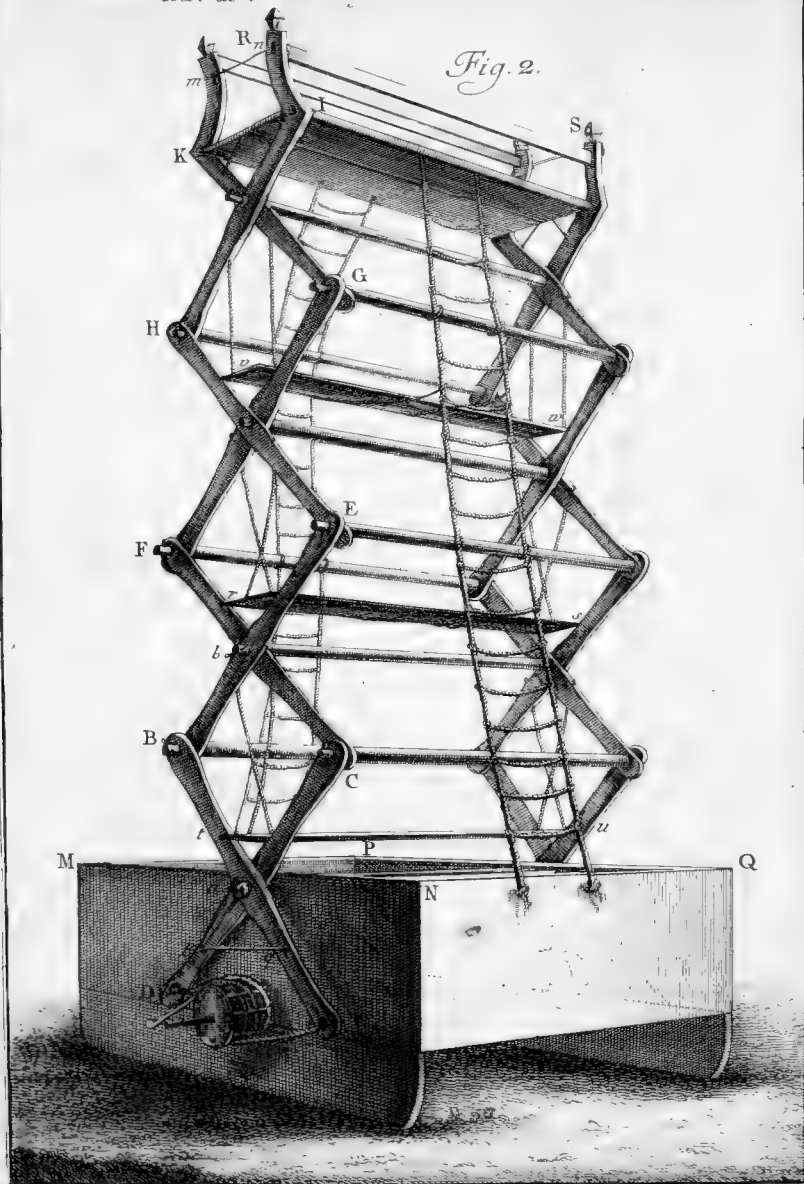


Fig. 1.

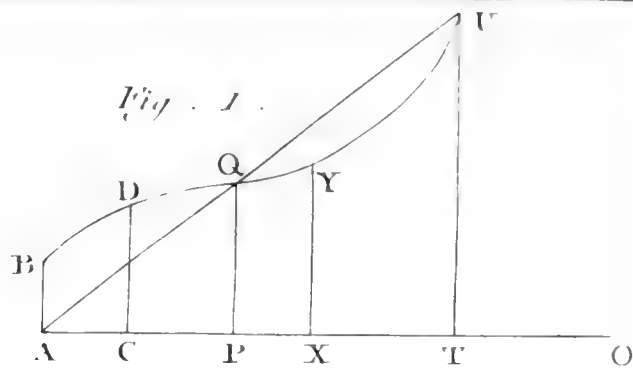


Fig. 3.

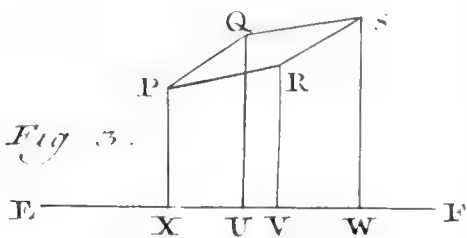


Fig. 6.

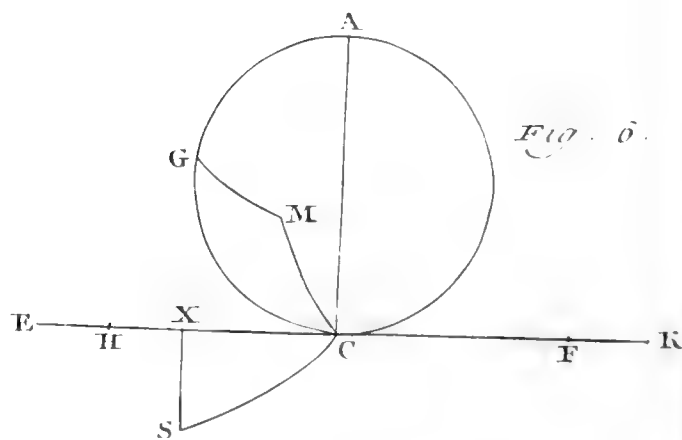
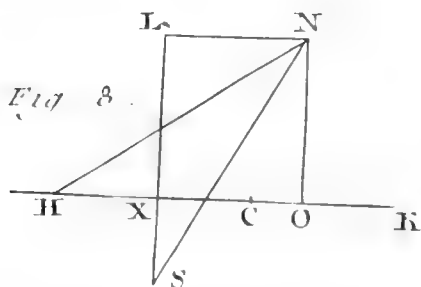
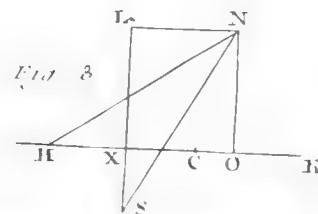
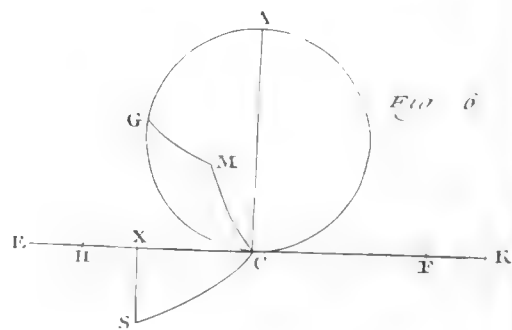
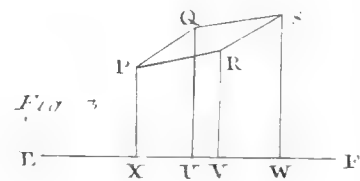
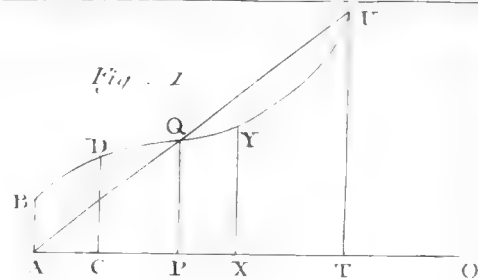


Fig. 8.





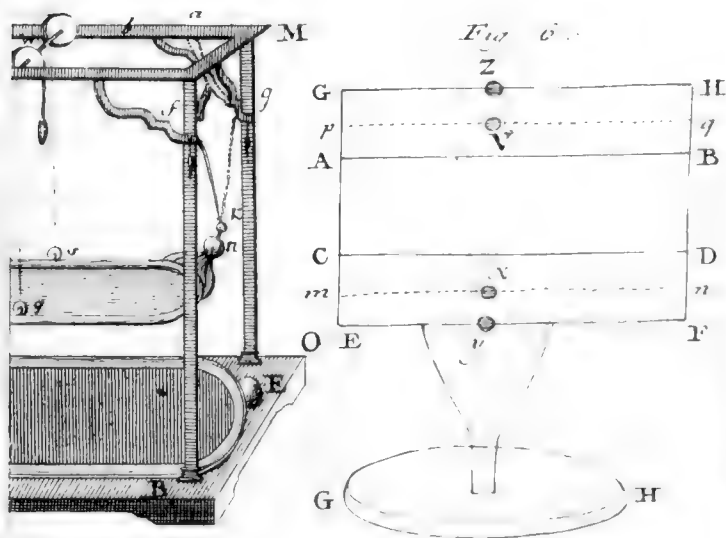
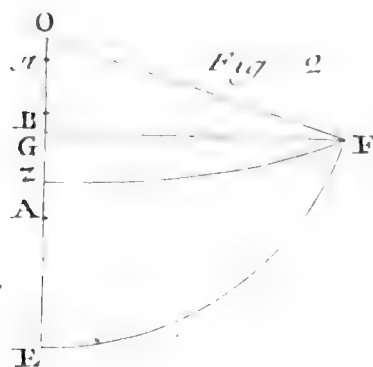
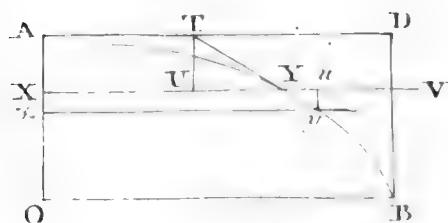


Fig. 5.



O
B
Q
X
P
A

Fig 1

b
 q
 x
 p
 a

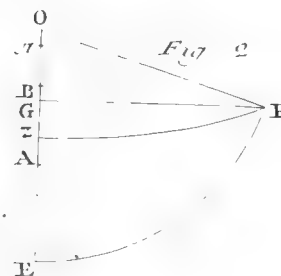


Fig 3

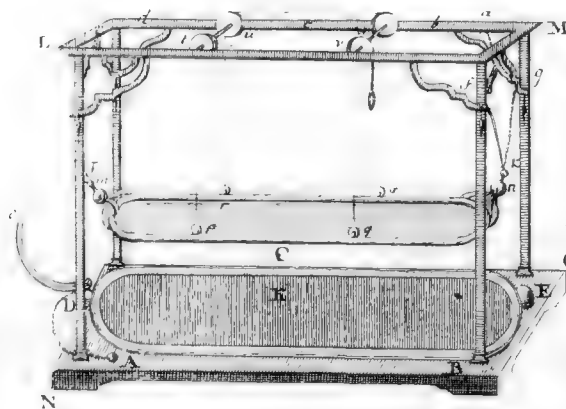
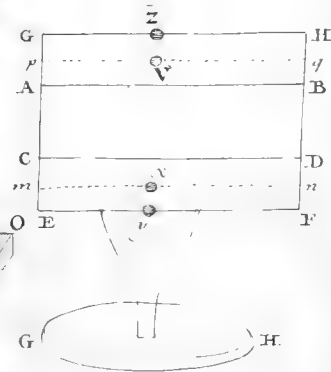


Fig 4



A
X
O

Fig 5

n
 Y
 N

V
 B

Fig 6

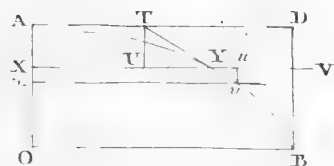


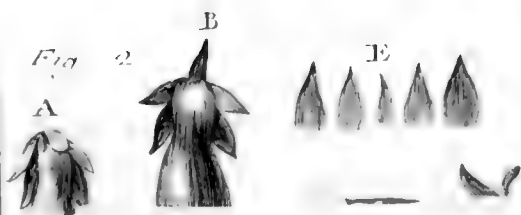


Fig. 2



Fig. 1







Tab. IV

Fig. 1



Tab. III

Fig. 2

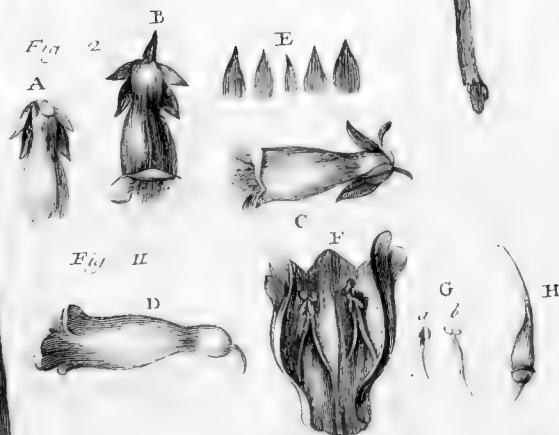
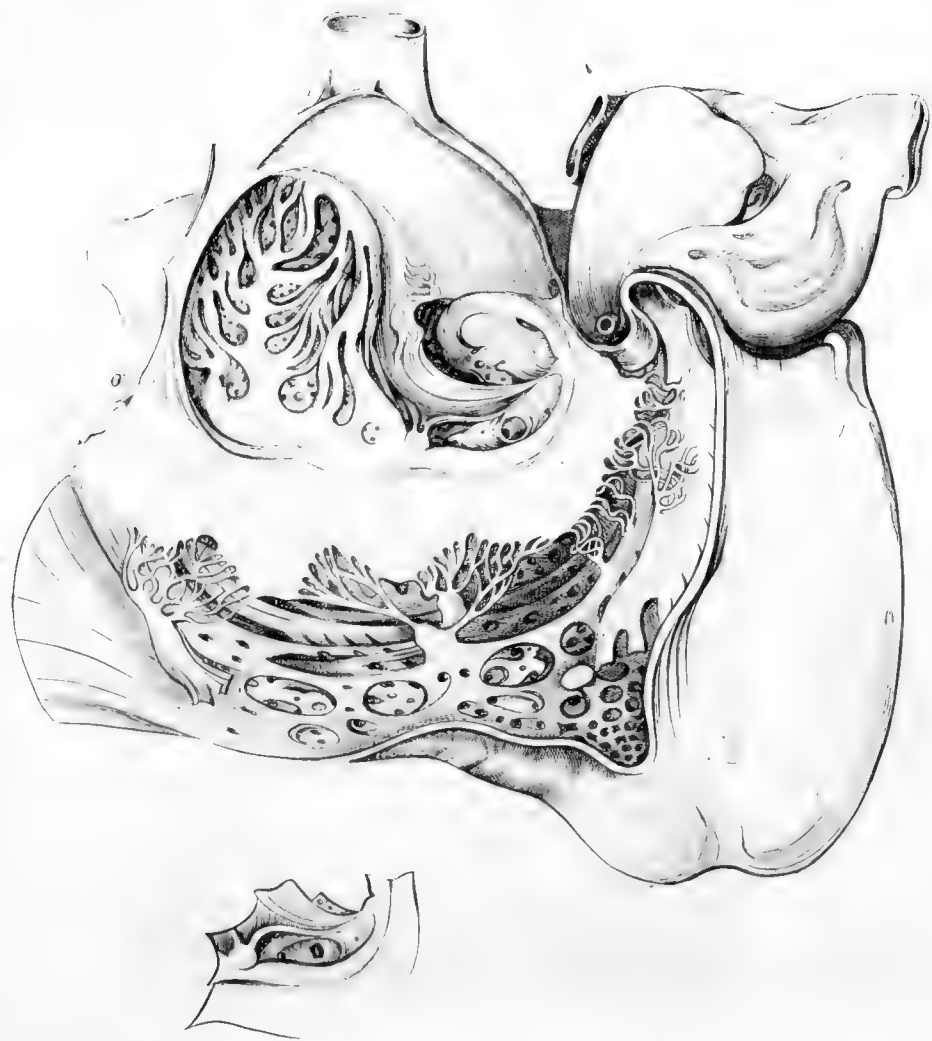
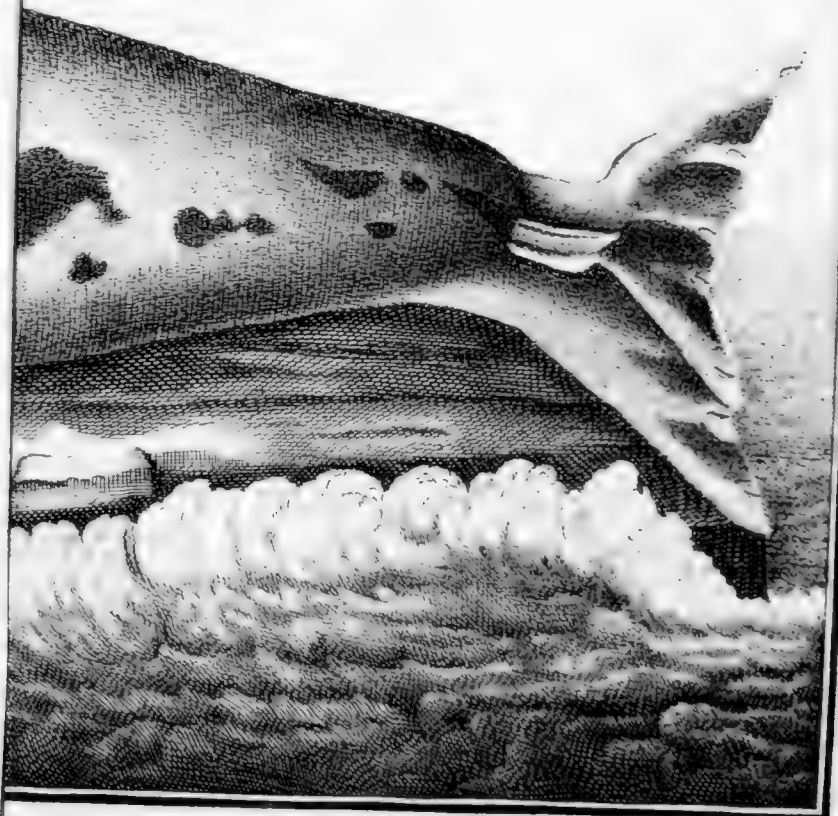
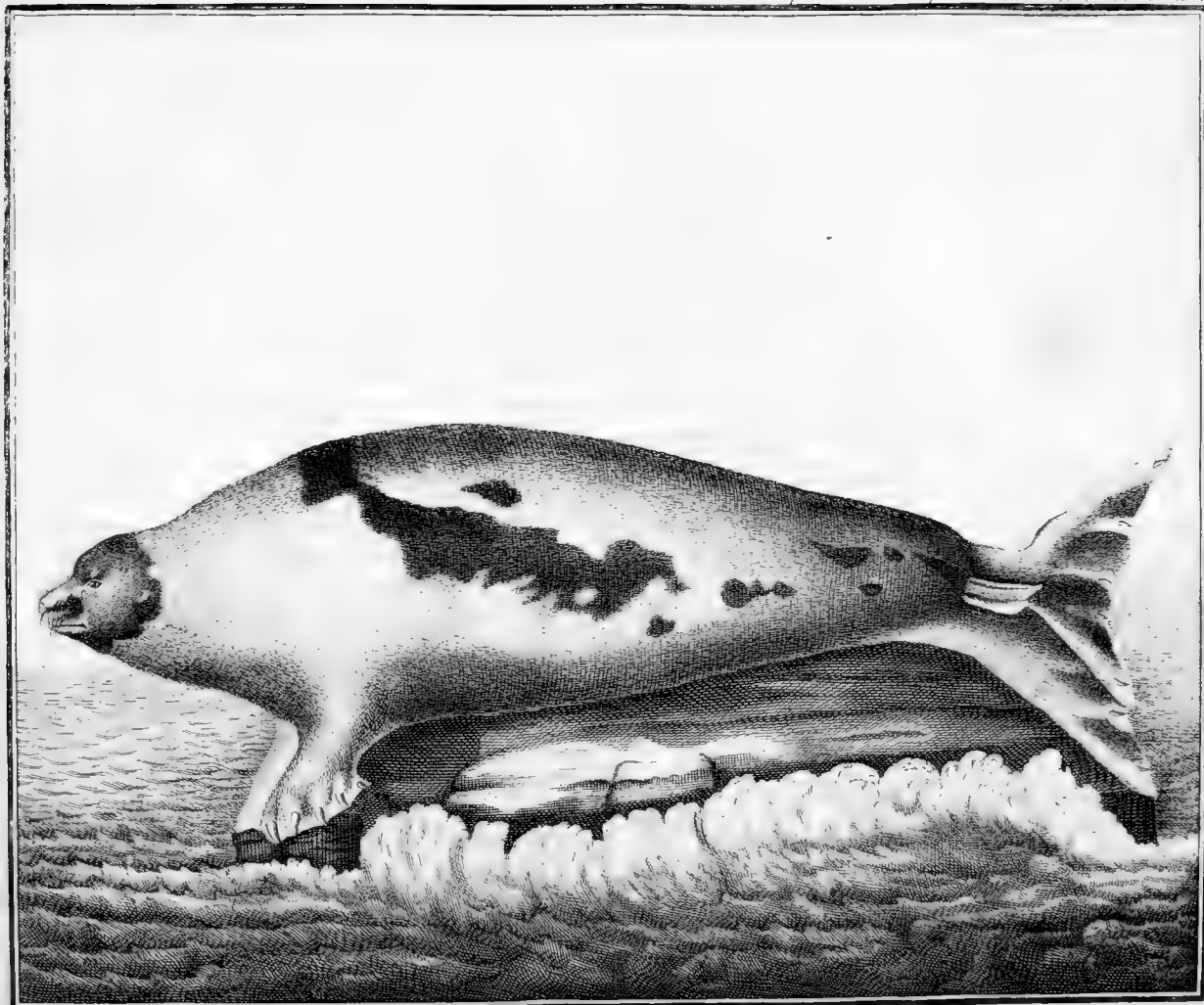


Fig. 2

Fig. II





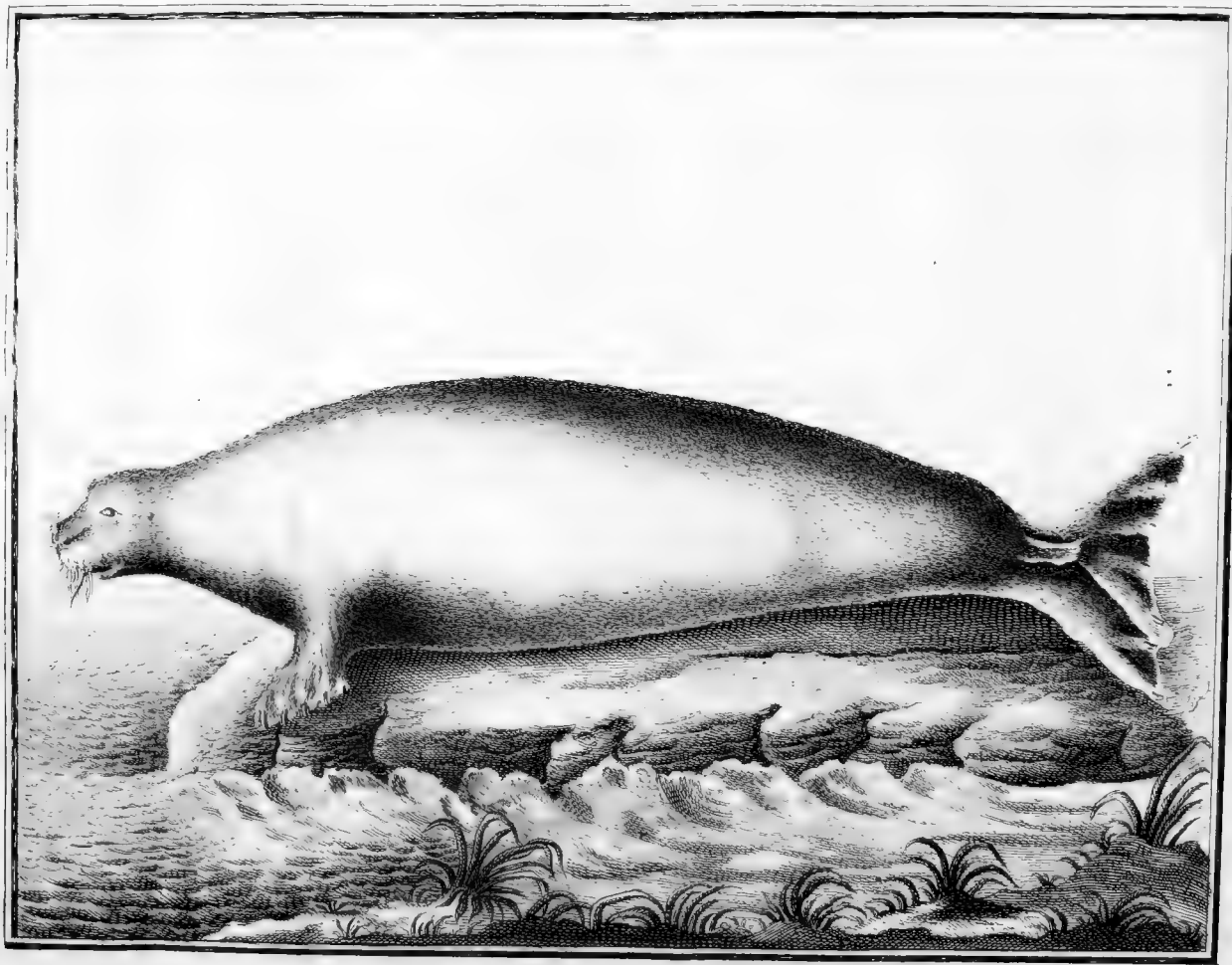


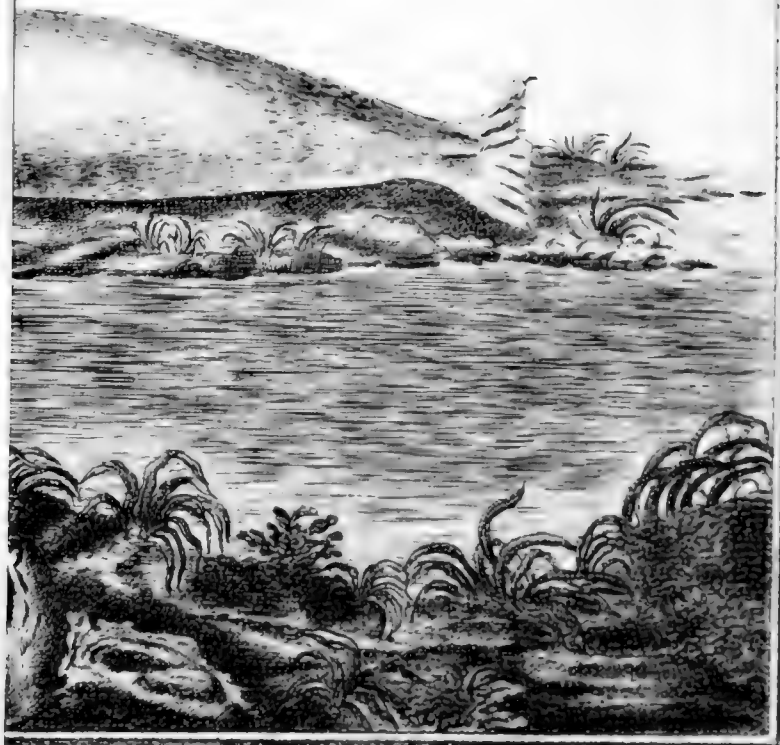
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

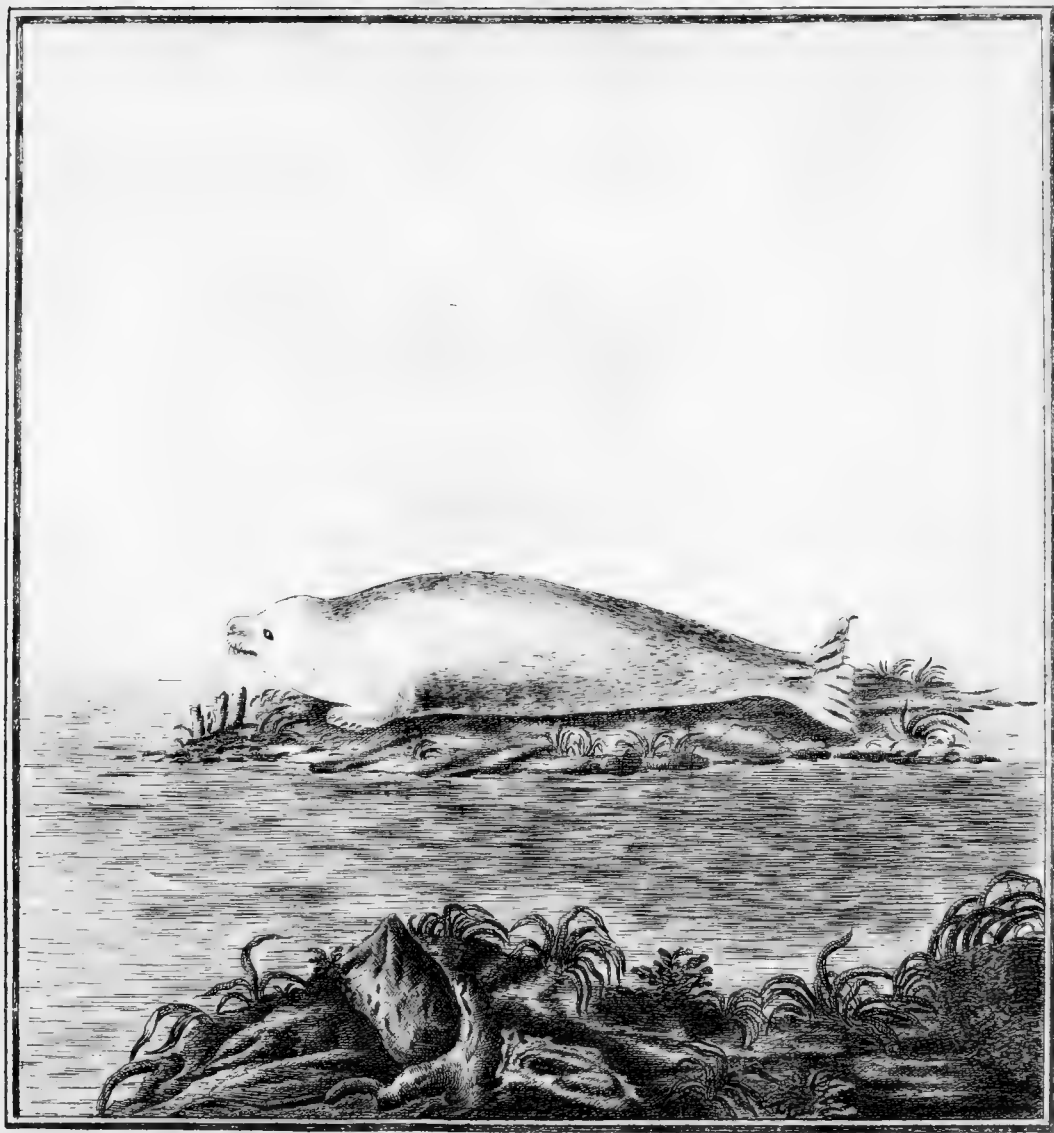


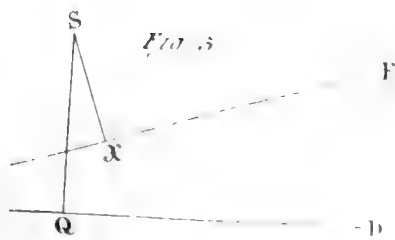


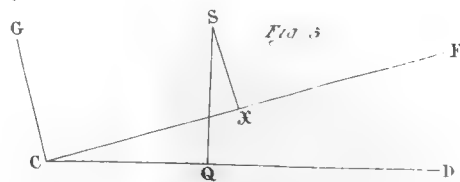
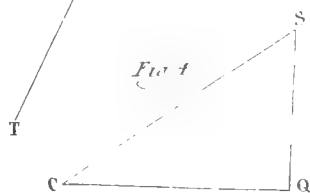
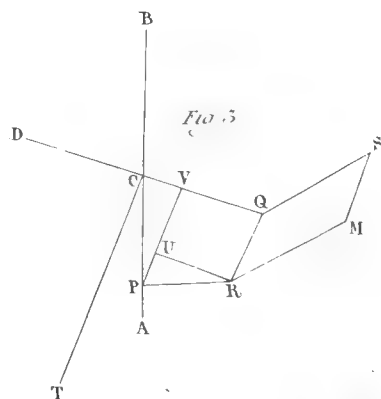
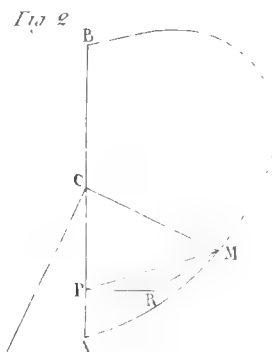
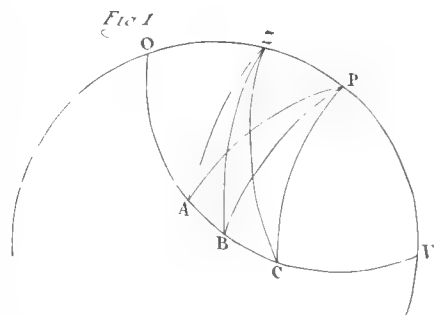












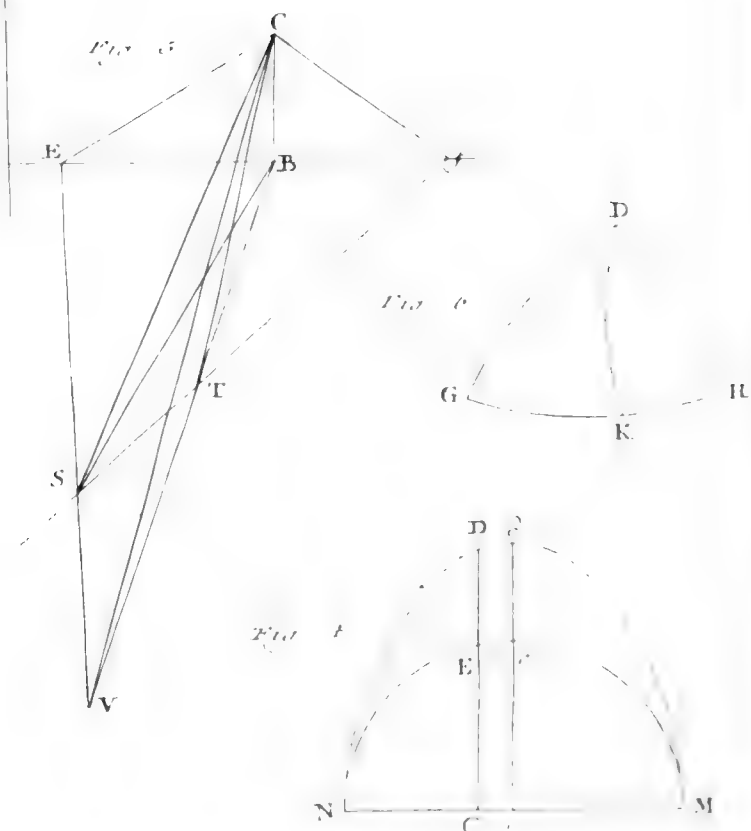
V

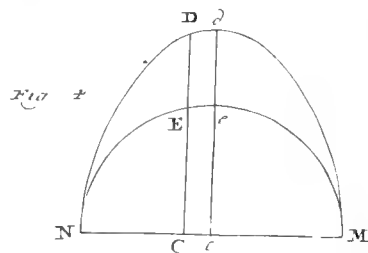
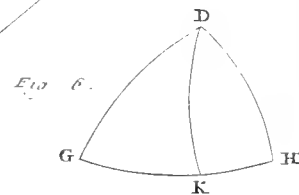
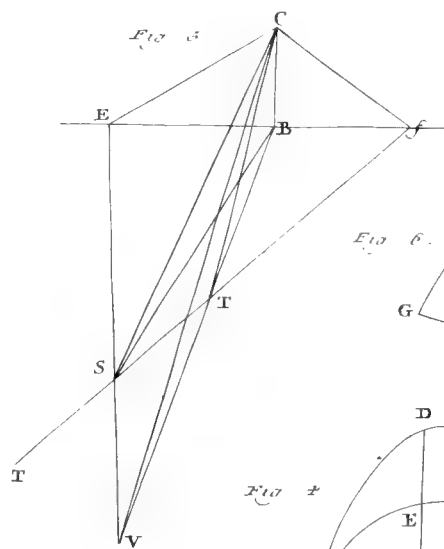
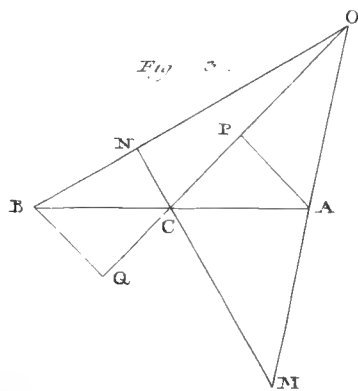
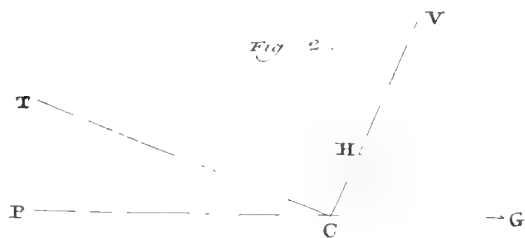
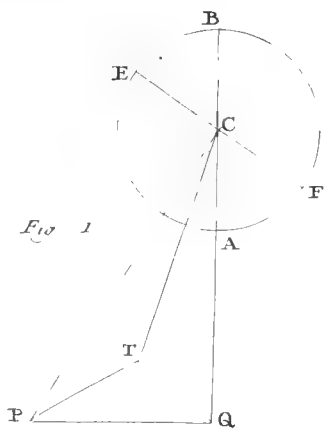
Fig. 2

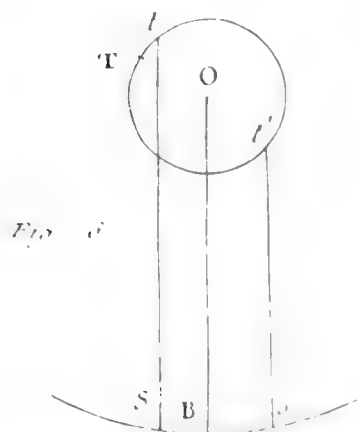
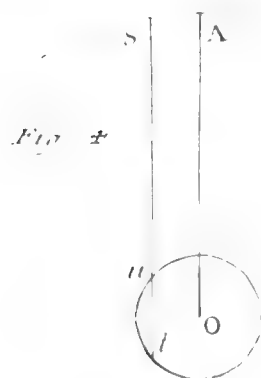
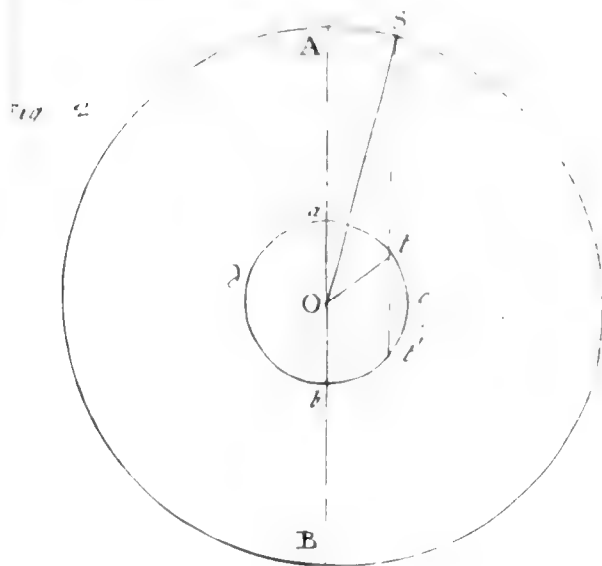
II

C

G







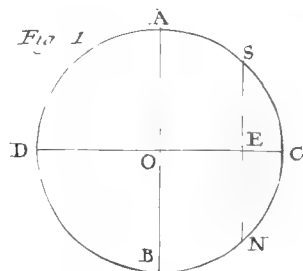


Fig. 2

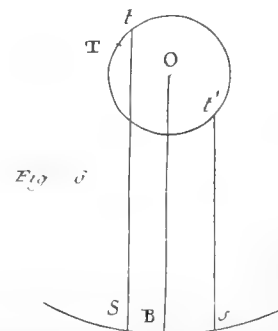
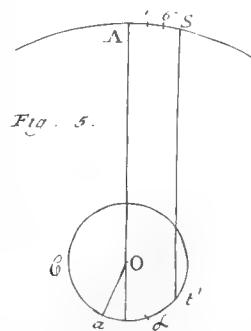
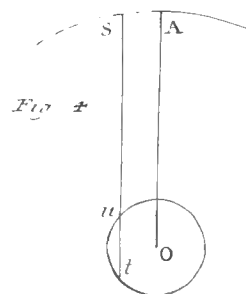
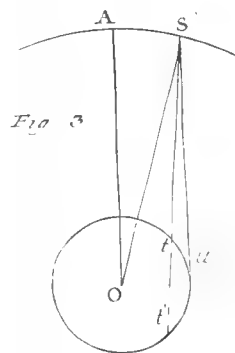
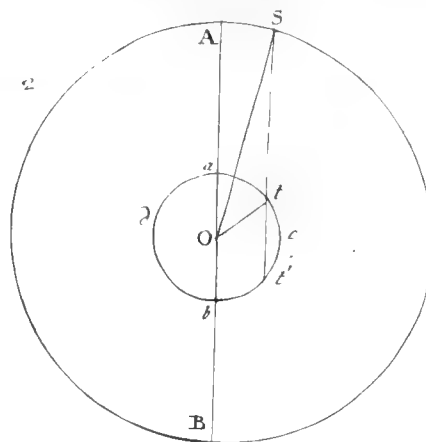




Fig. 14

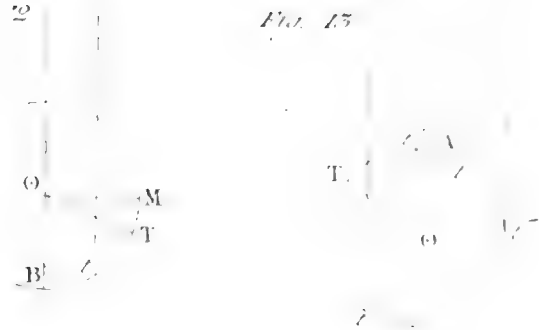
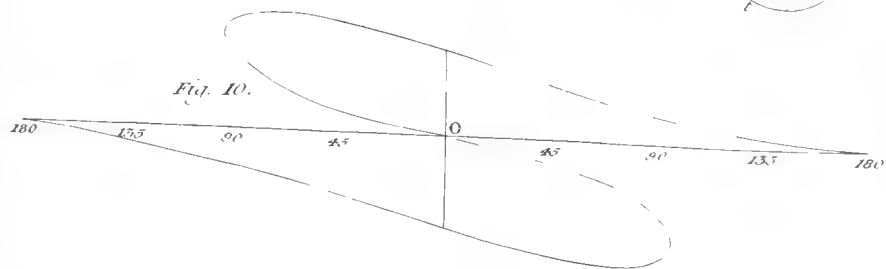
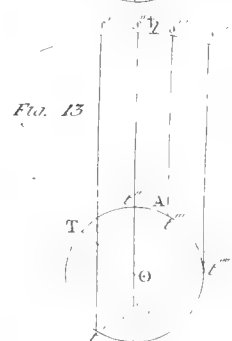
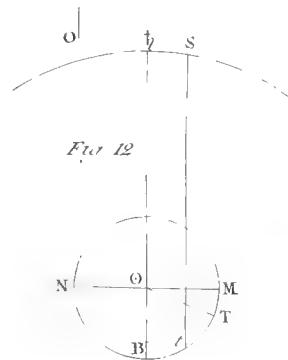
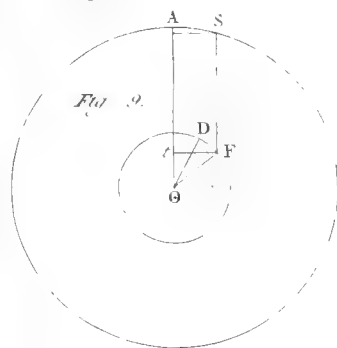
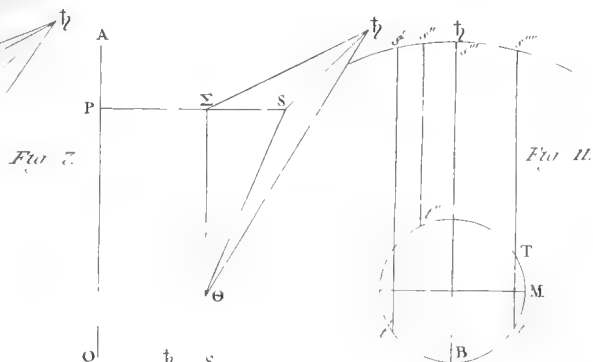
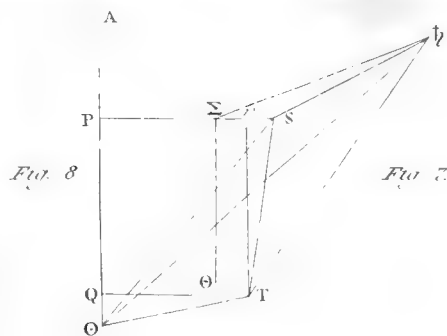


Fig. 15



Nova. Act. Berol. 1777. fasc. 2

Einheimische Arzneipflanzen v. Gillebert u. Pallas

1) Euphorbia cyparissias p. 40

2) Officinarum europæam p. 41

3) Papaverium cannabinum p. 41.

4) Papaveria p. 41.

5) Lychnis chalcidonica p. 42

6) Clematis recta. p. 43

7) Ranunculus acris p. 43

8) Anemone patens p. 43

9) radix Liguiritiae gegen ~~Blut~~ Flechten in Plica polonica. p. 43

Bemerkungen über die Plica polonica v. Gillebert p. 44

Merkwürdige Versteinigung von Gillebert (Fossilengestein in Sept. p. 44)

Beobachtung über Anemone latifolia p. 45

Ephedra monostachya ein kalmarisches Heilmittel gegen Rheumatismen von Jätzig p. 45.

Ei in Ei p. 46

Gyneris nigralis bei Astragalus p. 46

Lobeliae hybridæ auch Koeleria p. 46

Cranium Rhinocerotis asiaticæ auch Camper. p. 193.

Es finden sich hier auch von pag. 202 an einige Bemerkungen über die fossilen Thiergerippe, u. namentlich über den Unterschied zwischen den Knochen der Rhinocerotiden u. der Elefanten fossilien von Pallas beschriebenen Nasenhorn

Additamentum auctore Pallas

Abbildung des ganzen Kopfes eines sibirischen fossilen Rhinoceros. ~~aus~~ in Bemerkungen Camper über Asiatische.

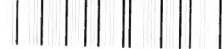
Observatio de dentibus molaribus fossilibus ignoti animalis canadensisly arctici ad nostrum Jugum repositis auctore Pallas.

Observationes circa Myrmecapachagam africanum et Diel
phidion novam speciem orientalem a litteris Camperi
exempli ad Pallas.

Description du Buffle a queue de cheval, précédée d'Observations
Générales sur les espèces sauvages des gros bétail.
par Pallas

42 a
neg. a

42 a
neg. a



100125004